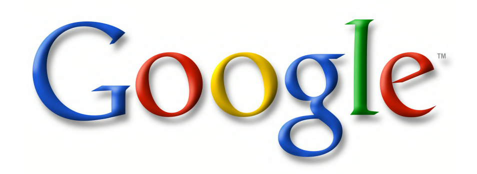
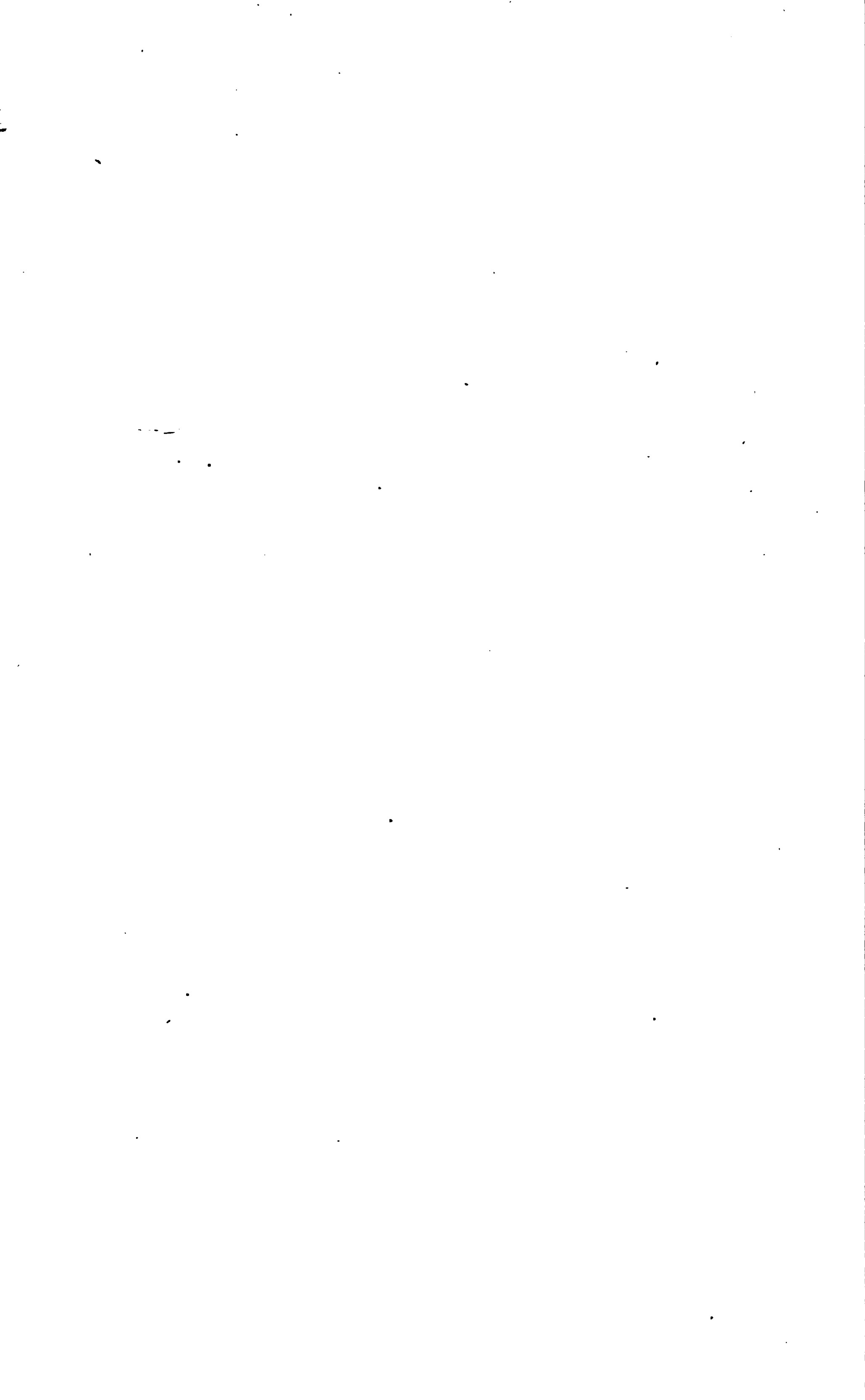








Edgar Buckingham

March 95

Bryn Mawr



ELEMENTE

DER

THEORETISCHEN PHYSIK

VON

DR. C. CHRISTIANSEN

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT KOPENHAGEN

DEUTSCH HERAUSGEGEBEN

VON

DR. JOH. MÜLLER

MIT EINEM VORWORT

VON

DR. E. WIEDEMANN

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT ERLANGEN.

MIT 143 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG

JOHANN AMBROSIUS BARTH (ARTHUR MEINER)

1894



Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Ausführliche Darstellungen der theoretischen Physik besitzen wir in Deutschland in reichem Maasse, sei es von hervorragenden deutschen Gelehrten, sei es in vortrefflichen Uebersetzungen. Ich erinnere nur an die Vorlesungen von Kirchhoff, von F. Neumann, die theoretische Physik von V. von Lang, die Uebersetzungen der Poincaré'schen Vorlesungen u. a. m. Indess fehlte uns doch bisher ein kurzes Lehrbuch, in dem auf beschränktem Raume die wichtigsten Lehren dieses Gebietes soweit entwickelt werden, dass es nach Durcharbeiten desselben möglich ist Originalarbeiten, die nicht gerade all zu specielle Probleme betreffen, zu verstehen. Wie wichtig und nützlich eine solche Einführung in die theoretische Physik ist, bei der stets besonders Rücksicht darauf genommen wird, dass die behandelten Probleme principiell wichtig sind und ihre Erörterung nicht nur mathematisch fördernd ist, sondern dass sie vor allem bei späteren Studien Anwendung finden, habe ich an mir selbst erfahren, als ich bei meinem hochverehrten Lehrer Kirchhoff im Winter 1870/71 in Heidelberg eine Vorlesung in diesem Sinne hörte, eine Vorlesung, die er später wohl nicht mehr gehalten hat.

Als das vorliegende Buch von Christiansen zunächst in dänischer Sprache erschien, sah ich zu meiner Freude, dass es in der eben erwähnten Weise die theoretische Physik

behandelte. Ich habe daher im Interesse unserer Studirenden eine deutsche Ausgabe veranlassen zu sollen geglaubt. Dieselbe ist, um möglichst allen Bedürfnissen zu genügen, gegenüber dem dänischen Original von Herrn Christiansen selbst und von Herrn Joh. Müller wesentlich umgearbeitet und umgestaltet worden.

Ich hoffe, dass das Werk unsere jungen Physiker und Mathematiker wesentlich bei ihrem Studium fördern wird.

Erlangen im April 1894.

E. Wiedemann.

Inhaltsverzeichniss.

Achter Abschnitt. Magnetismus.

Neunter Abschnitt. Electromagnetismus.

Zehnter Abschnitt. Induction.

Elfter Abschnitt. Electrische Schwingungen.

Zwölfter Abschnitt. Die Lichtbrechung in isotropen und durchsichtigen Körpern.

Einleitung.

Der Physiker führt alle Erscheinungen auf Bewegungen zurück, d. h. auf Veränderungen des Ortes mit der Zeit. Wir geben eine kurze Uebersicht über die *Bewegungslehre (Kinematik)* und behandeln zunächst die Bewegung eines Punktes. Die Reihenfolge aller Orte, welche der Punkt im Raume im Laufe der Zeit einnimmt, heisst seine *Bahn*, und die Strecke, welche er während der Zeit t zurücklegt, ist der in der Zeit t zurückgelegte Weg s. Als Einheit der Zeit wird die *Secunde*, als Einheit der Länge das *Centimeter* gebraucht. In diesen beiden Einheiten lassen sich alle bei Bewegungen auftretende Grössen messend bestimmen.

Nach der Gestalt der Bahn unterscheiden wir *geradlinige, krummlinige* und *periodische* Bewegungen; bei den letzten kehrt nach einem bestimmten Zeitabschnitt derselbe Bewegungszustand des Punktes wieder, d. h. der Punkt hat wieder dieselbe Geschwindigkeit und dieselbe Richtung der Geschwindigkeit.

Die geradlinige Bewegung kann entweder *gleichförmig* oder *ungleichförmig* sein. Gleichförmig ist die Bewegung des Punktes, wenn derselbe in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wege zurücklegt. Bei einer solchen gleichförmigen Bewegung legt demnach der Punkt in jeder Zeiteinheit denselben Weg zurück, und dieser in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg ist die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung. Legt der Punkt die Strecke s in der Zeit t in gleichförmiger Bewegung zurück, so wird die Geschwindigkeit c dadurch erhalten, dass wir den Weg s in t gleiche Theile zerlegen, und es ist

$$c = s / t. \tag{a}$$

Die Geschwindigkeit ist also eine Länge dividirt durch eine Zeit.

Bewegt sich ein Punkt auf einer Kreisperipherie mit constanter Geschwindigkeit, so beschreibt der nach dem Punkte gezogene Radius vector in gleichen Zeiten gleiche Sectoren. Der Winkel, dessen Fläche in der Zeiteinheit vom Radius vector beschrieben wird, giebt die *Winkelgeschwindigkeit* der gleichförmigen Kreisbewegung.

Sind s_1, s_2, s_3 u. s. w. die nacheinander zurückgelegten Wege, und sind bezw. t_1, t_2, t_3 u. s. w. die zum Durchlaufen der Wege gebrauchten Zeiten, so ist die *gleichförmige* Bewegung dadurch definirt, dass

$$s_1 / t_1 = s_2 / t_2 = s_3 / t_3 = \ldots\ldots,$$

während im Falle der *ungleichförmigen* Bewegung

$$s_1 / t_1 \gtreqless s_2 / t_2 \gtreqless s_3 / t_3 \gtreqless \ldots\ldots,$$

d. h. die Bewegung ist ungleichförmig, wenn sie in keinem Theile gleichförmig ist. s_1 / t_1 ist die *mittlere Geschwindigkeit* während der Zeit t_1, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Punkt gleichförmig bewegen müsste, um in der Zeit t_1 den Weg s_1 zurückzulegen. Die mittlere Geschwindigkeit ist durchaus von dem betrachteten Wege abhängig; es wird aber der Quotient $\triangle s / \triangle t$ einen endlichen Grenzwerth erhalten, wenn $\triangle s$ und $\triangle t$ zugleich unendlich klein werden. Dieser Grenzwerth wird mit ds / dt bezeichnet und stellt die Geschwindigkeit bei ungleichförmiger Bewegung dar. Die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung ist also durch den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit gegeben und ist der während des Zeitelementes dt erfolgende Zuwachs des Weges, berechnet für die Zeiteinheit.

Für die Geschwindigkeit könnten wir eine besondere Einheit beliebig festsetzen und ebenso für alle anderen Grössen, die wir in der Physik durch Messung zu bestimmen suchen. Weil aber jede Erscheinung auf Bewegung von Masse beruht, so kann dieselbe auch durch die *absoluten Einheiten* der *Masse, Länge* und *Zeit* bestimmt werden. Als Masseneinheit benutzen wir die Masse eines Cubikcentimeters Wasser bei $+ 4^0$ C. oder ein *Gramm,* als Längeneinheit die Länge eines *Centimeters* und als Zeiteinheit die *Secunde.* Im Gegensatz zu den absoluten Einheiten heissen alle übrigen *abgeleitete* oder *zusammengesetzte Einheiten,* die auf die absoluten Einheiten

zurückgeführt werden können. Die *Dimension* einer abgeleiteten Einheit giebt an, in welcher Weise sich dieselbe aus den absoluten Einheiten zusammensetzt. Bezeichnet man allgemein eine Länge mit $[L]$, eine Masse mit $[M]$ und eine Zeit mit $[T]$, so haben wir für die *Dimension der Geschwindigkeit* $[L\,T^{-1}]$.

Wir führen nach Newton für ds/dt die abgekürzte Bezeichnung $\dot{s}$ ein, ebenso für $dx/dt = \dot{x}$.

Im allgemeinen ändert sich die Geschwindigkeit des in Bewegung begriffenen Körpers mit der Zeit; die Geschwindigkeit ist dann eine Function der Zeit. Hat der Punkt zur Zeit t' die Geschwindigkeit v' und zur Zeit t'' die Geschwindigkeit v'', so ist $v'' - v'$ der Zuwachs der Geschwindigkeit im Zeitabschnitt t' bis t''. Dieser Zeitabschnitt sei unendlich klein und gleich $\triangle t$; die Geschwindigkeitszunahme p, bezogen auf die Zeiteinheit, d. h. die Beschleunigung, ist während der Zeit $\triangle t$

(b) $p = (v'' - v')/(t'' - t') = \triangle v / \triangle t$ oder $p = dv/dt = \dot{v}$.

Da $v = ds/dt = \dot{s}$ ist, so haben wir

$$p = d\dot{s}/dt = d^2 s/dt^2 = \ddot{s}.$$

Die *Beschleunigung* ist also gleich dem zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit. Da die Differenz zweier Geschwindigkeiten wieder eine Geschwindigkeit und die Differenz zweier Zeiten ebenfalls eine Zeit ist, so erhalten wir nach (b) für die *Dimension der Beschleunigung*: $[L\,T^{-2}]$.

Nimmt die Geschwindigkeit in jedem Zeitelement um dieselbe Grösse zu, so ist die Beschleunigung constant und die Bewegung heisst *gleichmässig beschleunigt*; nur in diesem Falle ist nach unserer Erklärung die Beschleunigung der Zuwachs der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit. Ist dagegen die Beschleunigung veränderlich und eine Function der Zeit, so ist die Bewegung *ungleichmässig beschleunigt*.

Wir betrachten jetzt die *krummlinige Bewegung* des Punktes. Ein Element der Curve sei ds. Die Bewegungsrichtung des Punktes ist veränderlich und stimmt mit der Richtung des Curvenelementes oder der Tangente der Curve überein. Bildet das Element ds mit den Axen eines rechtwinkligen Coordinaten-

systems die Winkel α, β, γ und sind dx, dy, dz die Projectionen von ds auf die Axen, so ist

$$dx = ds \cos\alpha; \quad dy = ds \cos\beta; \quad dz = ds \cos\gamma.$$

dx, dy und dz sind die Kanten eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Diagonale ds ist. Wir bilden

$$dx/dt = ds/dt \cdot \cos\alpha, \quad dy/dt = ds/dt \cdot \cos\beta,$$
$$dz/dt = ds/dt \cdot \cos\gamma$$

oder

$$\dot{x} = \dot{s}\cos\alpha, \quad \dot{y} = \dot{s}\cos\beta, \quad \dot{z} = \dot{s}\cos\gamma.$$

Dann sind $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ die Projectionen der Geschwindigkeit des bewegten Punktes. In solcher Weise kann die Geschwindigkeit nach drei zu einander rechtwinkligen Richtungen zerlegt werden. Diese Zerlegung der Geschwindigkeit entspricht der Darstellung einer Curve in rechtwinkligen Coordinaten. $\dot{x}$ ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich der betrachtete Punkt von der yz Ebene entfernt. Statt der Bewegung des Punktes im Curvenelement führen wir drei andere Bewegungen ein, welche zu demselben Resultate führen, nämlich eine Bewegung des Punktes in der x-Axe mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$, sodann eine Bewegung der x-Axe mit der Geschwindigkeit $\dot{y}$ in der Richtung der y-Axe, wobei die x-Axe ihrer Anfangslage parallel bleibt, und endlich eine Bewegung der xy-Ebene in der Richtung der z-Axe mit der Geschwindigkeit $\dot{z}$, wobei die xy-Ebene ihrer Anfangslage parallel bleibt.

Sind a, b und c die Coordinaten der Anfangslage des Punktes und führt derselbe gleichzeitig zwei Bewegungen aus, deren Projectionen auf die x-Axe x_1 und x_2 sind, so ist die ganze in der Richtung der x-Axe zurückgelegte Strecke $x_1 + x_2$. Die Componente der Geschwindigkeit in der Richtung der x-Axe ist ferner

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2.$$

Dasselbe gilt für die übrigen Axenrichtungen. Die resultirende Geschwindigkeit wird dargestellt durch die Diagonale des Parallelepipeds, dessen Seiten $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ sind, sodass

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad \text{ist.}$$

Da die Beschleunigung der Zuwachs einer Geschwindigkeit

ist, so wird die resultirende Beschleunigung in derselben Weise bestimmt. $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ seien die x-Componenten der Zuwächse der Geschwindigkeiten bei den beiden einzelnen Bewegungen. Wir haben dann als gesammte Beschleunigung in der Richtung der x-Axe

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$$

und erhalten

$$\dot{s} = \sqrt{(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)^2 + (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2)^2 + (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2)^2},$$

wobei $\ddot{s}$ durch die Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds dargestellt wird, dessen Seiten $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ und $\ddot{z}$ sind.

Sind die Coordinaten des in Bewegung begriffenen Punktes als Functionen der Zeit gegeben, so erhält man die Gleichung der Bahn dadurch, dass man die den gleichen Zeiten t entsprechenden Punkte x und y bestimmt. Ist z. B.:

$$x = f_1(t) \text{ und } y = f_2(t),$$

so muss zur Auffindung des Zusammenhanges zwischen x und y die Variable t aus beiden Gleichungen durch irgend eine mathematische Operation eliminirt werden.

Nach diesen rein kinematischen Betrachtungen wenden wir uns jetzt zur Betrachtung der Ursachen der Bewegungen und knüpfen dabei an Galilei's Untersuchungen über den freien Fall an.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Bewegungslehre.

§ 1. Der freie Fall.

Galilei's Untersuchungen über den Fall haben einen grossen Einfluss auf die Entwicklung der Physik gehabt, da es zweckmässig erscheint, von ihnen auszugehen. Galil zeigte, *dass alle Körper im luftleeren Raume gleich schnell falle* Dies ist eine der grössten Entdeckungen, denn sie zeigt, da alle Körper unabhängig von ihrer sonstigen Beschaffenheit ei Eigenschaft gemeinsam haben. In keinem Gebiete der Natu wissenschaften existirt hierzu ein Seitenstück. Die Entdecku Galilei's deutet in der Constitution der Materie auf ei Einheitlichkeit hin, deren volle Bedeutung sicher noch nic erkannt ist.

Die Richtigkeit des Resultates von Galilei ist spät durch sorgfältige Versuche von Newton, Bessel u. A. b stätigt worden.

Galilei fand ferner, dass *die Fallräume s sich wie d Quadrate der Fallzeiten t verhalten,* sodass

(a) $$s = \tfrac{1}{2} g t^2$$

ist, wo die Constante g die *Beschleunigung der Schwerkraft* a giebt. Die Fallbewegung ist demnach eine gleichmässig b schleunigte, denn es ist $ds/dt = \dot{s} = gt$ und $d^2s/dt^2 = \ddot{s} = g$ also constant. Das zweite Fallgesetz ist freilich nicht wie da erste als ein Fundamentalsatz[1]) in der Physik zu betrachte

---

[1]) Spätere Untersuchungen haben nämlich gezeigt, dass die Grös der Schwerkraft von dem Abstand des fallenden Körpers vom Erdmitte punkte abhängt, folglich muss g sich während des Falles ändern. Di Aenderung von g ist jedoch so klein, dass sie bis jetzt durch Fallversuch nicht direct hat nachgewiesen werden können.

In dem nach Verlauf der Zeit t folgenden Zeitraum τ durchläuft der Körper eine Strecke σ, welche sich aus der Gleichung

$$s + \sigma = \tfrac{1}{2}(t + \tau)^2 g$$

bestimmt. Mit Rücksicht auf die Gleichung (a) erhalten wir

$$\text{(b)} \qquad \sigma = g t \tau + \tfrac{1}{2} g \tau^2 .$$

Während des Zeitintervalles τ ist die Geschwindigkeit in Wirklichkeit veränderlich. Ist v die mittlere Geschwindigkeit während τ, so wird

$$v = \sigma / \tau = g t + \tfrac{1}{2} g \tau .$$

Ist τ unendlich klein und gleich dt, so ist $\sigma = ds$ und, da man $\frac{1}{2} g\, dt$ gegen $g t$ vernachlässigen kann,

$$\text{(c)} \qquad v = ds / dt = \dot{s} = g t .$$

Die Geschwindigkeit wächst also proportional mit der Zeit und g giebt den Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit an.

Zum Durchfallen der Strecke s braucht der Körper die Zeit t, die sich aus (a) bestimmt zu

$$\text{(d)} \qquad t = \sqrt{2 s / g} .$$

Die Geschwindigkeit zur Zeit t ergiebt sich, wenn wir diesen Wert von t in (c) einsetzen; es ist

$$\text{(e)} \qquad v = \sqrt{2 s g} .$$

Zu demselben Resultat gelangen wir dadurch, dass t durch eine mathematische Operation aus den Gleichungen (a) und (c) eliminirt wird.

An die Fallgesetze anknüpfend leiten wir den *Satz von der Trägheit* ab.

Um zu erklären, dass die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers gleichmässig wächst, machen wir die Annahme: *ein Körper behält die ihm einmal ertheilte Geschwindigkeit der Grösse und Richtung nach unverändert bei; die Aenderung der Geschwindigkeit rührt von äusseren Ursachen her.* Man nennt diesen Satz *das Princip der Trägheit* oder das *Beharrungsprincip.*

Zur Zeit $(t + \tau)$ ist die Geschwindigkeit v'

$$v' = g t + g \tau .$$

Hier ist $g t$ die Anfangsgeschwindigkeit, zu welcher in Folge

einer äusseren Ursache, nämlich der Schwerkraft, die Geschwindigkeit $g\tau$ hinzutritt. Dementsprechend durchläuft der Körper in der Zeit τ, die auf die Fallzeit t folgt, den Weg

$$\sigma = g t \tau + \tfrac{1}{2} g \tau^2.$$

Den Weg $g t \tau$ legt der fallende Körper zurück während der Zeit τ mit der zur Zeit t erlangten Endgeschwindigkeit $g t$; der Fallraum $\frac{1}{2} g \tau^2$ entspricht der Einwirkung der Schwerkraft während der Zeit τ.

Das Princip der Trägheit gilt nicht nur in dem Falle, wo der Zuwachs der Geschwindigkeit der Richtung nach mit der ursprünglichen Geschwindigkeit zusammenfällt, sondern auch in den Fällen, wo derselbe in irgend welcher Richtung gegen die ursprüngliche Geschwindigkeit geneigt ist. Hierin liegt auch die Berechtigung der Anwendung der geometrischen Zusammensetzung von Bewegungen und Beschleunigungen bei physikalischen Erscheinungen.

Die Betrachtungen über den Fall führen auch zu einer Beantwortung der Frage, wie die Kräfte zu messen sind. Es ist klar, dass die Geschwindigkeitszunahme beim Fall und der Druck der Körper auf ihre Unterlage, d. h. ihr Gewicht, als Wirkungen einer Kraft anzusehen sind. Beim Fall hat man in der wachsenden Geschwindigkeit eine Aeusserung jener Kraft, und die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit giebt ein neues Maass für diese Kraft. Aus dieser Definition ist auch ersichtlich, wie die gesammte Wirkung mehrerer Kräfte sich ergiebt, worüber man vor Galilei nicht zur Klarheit kommen konnte. Die den einzelnen Kräften entsprechenden Zuwächse der Geschwindigkeiten werden in der früher besprochenen Weise zusammengesetzt und der resultirende Zuwachs giebt ein Maass für die gesammte Wirkung der Kräfte.

§ 2. Die Wurfbewegung.

Wir machen eine Anwendung auf die mit dem freien Fall zusammenhängende Wurfbewegung, und betrachten

1. *den verticalen Wurf* nach unten und nach oben.

Galilei ging bei seinen Untersuchungen über die Wurfbewegung von der Vorstellung aus, dass der Körper, welcher eine Anfangsgeschwindigkeit in willkürlicher Richtung erhält,

nicht allein diese Bewegung ausführt, sondern auch gerade ebenso fällt wie beim freien Fall. Wird dem Körper in der Richtung der Fallbewegung zur Zeit $t = o$ die Anfangsgeschwindigkeit u ertheilt, so ist nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit v

(a) $$v = u + g t,$$

und der durchlaufene Weg s

(b) $$s = u t + \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Wird dem Körper senkrecht nach oben die Anfangsgeschwindigkeit u ertheilt, so lauten die entsprechenden Formeln

(c) (d) $$v = u - g t \quad \text{und} \quad s = u t - \tfrac{1}{2} g t^2;$$

2. *den schiefen Wurf.*

Der Körper werde in einer um den Winkel α gegen die Horizontale geneigten Richtung OA geworfen. Es sei OA (Fig. 1) die Anfangsgeschwindigkeit u des Körpers. $OB = tu$ ist der Weg, welchen der Körper in der Zeit t zurücklegen würde, wenn die Schwerkraft nicht auf ihn wirkte. Der Körper gelangt jedoch nicht nach B, sondern befindet sich nach Verlauf der Zeit t unterhalb B im Punkte C, sodass $BC = \tfrac{1}{2} g t^2$ ist. In einer durch OB gelegten verticalen Ebene liege die x-Axe Ox horizontal und die y-Axe Oy vertical, dann sind die Coordinaten des Punktes C zur Zeit t

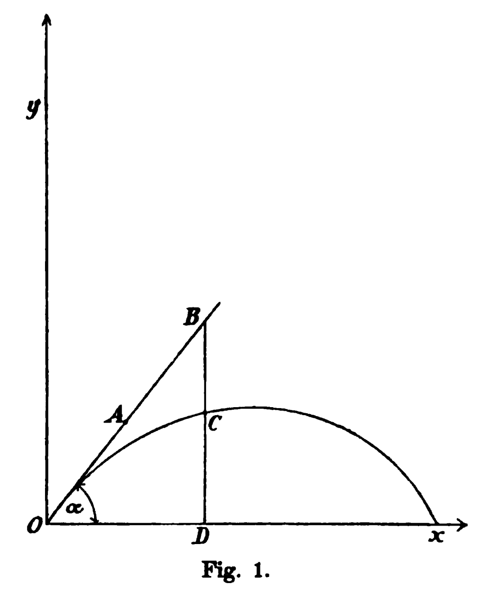


Fig. 1.

(e) $$x = OD = u t \cos\alpha, \quad y = CD = u t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Durch die Gleichungen (e) ist der Ort des Körpers zu jeder

Zeit bestimmt. Während des Zeitelementes dt erfahren die Coordinaten x und y die Zuwächse

(f) $$dx = u \cos\alpha\, dt \quad \text{und} \quad dy = u \sin\alpha\, dt - g t\, dt.$$

Der in der Zeit dt durchlaufene Weg ds ist bestimmt durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = [(u \cos\alpha)^2 + (u \sin\alpha - g t)^2]\, dt^2$$

Die Geschwindigkeit v des Körpers ergiebt sich durch

(g) (h) $$v = \dot{s} \quad \text{und} \quad v^2 = \dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u^2 - 2 u g t \sin\alpha + g^2 t^2.$$

Die den Axen Ox und Oy parallelen Componenten der Geschwindigkeit sind bezw. $v \cdot dx / ds$ und $v \cdot dy / ds$, oder mit Rücksicht auf (g) $\dot{x}$ und $\dot{y}$. Nach der Gleichung (f) wird

(i) $$\dot{x} = u \cos\alpha; \quad \dot{y} = u \sin\alpha - g t.$$

Demnach ist die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung constant, in verticaler dagegen nimmt sie gleichmässig ab; es wirkt ja auch die Kraft nur in verticaler Richtung.

Wird t aus den Gleichungen (e) eliminirt, so erhält man als Bahngleichung

(k) $$y = x \operatorname{tang}\alpha - x^2 / 4h \,.\, (1 + \operatorname{tang}^2\alpha), \quad \text{wo} \quad h = \tfrac{1}{2} u^2 / g$$

die Höhe *(Geschwindigkeitshöhe)* ist, welche der Körper durchfallen muss, um die Geschwindigkeit u zu erhalten. Die Gleichung (k) zeigt, dass *die Wurflinie eine Parabel* ist. Die *Wurfweite* oder die von O aus gerechnete Entfernung, in welcher die Wurflinie die x-Axe schneidet, ergiebt sich aus (k), indem wir $y = o$ setzen. Wir erhalten

$$o = \operatorname{tang}\alpha - \tfrac{1}{2} g x (1 + \operatorname{tang}^2\alpha) / u^2.$$

Die Wurfweite W ist also

$$W = u^2 \sin 2\alpha / g,$$

d. h. *das Maximum der Wurfweite wird für $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ erreicht.*

Ist die Geschwindigkeit u gegeben, so kann durch die Formel (k) die Richtung bestimmt werden, in welcher ein Körper fortgeschleudert werden muss, um ein vorgeschriebenes Ziel zu erreichen. Es ist

$$\operatorname{tang}\alpha = (2h \pm \sqrt{4h^2 - 4hy - x^2}) / x.$$

Diese Gleichung zeigt, dass im allgemeinen die Anfangsgeschwindigkeit u zwei Richtungen haben kann, bei welchen

der geworfene Körper ein vorgeschriebenes Ziel trifft. Ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen Null, so giebt es nur eine Richtung. Hat das vom Körper zu erreichende Ziel aber solche Lage, dass $4h^2 - 4hy - x^2 < o$ ist, so wird tang α imaginär, und der Körper kann das vorgeschriebene Ziel überhaupt nicht erreichen.

§ 3. Die Bewegungsgleichungen für einen materiellen Punkt.

In der Bewegungslehre brauchen wir das Wort „*Kraft*" als Bezeichnung für die bekannte oder unbekannte Ursache der Aenderung des Bewegungszustandes eines Körpers. Kommt ein ruhender Körper in Bewegung oder ein bewegter in Ruhe, so schreiben wir diese Veränderung der Wirkung einer Kraft zu. Geschieht die Veränderung plötzlich, so wirkt auf den Körper eine *Momentan-* oder *Stosskraft*. Eine nähere Betrachtung zeigt indessen, dass endliche Veränderungen des Bewegungszustandes eines Körpers nie momentan sind, sondern eine gewisse Zeit erfordern, die freilich sehr klein sein kann. Die Bewegung eines Körpers kann sowohl in Bezug auf die Grösse als auf die Richtung der Geschwindigkeit geändert werden. Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers ändert sich nur der Grösse nach; bei einem um einen Mittelpunkt rotirenden Körper ändert sich die Richtung und bisweilen auch die Grösse der Geschwindigkeit. Die Erfahrung zeigt dabei, dass Richtungsänderungen in der Geschwindigkeit sowohl wie Grössenänderungen derselben durch äussere Ursachen bedingt werden, die in einem längeren oder kürzeren Zeitraum, aber nie momentan wirken.

Vom Ursprung der Kraft kann man absehen und die Grösse der Kraft durch ihre Wirkung messen. Als Maass der Kraft kann entweder der Weg betrachtet werden, welchen unter dem Einfluss der Kraft ein ursprünglich ruhender Körper durchläuft, oder die Geschwindigkeit, welche die Kraft dem Körper in einer gewissen Zeit ertheilt. Welche von beiden Grössen man als Maass der Kraft benutzt, ist im Grunde genommen gleichgültig, allgemein wird jedoch als Maass der Kraft die erzeugte Geschwindigkeit oder besser die Geschwindigkeitsänderung benutzt. *Wir messen die Grösse der*

Momentankräfte durch die dem Körper in Folge des Stosses ertheilte Geschwindigkeitsänderung, und messen die Grösse der continuirlich wirkenden Kräfte durch die Geschwindigkeitsänderung, welche während einer Secunde erfolgt. Newton nahm ferner an, *dass die Kraft F der Menge des in Bewegung Gesetzten, d. h. der Masse m des Körpers proportional wäre.* Er setzte daher

$$F = f \cdot m \cdot b,$$

wo b die Beschleunigung bedeutet und f ein von den Einheiten der Kraft, Masse und Beschleunigung oder von den Einheiten der Masse, Zeit und Länge abhängiger Factor ist. Setzen wir $f = 1$, so wird $F = m.b$ und wir erhalten für die Krafteinheit folgende Definition: *Die Einheit der Kraft ist diejenige Kraft, welche der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung ertheilt oder welche einem Körper in der Secunde die Bewegungsmenge 1 ertheilt* (vergl. § 16). Diese Einheit der Kraft oder ein *Dyne* ist also diejenige, welche der Masse ein Gramm in einer Secunde die Beschleunigung ein Centimeter ertheilt. Die Dimension der Kraft ist demnach $M L T^{-2}$ (vergl. Einleitung).

Die Kraft, mit welcher ein Körper von der Erde angezogen wird, ist das Gewicht des Körpers, welches durch das Product aus der Masse des Körpers in die Beschleunigung des freien Falles bestimmt ist. Wird der Körper durch eine Unterlage am Fallen gehindert, so übt er einen Druck auf die Unterlage aus, der gleich seinem Gewichte ist. Andererseits übt nach dem *Gesetze der Wirkung und Gegenwirkung* die Unterlage denselben Druck auf den Körper aus. Dieser Druck kann durch die Waage, durch die Elasticität einer Feder u. s. w. ermittelt werden.

Wie die Geschwindigkeit, welche durch die wirkende Kraft erzeugt wird, durch ihre Projectionen nach den drei Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems bestimmt ist, so ist auch die Kraft F durch ihre Componenten nach den drei Coordinatenaxen gegeben. Werden diese Componenten mit X, Y und Z bezeichnet, so haben wir

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Uebrigens kann man die Kräfte auch in anderer Weise in Componenten zerlegen, solche Zerlegungen werden später behandelt.

Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit v in der Richtung AB (Fig. 2) und wirkt auf ihn eine Kraft in der Richtung AC, so kann man die Bahn des Körpers bestimmen nach dem von Galilei zur Auffindung der Gesetze der Wurfbewegung benutzten Verfahren. In der Zeit τ legt der Körper in Folge seiner Anfangsgeschwindigkeit v den Weg $AM = v\tau$ zurück, gleichzeitig durchläuft er jedoch unter dem Einfluss der Kraft F die Strecke $AN = \frac{1}{2}\gamma\tau^2$, wo γ die Beschleunigung ist, welche die Kraft F dem Körper ertheilt. Construirt man das Parallelogramm $AMDN$, so ist D der Ort des Körpers nach der Zeit τ.

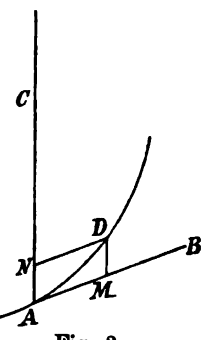


Fig. 2.

Die Richtung der Geschwindigkeit bilde mit den Axen OX, OY, OZ eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Winkel α, β, γ; die Richtung der Kraft bilde mit denselben Axen die Winkel λ, μ, ν. Hat der Punkt A die Coordinaten x, y und z, so ist die x-Coordinate des Punktes D

$$\text{(b)} \quad x + AM\cos\alpha + DM\cos\lambda = x + v\tau\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma\tau^2\cos\lambda.$$

Da die Coordinaten Functionen der Zeit sind, so ist bei Benutzung der Taylor'schen Reihe die x-Coordinate von D

$$\text{(c)} \qquad x + \dot{x}\tau + \tfrac{1}{2}\ddot{x}\tau^2 + \ldots\ldots$$

Durch Vergleichung von (b) und (c) folgt, dass

$$\text{(d) (e)} \qquad v\cos\alpha = \dot{x} \quad \text{und} \quad \gamma\cos\lambda = \ddot{x} \quad \text{ist.}$$

In ganz derselben Weise ergiebt sich, dass

$$v\cos\beta = \dot{y},\ \gamma\cos\mu = \ddot{y}; \quad v\cos\gamma = \dot{z},\ \gamma\cos\nu = \ddot{z}.$$

$\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ sind die Projectionen der Geschwindigkeit auf die Coordinatenaxen; dieses ergiebt sich übrigens auch, wenn wir die Geschwindigkeit v durch ds/dt ausdrücken und beachten, dass

$$\cos\alpha = dx/ds \text{ u. s. w.}$$

ist. Es wird demnach

$$v\cos\alpha = dx/ds \cdot \dot{s} = \dot{x}.$$

Aus (e) folgt ferner, dass

$$m\gamma \cos\lambda = m\ddot{x}.$$

ist. Da $m\gamma$ die Kraft

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

ist und $m\gamma \cos\lambda$ die x-Componente X der Kraft F darstellt. so ist

(f) $\qquad X = m\ddot{x}$ und ebenso $Y = m\ddot{y}, \quad Z = m\ddot{z}.$

Die Gleichungen (f) sind die *Bewegungsgleichungen* des Massentheilchens m. Sind X, Y und Z als Functionen der Coordinaten. der Zeit und bisweilen auch der Geschwindigkeit gegeben, so bestimmen die Gleichungen (f) die Bewegung, wenn die Lage und Geschwindigkeit der Masse m zu Anfang der Bewegung gegeben sind. Dazu ist die Integration der Gleichungen (f) erforderlich, die freilich in den wenigsten Fällen sich ausführen lässt. Ist die Bewegung bekannt, d. h. sind x, y und z als Functionen der Zeit t gegeben, so ist es leichter, aus den Gleichungen (f) die Kraft zu finden, welche die Bewegung veranlasst.

Wir geben jetzt einige Beispiele.

1. *Die Kreisbewegung.*

Der Körper von der Masse m bewege sich mit constanter Geschwindigkeit auf dem Kreise ABC, dessen Mittelpunkt im Coordinatenanfangspunkte O liegt, und dessen Radius R ist (Fig. 3). Die Umlaufszeit sei T. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, und geht die x-Axe durch den Ort des Körpers zur Zeit $t = o$, so ist

$$x = R\cos(\omega t), \quad y = R\sin(\omega t).$$

Daraus folgt nach (f), dass

$$X = m\ddot{x} = -m\omega^2 R\cos(\omega t), \quad Y = m\ddot{y} = -m\omega^2 R\sin(\omega t)$$

oder

$$X = -m\omega^2 x, \quad Y = -m\omega^2 y \text{ ist.}$$

Die Kraft ist also

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = m\omega^2 R.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Kraft mit der x- und y-Axe bildet, sind bezw. $-x/R$ und $-y/R$.

Daraus ersieht man, dass die Kraft nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtet ist. Wird die Geschwindigkeit des Körpers in der Bahn mit v bezeichnet, so ist

$$v = R\omega = 2\pi R / T$$

und

$$F = m v^2 / R = 4\pi^2 m R / T^2.$$

Die nach dem Mittelpunkt gerichtete Beschleunigung, die sogen. Centripetalbeschleunigung ist gleich $v^2 / R = R\omega^2$. Man nennt F

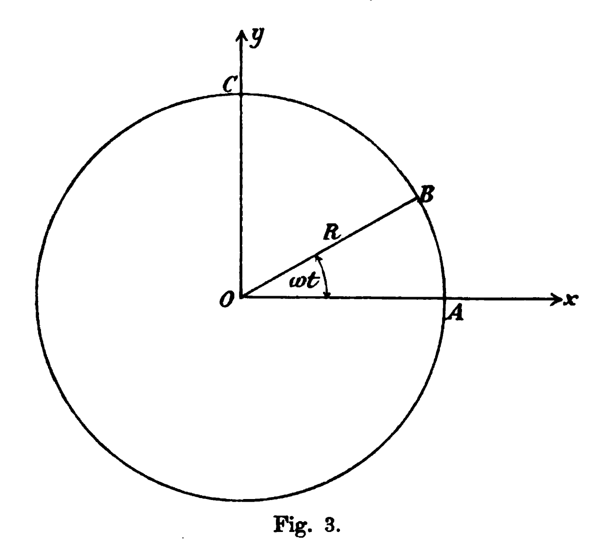


Fig. 3.

die *Centripetalkraft.* Dieses Resultat ist zuerst von Huygens gefunden.

2. *Die Wurfbewegung.*

Der Körper werde vom Coordinatenanfangspunkte aus mit der Geschwindigkeit u in einer Richtung fortgeschleudert, welche mit der horizontalen x-Axe den Winkel α bildet; die positive y-Axe sei senkrecht nach oben gerichtet. Dann ist

$$X = o, \quad Y = -mg.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m\ddot{x} = o, \quad m\ddot{y} = -mg.$$

Durch Integration ergiebt sich

$$x = a + a_1 t, \quad y = b + b_1 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

wo a, a_1, b, b_1 Constante sind. Da der Körper zur Zeit $t = o$ sich im Coordinatenanfangspunkte befindet, so folgt $a = o$ und $b = o$. Die Componenten der Geschwindigkeit sind zur Zeit t

$$\dot{x} = a_1, \quad \dot{y} = b_1 - g\,t.$$

Aus den Werthen, welche die Geschwindigkeit zur Zeit $t = o$ hat, ergiebt sich, dass

$$a_1 = u \cos \alpha, \quad b_1 = u \sin \alpha.$$

Damit haben wir die in § 2 (e) angegebenen Gleichungen wieder erhalten.

3. *Die schwingende Bewegung.*

Wird eine runde elastische Stange von geringem Gewicht, die am einen Ende befestigt ist und am anderen eine schwere

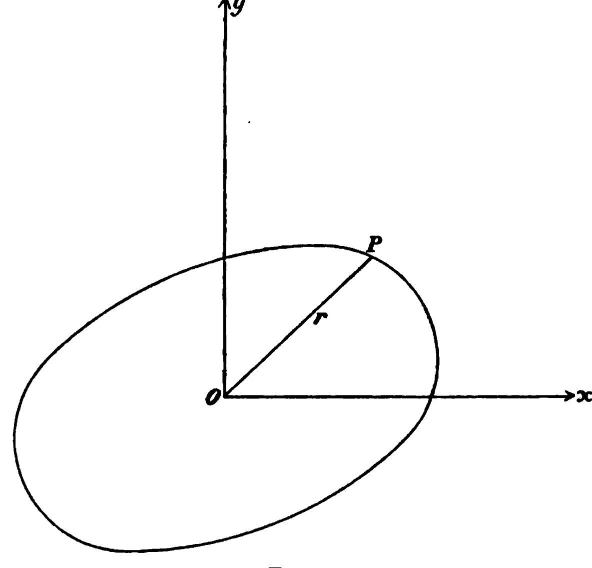


Fig. 4.

Kugel trägt, aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht, so wird sie in dieselbe durch eine Kraft zurückgetrieben, die dem Abstand von der Ruhelage proportional ist. Ist r (Fig. 4) der Abstand von der Gleichgewichtslage O bis zum Punkte P, in dem sich der Körper zur Zeit t befindet, so ist die zurück-

treibende Kraft gleich $-mk^2r$, wo k eine Constante ist. Es ist ferner

$$X = -mk^2x, \quad Y = -mk^2y$$

und

$$\ddot{x} = -k^2x, \quad \ddot{y} = -k^2y.$$

Die Integrale lauten

$$x = a_1 \cos kt + b_1 \sin kt, \quad y = a_2 \cos kt + b_2 \sin kt,$$

wo a_1, b_1, a_2, b_2 Constante sind. Befindet sich der betrachtete Punkt P zur Zeit $t = o$ im Punkte x_0, y_0 und sind zu derselben Zeit u_0 und v_0 die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit v, so ist

$$x_0 = a_1, \; y_0 = a_2; \quad u_0 = b_1 k, \; v_0 = b_2 k.$$

Demnach lauten die Integrale

$$x = x_0 \cos kt + u_0 / k . \sin kt, \quad y = y_0 \cos kt + v_0 / k . \sin kt.$$

Wir haben also

$$\dot{x} = -kx_0 \sin kt + u_0 \cos kt, \quad \dot{y} = -ky_0 \sin kt + v_0 \cos kt.$$

Befindet sich der betrachtete Punkt zur Zeit $t = o$ auf der Axe Oy, und ist seine Anfangsgeschwindigkeit v parallel der x-Axe gerichtet, so ist $v = u_0$ und $v_0 = o$. Es wird dann

$$x = u_0 / k \cdot \sin kt, \quad y = y_0 \cos kt.$$

Wird kt um 2π vermehrt, so erhalten x und y denselben Werth wieder; die Umlaufszeit T ist $T = 2\pi / k$. Die Bewegung ist also eine *periodische*. Dividirt man die erstere Gleichung durch u_0 / k, die letztere durch y_0 und addirt sodann die Quadrate der rechten und linken Seiten beider Gleichungen, so ergiebt sich als Bahn des Körpers eine Ellipse.

§ 4. Die Tangential- und Normalkraft.

MAD (Fig. 5) sei ein Theil der Bahn des Körpers mit der Masse m, AB sei die Tangente der Bahn im Punkte A, AC die Richtung der auf den Körper wirkenden Kraft F. Die Ebene der Bahn enthält die Richtungen der Geschwindigkeit und der Kraft und soll zur xy-Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems gewählt werden, dessen x-Axe die Richtung AB hat. Die Normale AH ist die positive y-Axe und liegt

mit der Richtung der Kraft AC auf derselben Seite der Bahn. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m\ddot{x} = T, \quad m\ddot{y} = N.$$

T und N sind die Componenten der Kraft in der Richtung der Tangente und der Normale, und heissen dementsprechend *Tangential-* und *Normalkraft.* Ist der kleine Bogen $AD = s$ und H der dem Punkte A entsprechende Krümmungsmittelpunkt der Curve, so hat D die Coordinaten

$$x = R \cdot \sin(s/R), \quad y = R - R\cos(s/R),$$

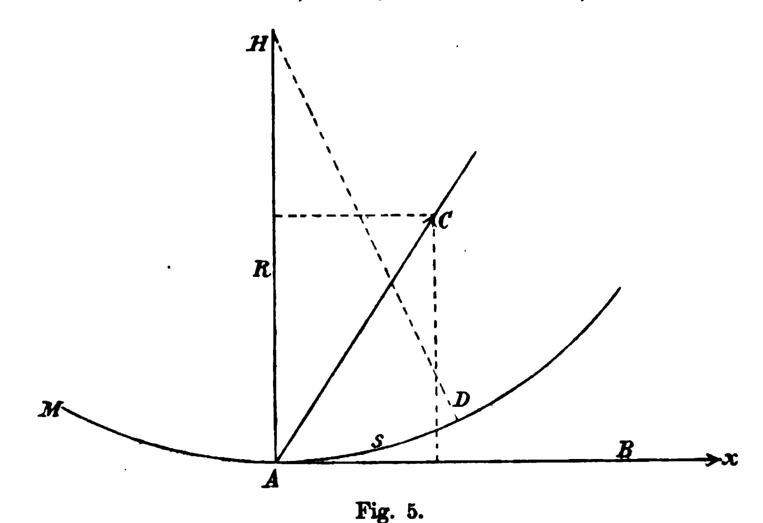


Fig. 5.

wenn der Krümmungsradius $AH = R$ gesetzt wird. Demnach ist

$$\ddot{x} = \ddot{s} \cdot \cos(s/R) - \sin(s/R) \cdot \dot{s}^2 / R,$$

$$\ddot{y} = \dot{s} \cdot \sin(s/R) + \cos(s/R) \cdot \dot{s}^2 / R.$$

Ist s sehr klein, so wird bis auf unendlich kleine Glieder höherer Ordnung $\cos(s/R) = 1$ und $\sin(s/R) = 0$. Ferner haben wir

$$\ddot{x} = \ddot{s}, \quad \ddot{y} = \dot{s}^2 / R = v^2 / R,$$

also

$$T = m\ddot{s} \quad \text{und} \quad N = mv^2 / R,$$

d. h. *die Tangentialkraft ist der Beschleunigung in der Bahn proportional. Die Normalkraft ist dem Quadrate der Geschwindigkeit direct, dem Krümmungsradius indirect proportional.*

§ 5. Die Arbeit und kinetische Energie.[1])

Bewegt sich ein Massentheilchen in Folge einer Kraft S längs eines Weges ds, dessen Richtung mit der Richtung der Kraft S zusammenfällt, so leistet die Kraft die Arbeit Sds. Schliessen die Bewegungsrichtung und die Richtung der Kraft den Winkel Θ ein, so ist an Stelle der Kraft S ihre Componente nach der Bewegungsrichtung zu nehmen; es ist also dann die Arbeit $Sds\cos\Theta$. Bewegt sich der Körper in einer gegebenen Bahn $s_0 s$ unter dem Einfluss der Tangentialkraft T, so ist die längs eines Elementes ds geleistete Arbeit Tds, und die Arbeit längs des Weges $s_0 s$ ist durch das Integral $\int_{s_0}^{s} Tds$ ausgedrückt. Wird die Geschwindigkeit mit v bezeichnet, so ist $v = ds/dt$ und $T = m\ddot{s} = m\dot{v}$. Hieraus folgt, dass

$$\text{(a)} \qquad \int_{s_0}^{s} Tds = \int m\dot{v}v\,dt = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2,$$

wenn v_0 die Geschwindigkeit in der Anfangslage s_0 des Körpers ist. Das Product $\frac{1}{2}mv^2$ aus der halben Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit giebt die *kinetische Energie* des Körpers an. Nach der Gleichung (a) ist *der Zuwachs an kinetischer Energie gleich der von der Tangentialkraft geleisteten Arbeit* oder gleich der von der Gesammtkraft geleisteten Arbeit, da für die Berechnung der letzteren nach der oben gegebenen Definition nur die in der Richtung der Bahn wirkende Componente der Gesammtkraft zu berücksichtigen ist.

Es seien α, β, γ die Winkel, welche ds mit den Coordinatenaxen bildet, und X, Y, Z die Componenten der Kraft T, so gelten die Gleichungen

$$T = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma,$$

$$ds\cos\alpha = dx, \quad ds\cos\beta = dy, \quad ds\cos\gamma = dz.$$

Die Elementarbeit längs der unendlich kleinen Strecke ds ist dann

$$Xdx + Ydy + Zdz.$$

[1]) Die kinetische Energie bezeichnet man auch als actuelle Energie oder lebendige Kraft.

Die Gleichung (a) nimmt dann die Form

(b) $$\int (X dx + Y dy + Z dz) = \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2$$

an. Diese Gleichung kann man in manchen Fällen mit Vortheil anwenden, besonders dann, wenn die Kraft durch die Coordinaten allein bestimmt ist. Ist auch zugleich die Bahn gegeben, so kann man mit Hülfe der Formel (b) die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn ermitteln.

1. *Beispiel.* Die xz-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems sei horizontal, die positive y-Axe sei vertical nach oben gerichtet. Auf den Körper mit der Masse m, der sich im Anfangspunkte des Systems befindet, soll nur die Schwerkraft wirken, deren Componenten

$$X = o, \quad Y = -mg, \quad Z = o$$

sind. Wir haben also

$$\int (X dx + Y dy + Z dz) = -mg(y - b),$$

wenn der Körper im Punkte $y = b$ seine Bewegung beginnt. Es ist ferner nach (b)

(c) $$v^2 = v_0^2 - 2g(y - b).$$

Die Geschwindigkeit ist demnach allein durch die y-Coordinate bestimmt. Dieser Fall ist im § 2 behandelt.

2. *Beispiel.* Die Kraft sei eine Function des Abstandes von einem festen Punkte.

Die Kraft wirke abstossend und sei eine *Centralkraft*, d. h. ihre Richtung gehe beständig durch einen festen Punkt O, welcher der Coordinatenanfangspunkt sein soll. Die Componenten der Kraft, welche im Punkte (x, y, z) wirkt, sind

$$X = f(r) \cdot x / r, \quad Y = f(r) \cdot y / r, \quad Z = f(r) \cdot z / r.$$

Ferner ist

$$\int (X dx + Y dy + Z dz) = \int \frac{f(r)}{r} (x dx + y dy + z dz).$$

Da $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und also $r dr = x dx + y dy + z dz$ ist, so wird die Arbeit, welche die Kraft bei der Bewegung des Körpers vom Punkte A bis zum Punkte B leistet gleich $\int_{r_0}^{r} f(r) dr$, wenn r_0 und r bezw. die Abstände der Punkte A und B vom Punkte

O sind. Die Geschwindigkeiten in den Punkten A und B seien bezw. v_0 und v, so ist

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{r_0}^{r} f(r)\, d r.$$

Die Zunahme der kinetischen Energie ist demnach allein von r_0 und r abhängig, und folglich von der Gestalt der Bahn unabhängig. Die allgemeine Bedingung dafür, dass die geleistete Arbeit allein von der Anfangs- und Endlage des Körpers abhängig ist und vom durchlaufenen Wege unabhängig ist, soll im nächsten Paragraphen gegeben werden.

§ 6. Die bei der Bewegung eines Körpers in einer geschlossenen Bahn geleistete Arbeit.

Wenn ein Körper unter dem Einfluss einer Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, eine geschlossene Bahn $ABCD$ (Fig. 6) beschreibt, so ist in dem Ausdrucke für die von der Kraft geleistete Arbeit

(a) $$\int (X d x + Y d y + Z d z),$$

das Integral längs der ganzen Bahn zu erstrecken. Wenn der Körper von A aus mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der

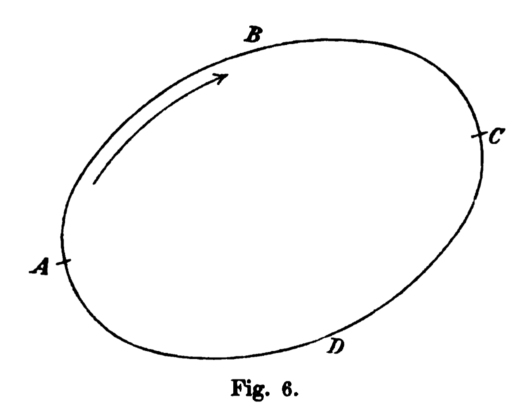


Fig. 6.

durch den Pfeil angegebenen Richtung die geschlossene Bahn durchläuft und mit der Geschwindigkeit v nach A zurückkehrt, so ist die Arbeit gleich

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Ist $v > v_0$, so ist die kinetische Energie bei der Bewegung hervorgebracht, und die kinetische Energie muss stetig wachsen, wenn die Bewegung fortgesetzt wird. Ist dagegen $v < v_0$, so wird die kinetische Energie hervorgebracht, wenn der Körper in entgegengesetzter Richtung auf dem Wege $ADCB$ die Bahn durchläuft. Die Erfahrung lehrt jedoch, dass ein Körper unter dem Einfluss der von festen Punkten ausgehenden Kräfte beim Durchlaufen einer geschlossenen Bahn zur Ausgangsstelle A mit derselben kinetischen Energie zurückkehrt, welche beim Fortgange von A vorhanden war. Es ist also wichtig zu untersuchen, welchen Bedingungen die Kraftcomponenten unterworfen sein müssen, damit das über eine geschlossene Bahn erstreckte Integral (a) Null ist, d. h. wann die kinetische Energie bei der Bewegung in einer geschlossenen Bahn nach der Rückkehr zum Ausgangspunkte der Bewegung weder vermehrt noch vermindert ist.

Ist das über eine geschlossene Bahn $ABCD$ erstreckte Integral (a) gleich Null, d. h. ist

$$\int^{ABC}(X dx + Y dy + Z dz) + \int^{CDA}(X dx + Y dy + Z dz) = 0,$$

wo durch die am Integralzeichen befindlichen Buchstaben angedeutet werden soll, dass das erste Integral längs ABC, das zweite längs CDA zu erstrecken ist, so wird

$$\int^{ABC}(X dx + Y dy + Z dz) = \int^{ADC}(X dx + Y dy + Z dz).$$

Ist die Arbeit, die beim Uebergang von einem Punkte zu einem anderen geleistet wird, unabhängig von der Bahn und nur abhängig von den Endpunkten der Bewegung, so sind die Componenten X, Y, Z eindeutige und stetige Functionen des Ortes.

Bevor die allgemeinen Bedingungen dafür abgeleitet werden, dass die von einer Kraft geleistete Arbeit allein vom Anfangs- und Endpunkte der Bewegung abhängig ist, bestimmen wir die Arbeit für den Fall, dass die von der Bahn umschlossene Fläche unendlich klein ist. Durch den Punkt O (Fig. 7), dessen Coordinaten x, y, z sind, ziehen wir die Linien Ox, Oy, Oz parallel den Coordinatenaxen, deren positive Richtungen in folgender Weise bestimmt werden. Streckt man die rechte Hand in Richtung der positiven x-Axe aus, so soll die Normale

auf der inneren Handfläche die Richtung der positiven y-Axe, und der Daumen die Richtung der positiven z-Axe angeben. Eine positive Drehung um die x-Axe ist diejenige, bei welcher

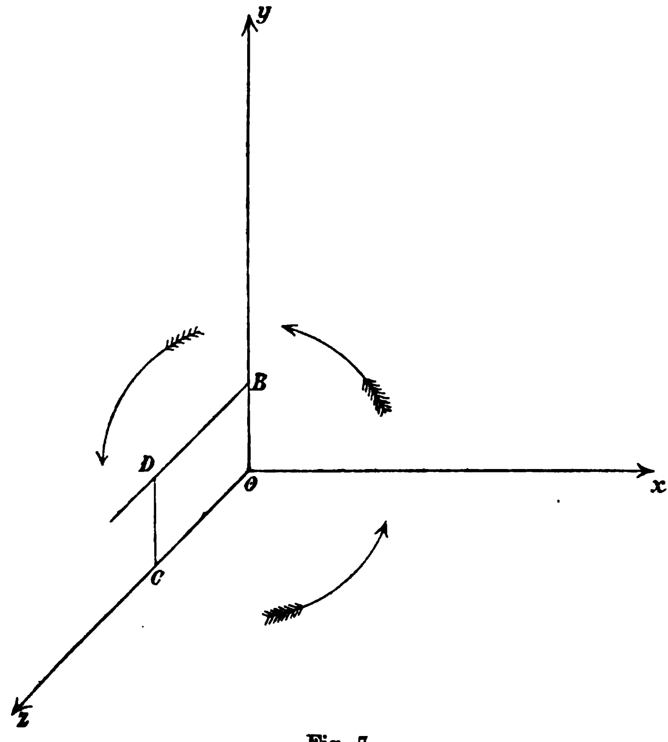


Fig. 7.

die $+ y$-Axe auf dem kürzesten Wege in die Lage der $+ z$-Axe gebracht wird. Diese Regel giebt bei cyklischer[1]) Vertauschung der Buchstaben x, y, z die Richtungen der positiven Umdrehungen um die y- und um die z-Axe. Ist $OBDC$ ein Rechteck in der yz-Ebene, so erfolgt der positive Umlauf auf dem Wege $OBDCO$. Diese Festsetzungen über das Vorzeichen der

[1]) D. h. tritt x an die Stelle von y, so tritt y an die Stelle von z und z an die Stelle von x.

Drehungsrichtungen sollen auch im Folgenden gelten. Ist $OB = dy$, so ist die Arbeit bei der Ueberführung des Körpers von O bis B gleich Ydy. Geht der Körper von B bis D, so ist die geleistete Arbeit $(Z + \partial Z / \partial y . dy) dz$. Auf dem Wege DC wird die Arbeit $-(Y + \partial Y / \partial z . dz) dy$ und auf dem Wege CO wird die Arbeit $-Zdz$ geleistet. Die gesammte geleistete Arbeit ist demnach

$$(\partial Z / \partial y - \partial Y / \partial z) dy dz.$$

Allgemein ist die von der Kraft geleistete Arbeit beim Umlauf des Körpers um ein Flächenelement dS_x, welches der yz-Ebene parallel ist,

$$F . dS_x = (\partial Z / \partial y - \partial Y / \partial z) dS_x. \tag{b}$$

In derselben Weise erhält man

$$G . dS_y = (\partial X / \partial z - \partial Z / \partial x) dS_y;$$
$$H . dS_z = (\partial Y / \partial x - \partial X / \partial y) dS_z.$$

F, G und H sind die Arbeiten, welche beim Umlaufen des Körpers um eine im Punkte O bezw. zur x-, y- und z-Axe senkrechte Flächeneinheit geleistet werden.

Ist $OABC$ (Fig. 8) ein unendlich kleines Tetraëder, dessen drei Kanten OA, OB, OC den Coordinatenaxen parallel sind und bewegt sich der Körper auf der Begrenzung der Fläche ABC in der durch die Reihenfolge der Buchstaben angegebenen Richtung, so ist die geleistete Arbeit gleich derjenigen, welche erforderlich ist, um den Körper zunächst um OAB, sodann um OBC und endlich um OCA zu bewegen. Hierbei werden die Strecken AB, BC, CA in derselben positiven Richtung durchlaufen. Dagegen bewegt sich der Körper je zweimal längs OA, OB, OC in entgegengesetzten Richtungen, und die dabei geleistete Arbeit ist also Null. Die beim Umlauf des Körpers um die Fläche $ABC = dS$ geleistete Arbeit ist also

$$J . dS = F . dS . l + G . dS . m + H . dS . n, \tag{c}$$

wo l, m, n die Cosinus der Winkel sind, welche die vom Tetraëder nach aussen gerichtete Normale der Fläche dS mit

den Coordinatenaxen bildet. Es ist demnach die beim Umlauf des Körpers um die Flächeneinheit geleistete Arbeit J

(d) $$J = Fl + Gm + Hn,$$

wo l, m und n die Lage der Flächeneinheit bestimmen.

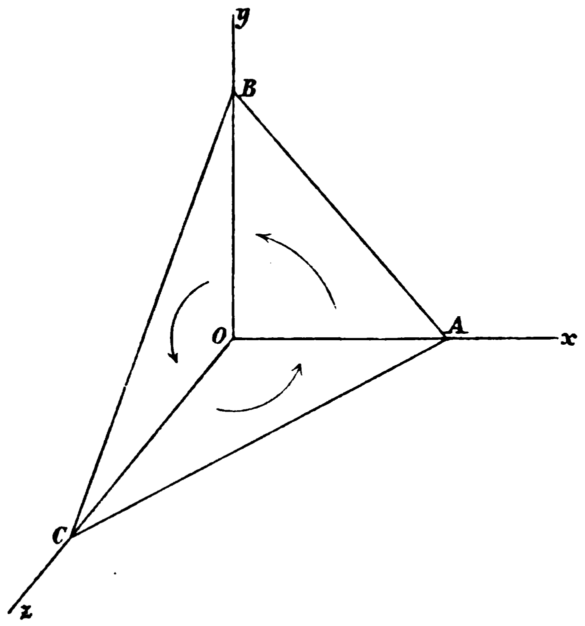


Fig. 8.

Soll die beim Umlauf des Körpers um eine unendlich kleine Fläche geleistete Arbeit Null sein, so muss für alle Lagen der Fläche $J = 0$ werden, oder es muss

$$F = G = H = 0,$$

(e) $$\begin{cases} \partial Z / \partial y - \partial Y / \partial z = 0, \quad \partial X / \partial z - \partial Z / \partial x = 0, \\ \partial Y / \partial x - \partial X / \partial y = 0 \end{cases}$$

sein. Sind die Bedingungsgleichungen (e) erfüllt, so ist der Ausdruck unter dem Integral (a) das vollständige Differential einer Function V von x, y, z. X, Y, Z sind die Differentialquotienten der Function V nach x, y, z, also

$$X = \partial V / \partial x, \quad Y = \partial V / \partial y, \quad Z = \partial V / \partial z.$$

Dabei sind die Bedingungsgleichungen (e) erfüllt. Die Function V ist *das Potential* der wirkenden Kräfte; wir erhalten hier zunächst die mathematische Definition dieser Function, deren nach x, y, z genommene Differentialquotienten die Kraftcomponenten X, Y, Z ergeben. Ist V das Potential der wirkenden Kräfte, so ist auch $V' = V + C$, wo C eine Constante bedeutet, das Potential. Denn es ist

$$X = \partial V / \partial x = \partial V' / \partial x \text{ u. s. w.}$$

Das Potential ist also bis auf eine Constante bestimmt, auf deren Bedeutung wir im nächsten Paragraphen zurückkommen.

Sind die Bedingungsgleichungen (e) überall erfüllt, so ist auch die beim Umlauf des Körpers um eine endliche Fläche geleistete Arbeit Null. Die endliche Fläche kann in Flächenelemente zerlegt werden, wie Fig. 9 zeigt. Umkreist der Körper nacheinander alle diese Elemente in derselben Richtung, so ist die gesammte geleistete Arbeit gleich Null. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Kräfte X, Y, Z stetige und eindeutige Functionen des Raumes sind. Jedes vorkommende Linienelement wird zweimal aber in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, eine Ausnahme bilden nur die Linienelemente, welche die Begrenzung der endlichen Fläche bilden.

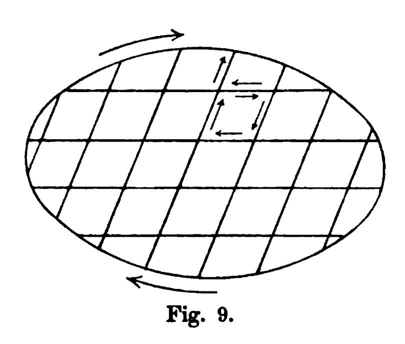


Fig. 9.

Solche Kräfte oder Kraftsysteme, deren geleistete Arbeit unabhängig von dem Wege ist, auf welchem der Körper von seiner Anfangs- zur Endlage übergeführt wird, heissen *conservative Kräfte*. Zu ihnen gehören hauptsächlich diejenigen, welche von einem festen Punkte aus wirken, und deren Grösse nur von dem Abstande vom festen Punkte abhängig ist. Ist demnach die im Punkte P wirkende Kraft nur abhängig von dem Abstande des Punktes P vom Coordinatenanfangspunkte O, d. h. ist dieselbe gleich $f(r)$, so ist $X = f(r) \cdot x / r$, da x / r der Cosinus des Winkels ist, welchen die Linie OP mit der x-Axe bildet. Dementsprechend erhalten wir

$$X = f(x) . x / r, \quad Y = f(r) . y / r, \quad Z = f(r) . z / r.$$

Setzt man $f(r) / r = R$, so wird $X = Rx$, $Y = Ry$, $Z = Rz$. Ferner ist

$$\partial Z / \partial y = dR / dr . yz / r, \quad \partial Y / \partial z = dR / dr . yz / r.$$

Also ist die Bedingungsgleichung

$$\partial Z / \partial y - \partial Y / \partial z = 0$$

erfüllt. Dasselbe gilt für die übrigen Bedingungsgleichungen (e).

Die beim Umlauf des Körpers um eine Fläche geleistete Arbeit ist durch das Integral

$$\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

gegeben. Diese Arbeit wird auch geleistet, wenn der Körper nach einander sämmtliche Flächenelemente dS umkreist, in welche die endliche Fläche zerlegt ist (Fig. 9). Dabei muss die Bewegung stets in demselben Sinne erfolgen. Diese Arbeit ist nach (c) gleich

$$\int (Fl + Gm + Hn) dS.$$

Führt man hier die früher für F, G und H entwickelten Ausdrücke ein, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (a) und (b)

$$\text{(f)} \quad \begin{cases} \int (X . dx / ds + Y . dy / ds + Z . dz / ds) ds \\ \qquad = \int\int [(\partial Z / \partial y - \partial Y / \partial z) l + (\partial X / \partial z \\ \qquad - \partial Z / \partial x) m + (\partial Y / \partial x - \partial X / \partial y) n] dS, \end{cases}$$

wo s die Randcurve der Fläche S ist. l, m, n sind die Richtungscosinus der Normalen des Flächenelementes. Die Gleichung (f) zeigt, dass das Linienintegral längs einer geschlossenen Curve durch ein Flächenintegral über eine Fläche ersetzt werden kann, welche von dieser Curve begrenzt wird. Die Fläche S ist nur der Bedingung unterworfen, dass sie von der Randcurve s begrenzt wird und keine singulären Punkte besitzt. Der in (f) enthaltene Satz ist zuerst von Stokes gefunden.

§ 7. Das Potential.

Wir betrachten nur solche Fälle, wo die Arbeit durch den Anfangs- und Endpunkt der Bewegung vollständig bestimmt ist. Damit dies eintritt, muss

$\partial Z / \partial y = \partial Y / \partial z, \quad \partial X / \partial z = \partial Z / \partial x, \quad \partial Y / \partial x = \partial X / \partial y$
sein. Die Fälle, in welchen diese Gleichungen nicht gelten, schliessen wir von der Betrachtung aus.

Die auf die Masseneinheit 1 g wirkende Kraft habe die Componenten X, Y, Z. Die Masseneinheit befinde sich im Punkte O (Fig. 10), dessen rechtwinklige Coordinaten a, b, c

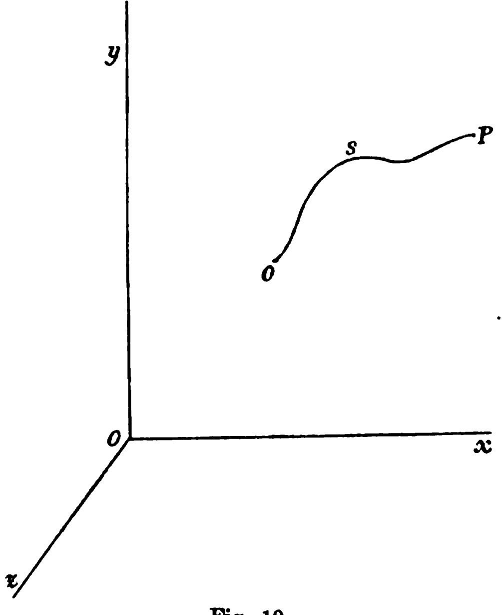


Fig. 10.

sind und bewege sich längs des Weges s von O nach P. Die bei dieser Bewegung von der Kraft geleistete Arbeit V wird

$$\text{(a)} \qquad V = \int_O^P (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = V_P - V_O,$$

vorausgesetzt, dass X, Y, Z die Ableitungen einer und derselben Function V des Ortes sind. Die Arbeit, welche nöthig ist, um die Masseneinheit von einer beliebigen Stelle O nach P zu führen, ist gleich der Differenz der Potentiale V_P und V_O oder gleich der *Potentialdifferenz*. Das *Potential ist demnach stets bis auf eine Constante V_O bestimmt*, und in Uebereinstimmung

damit können nur *Potentialdifferenzen* gemessen werden. Setzen wir willkürlich fest, dass im Punkte O das Potential Null ist, so ist V_P der Werth des Potentials in P. *Das Potential an einer Stelle ist demnach die Arbeit, welche erforderlich ist, um die Masseneinheit von einer Stelle, wo das Potential Null ist, zur betrachteten überzuführen.*

Das Potential V ist eine Function der Coordinaten. Die Gleichung

$$V(x, y, z) = C, \tag{b}$$

wo C eine Constante ist, stellt eine Fläche dar, welche die Punkte vereinigt, nach denen zu der Ueberführung der Masseneinheit von einem Orte aus, wo das Potential Null ist, die gleiche Arbeit C erforderlich ist. Wird C geändert, so erhalten wir ein System solcher Flächen, die als *Niveau-* oder *äquipotentielle Flächen* bezeichnet werden. PP' und QQ' (Fig. 11) seien zwei unendlich benachbarte aus der Schaar dieser Flächen, PP' entspreche dem Werthe V, und QQ' dem Werthe $V + dV$. ds sei das zwischen den Flächen PP' und QQ' liegende Element einer beliebigen Curve. Die in der Richtung von ds wirkende Kraft sei T, dann wird zur Ueberführung der Masseneinheit von P nach Q die Arbeit $T ds$ geleistet; andererseits ist diese Arbeit gleich $V_Q - V_P = dV$, wir erhalten also

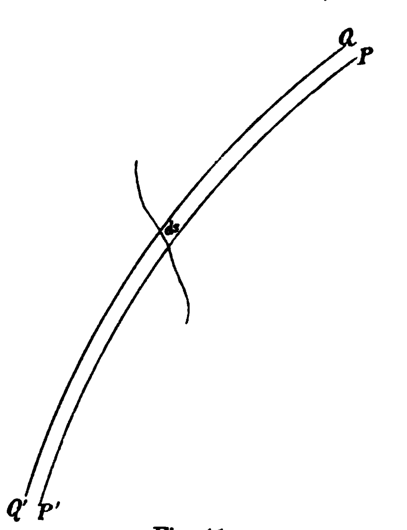


Fig. 11.

$$T . ds = dV \quad \text{oder} \quad T = dV / ds. \tag{c}$$

Durch das Potential wird demnach mit Hülfe der Gleichung (c) die Kraft, welche in einer beliebigen Richtung s wirkt, bestimmt. Da das Linienelement ds eine beliebige Richtung hat, so kann man auch für ds die Elemente dx, dy, dz setzen und erhält dann für die Componenten der wirkenden Kraft

$$X = \partial V / \partial x, \quad Y = \partial V / \partial y, \quad Z = \partial V / \partial z.$$

Nach der Gleichung (c) ist die Kraft dem Elemente ds umgekehrt proportional. Fällt ds der Richtung nach mit der Normale der Fläche PP' zusammen, so ist die Kraft am grössten. Die orthogonalen Trajectorien der Niveauflächen geben also die Kraftrichtung an und heissen dementsprechend „*Kraftlinien*“. Die Tangente der Kraftlinie ist der Kraftrichtung in dem betrachteten Punkte parallel.

Sind P_1 und P_2 zwei unendlich benachbarte Punkte auf derselben Niveaufläche, so ist zur Ueberführung eines Körpers von P_1 nach P_2 keine Arbeit nöthig, denn es ist

$$V_{P_1} - V_{P_2} = 0;$$

die Kraft wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung.

1. Beispiel. *Die Schwerkraft.*

Die xz-Ebene des Coordinatensystems sei horizontal, die positive y-Axe sei vertical nach oben gerichtet, dann ist

$$X = 0, \quad Y = -mg, \quad Z = 0.$$

Demnach wird $V = -mgy$, d. h. die Niveauflächen sind horizontale Ebenen.

2. Beispiel.

Für den in § 5 Beispiel 2 erwähnten Fall, ist die Arbeit

$$V = \int_{r_0}^{r} f(r)\, dr$$

nöthig, um den Körper vom Abstande r_0 bis zum Abstande r vom festen Punkte zu bewegen. Wir haben demnach

$$V = F(r) - F(r_0),$$

und die Niveauflächen sind Kugelflächen, welche das Anziehungscentrum O zum Mittelpunkt haben.

§ 8. Die unfreie Bewegung.

Galilei hat ausser dem freien Fall und der Wurfbewegung auch die Bewegung auf einer schiefen Ebene sowie die Pendelbewegung behandelt. Das letzte Problem hat er jedoch nicht ganz zu lösen vermocht.

Ist ein Körper durch irgend eine Ursache gezwungen, sich in einer gegebenen Bahn zu bewegen, so ist seine Bewegung eine *gebundene* oder *unfreie*.

1. Beispiel. *Die schiefe Ebene.*

Ein Körper D (Fig. 12), welcher sich auf der schiefen Ebene AB befindet, die mit der horizontalen Ebene den Winkel α bildet, gleitet unter dem Einflusse der Schwerkraft die schiefe Ebene AB hinab. Von etwa auftretenden Reibungswiderständen sehen wir ab. Der von der schiefen Ebene ausgeübte Widerstand wirkt in der zur Ebene AB senkrechten

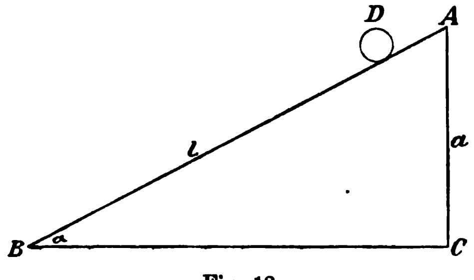


Fig. 12.

Richtung. Man kann zur Discussion der einzelnen Vorgänge den Satz von der kinetischen Energie und Arbeit anwenden. Ist m die Masse des Körpers, v die in B erlangte Geschwindigkeit und g die Beschleunigung der Schwerkraft, so ist

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = m g \sin \alpha \, . \, l,$$

wenn mit l die Länge AB der schiefen Ebene bezeichnet wird und die Bewegung in A ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt. Ist a die Höhe AC der schiefen Ebene, so ist $l \sin \alpha = a$ und die geleistete Arbeit ist $m g a$. Die Geschwindigkeit am Fusse B der schiefen Ebene ist demnach $v = \sqrt{2 g a}$ und gleich der Geschwindigkeit, welche der Körper in C hat, wenn er die Höhe AC frei durchfällt.

Bewegt sich ein Körper in einer Curve AB (Fig. 13) unter dem Einfluss der Schwerkraft, so ergiebt sich wie vorhin, dass die Geschwindigkeit in B durch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in A und durch die Fallhöhe AC bestimmt ist. Man hat nämlich

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = m g a$$

und also

(a) $$v^2 = v_0^2 + 2 g a.$$

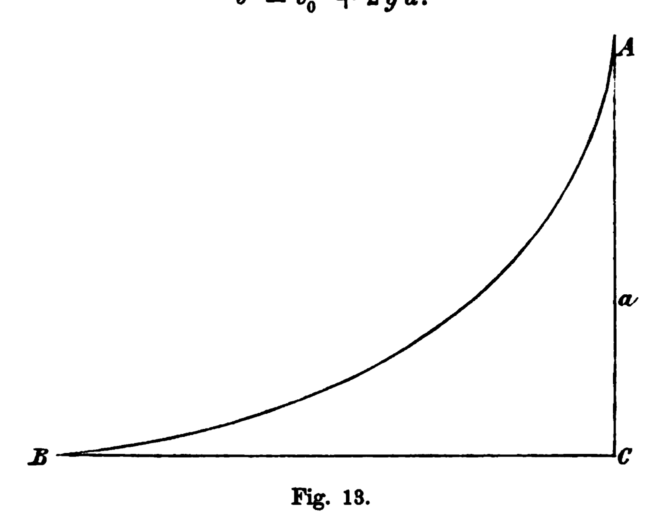


Fig. 13.

Die zur Bewegung von A nach B gebrauchte Zeit t ist

(b) $$t = \int_A^B \frac{ds}{v},$$

wo ds ein Element der Bahn AB ist.

2. Beispiel. *Das Pendel.*

Hängen wir einen Körper A (Fig. 14) am Ende einer gewichtslosen um den Punkt O frei drehbaren Stange von der Länge l auf, so ist derselbe gezwungen, sich auf einer Kugelfläche vom Radius l zu bewegen. Wir wollen die Bewegungen nur für kleine Abweichungen der Pendelstange aus ihrer Gleichgewichtslage betrachten. Zur Zeit $t = 0$ ist der Körper A in Ruhe, er bewegt sich sodann auf dem Kreisbogen $ABCD$ durch den Punkt C, der senkrecht unter O liegt. Wird $OA = l$, $\sphericalangle AOC = \alpha$, $\sphericalangle BOC = \vartheta$ gesetzt und sind AA' und BB' senkrecht zu OC gezogen, so ist die Geschwindigkeit, welche der Körper von A bis B erhalten hat, derjenigen durch den freien Fall von A' bis B' entstandenen gleich. Es ist

$$A'B' = l(\cos\vartheta - \cos\alpha),$$

und die Geschwindigkeit v in B demnach

$$v = \sqrt{2gl(\cos\vartheta - \cos\alpha)}.$$

Ist $v = 0$, also $\vartheta = \pm\alpha$, so ruht die Pendelkugel, sie befindet sich dann in A oder D, wenn $\sphericalangle DOC = \sphericalangle AOC$ ist. Zur

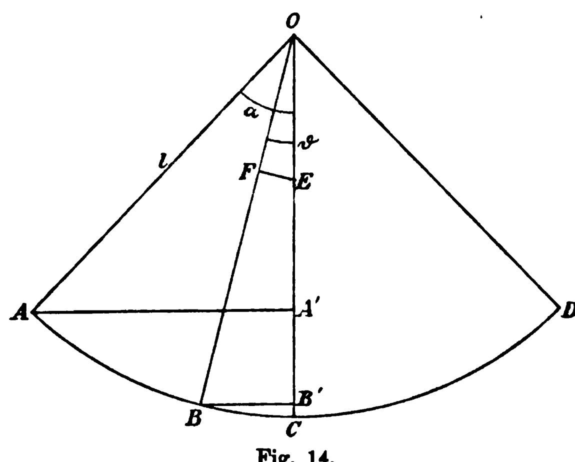


Fig. 14.

Bewegung von A bis B wird die Schwingungszeit t gebraucht, und es ist nach (b)

(c) $$t = -\int_{\alpha}^{\vartheta} l\,d\vartheta / \sqrt{2gl(\cos\vartheta - \cos\alpha)}.$$

Die Integration ist leicht auszuführen, wenn α und also auch ϑ so klein sind, dass man $\cos\vartheta = 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2$ und $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ setzen kann. Denn die Reihe für die Function Cosinus lautet

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$$

Ist x sehr klein, so brauchen wir die Glieder von höherer als der zweiten Ordnung nicht zu berücksichtigen. Unter dieser Voraussetzung erhält man

$$t = \sqrt{l/g}\,.\int_{\vartheta}^{\alpha} d\vartheta / \sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}$$

und durch Integration

(d) $$\vartheta = \alpha\cos(t\sqrt{g/l}).$$

Ist $t\sqrt{g/l} = \frac{1}{2}\pi$, so wird $\vartheta = 0$, und der Körper braucht demnach die Zeit

$$t = \tfrac{1}{2}\pi . \sqrt{l/g},$$

um von A bis zum tiefsten Punkt der Bahn zu gelangen. Die Zeit T, welche zur Bewegung von A bis D gebraucht wird, ist doppelt so gross und heisst *Schwingungsdauer*[1]); wir haben

$$\text{(e)} \qquad T = \pi\sqrt{l/g},$$

d. h. *die Schwingungsdauer wächst proportional der Wurzel aus der Länge des Pendels und ist umgekehrt proportional der Wurzel aus der Beschleunigung der Schwerkraft.*

Die Gleichung (e) gilt nur für sehr kleine Schwingungsbogen. Für endliche Werthe von α ist dagegen zur Berechnung der Schwingungsdauer statt (e) die Formel

$$\text{(f)} \quad T = \pi . \sqrt{\frac{l}{g}} . \left(1 + \left(\frac{1}{1 . 2}\right)^2 \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + \left(\frac{1 . 3}{2 . 4}\right)^2 \sin^4(\tfrac{1}{2}\alpha) + \ldots\right)$$

anzuwenden.

Nur für sehr kleine Schwingungsbogen sind die Pendelschwingungen *isochron*, d. h. unabhängig von der Grösse derselben. Sind die Schwingungsbogen von endlicher Grösse, so wächst die Schwingungsdauer ziemlich schnell mit der Länge des Bogens.

Die Aufgabe kann auch in folgender Weise gelöst werden. Der schwingende Körper mit der Masse m befinde sich im Punkte B, dann wirkt auf ihn in senkrechter Richtung die Kraft mg. Diese Kraft sei durch die Linie OE (Fig. 14) dargestellt. Ist EF senkrecht auf OB, so können OF und FE als die Componenten der Kraft OE betrachtet werden. Die Grösse der Tangentialkraft FE ist $mg \sin\vartheta$. Wird $BC = s$ gesetzt und die Tangentialkraft P positiv gerechnet, wenn sie s zu vergrössern strebt, so hat man

---

[1]) Bei dem betrachteten Pendel, welches Schwingungen in einer Ebene ausführt, pflegt man unter *Schwingungsdauer* T nur die Zeit eines Hin- oder Herganges zu verstehen. Bei anderen periodischen Bewegungen ist die Schwingungsdauer die Zeit, nach welcher der Körper in denselben Bewegungszustand zurückkehrt, d. h. dieselbe Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung erhält, oder die Zeit für einen Hingang und einen Hergang.

$$P = -mg \sin(s/l)$$

und, wenn s als sehr klein vorausgesetzt wird,

$$P = -mgs/l.$$

Die Bewegungsgleichung wird demnach

(g) $$m\ddot{s} = P \quad \text{oder} \quad \ddot{s} = -gs/l.$$

Durch Integration erhält man bei passender Wahl der Constanten

(h) $$s = a\cos\left(t\sqrt{g/l}\right).$$

Diese Gleichung stimmt mit (d) überein.

Ist ein Körper gezwungen, sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, so ist im allgemeinen die Bestimmung der Bewegung des Körpers sehr schwierig. Wir wollen auf die Untersuchung des allgemeinen Falles nicht eingehen und wollen hier nur die Bewegung eines unendlich kleinen Körpers auf einer Kugelfläche betrachten, wenn der Körper während der Bewegung stets sehr nahe dem tiefsten Punkte C der Kugelfläche bleibt und wenn nur die Schwerkraft auf den Körper wirkt. Wir können dann annehmen, dass die Kraft nach dem Punkte C gerichtet ist und der Grösse nach gleich mgs/l ist, wo l den Radius der Kugel angiebt. Hieraus ergiebt sich die in § 3 Beispiel 3 behandelte Bewegung. Die Bahn ist eine Ellipse und die Schwingungszeit ist $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, also unabhängig von der Gestalt und Grösse der Bahn.

§ 9. Kepler's Gesetze.

Wir sind bei der Herleitung der Hauptsätze der allgemeinen Bewegungslehre von den Fallgesetzen Galilei's ausgegangen. Wir wenden uns jetzt zu derjenigen Kraft, als deren Specialfall die Schwere erscheint, und aus deren Eigenschaften die Gesetze der Planetenbewegungen hergeleitet werden können. Anknüpfend an die Hypothese des Kopernikus, dass die Sonne feststeht und die Erde sich einmal um ihre Axe und dann um die Sonne bewegt, hat Kepler die folgenden Gesetze aufgestellt:

1. *Der Radius vector von der Sonne nach dem Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Sectoren.*

2. *Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet.*

3. *Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der halben grossen Axen ihrer Bahnen.*

Analytisch können diese Gesetze folgendermaassen ausgedrückt werden. Es sei S (Fig. 15) das Centrum der Sonne und APQ ein Theil der Planetenbahn. Zur Zeit $t = 0$ sei der Planet in A und zur Zeit t in P. Im nächsten Zeitelement dt gelangt der Planet von P nach Q, und der Radius vector beschreibt den Sector PSQ. Es sei $\sphericalangle ASP = \Theta$, $\sphericalangle PSQ = d\Theta$ und $SP = r$. Die Fläche PSQ ist gleich $\frac{1}{2} r^2 d\Theta$. Da die vom Radius vector beschriebene Fläche in demselben Verhältniss wie die Zeit wächst, so ist $r^2 d\Theta = k\,dt$, wo k eine constante Grösse ist. Aus dem ersten Kepler'schen Gesetze erhalten wir die Gleichung

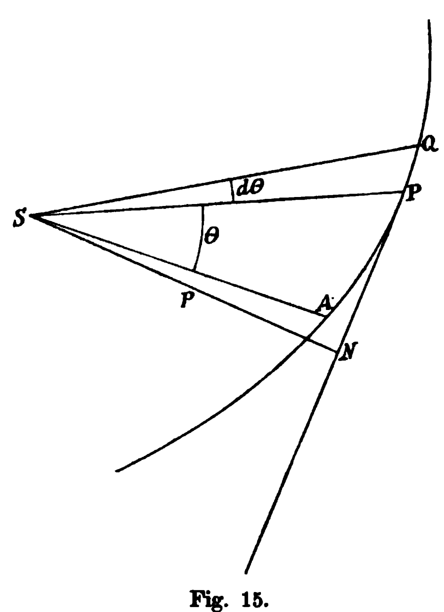


Fig. 15.

(a) $$r^2 . \dot{\Theta} = k.$$

Das erste Kepler'sche Gesetz ist ein specieller Fall eines allgemeinen Satzes, der als *das Princip der Flächen* bezeichnet wird. Dieser Satz lautet: *Geht die Kraft, unter deren Einfluss der Körper seine Bewegung ausführt, von einem festen Punkte aus, so wächst die vom Radius vector beschriebene Fläche mit constanter Geschwindigkeit.* Das erste Kepler'sche Gesetz gilt demnach für alle Centralkräfte.

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ ist nach (a) umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes des Planeten von der Sonne.

Die Geschwindigkeit des Planeten in P sei v. $SN = p$ ist das Loth von S auf die in P an die Bahn gelegte Tangente.

Es sei $PQ = ds$, so ist der Inhalt des Sector PSQ gleich $\frac{1}{2} p\, ds = \frac{1}{2} p\, v\, dt$. Andererseits ist derselbe gleich $\frac{1}{2} r^2 d\Theta = \frac{1}{2} k \,.\, dt$. Demnach wird $p\, v\, dt = k\, dt$ oder $pv = k$, d. h. *die Geschwindigkeiten des Planeten an verschiedenen Punkten der Bahn verhalten sich umgekehrt wie die Abstände der Tangenten in jenen Punkten von der Sonne, dem Anziehungscentrum.*

BPC sei die elliptische Bahn des Planeten (Fig. 16). Im Brennpunkt S befinde sich die Sonne. Der andere Brennpunkt sei F. Die grosse Axe sei $BC = 2a$. SA sei ein willkürlich angenommener Radius vector, welcher mit der grossen Axe den Winkel α bildet.

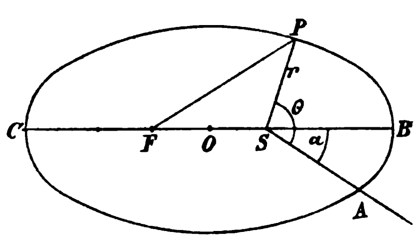


Fig. 16.

Wir setzen $SP = r$, $\sphericalangle ASP = \Theta$. Da $PF + PS = 2a$ ist, so wird $PF = 2a - r$ und demnach

$$(2a - r)^2 = 4a^2 e^2 + r^2 + 4aer\cos(\Theta - \alpha),$$

wenn mit e die *numerische Excentricität* bezeichnet wird, also $FS = 2ae$ ist. Aus der vorigen Gleichung erhalten wir

$$\text{(b)} \qquad 1/r = [1 + e\cos(\Theta - \alpha)]\,/\,a(1 - e^2),$$

als die Bahngleichung in Polarcoordinaten. Nach Gleichung (a) wird $\int \frac{1}{2} r^2 \,.\, d\Theta = \frac{1}{2} k \,.\, T$, wenn die Integration längs der ganzen Bahn erstreckt wird und T die Umlaufszeit ist. Das Integral stellt die Ellipsenfläche $a.b.\pi$ dar, wenn b die kleine Axe ist. Es wird also

$$2\pi ab = k \,.\, T$$

sein. Berücksichtigt man, dass $a^2 = b^2 + a^2 e^2$ ist, so erhält man

$$\text{(c)} \qquad 2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = kT$$

und ferner

$$4\pi^2 a(1 - e^2)\,/\,k^2 = T^2\,/\,a^3.$$

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze ist T^2 / a^3 für verschiedene Planeten constant, es muss also auch

(d) $$\mu = k^2 / a(1-e^2) = 4\pi^2 a^3 / T^2$$

constant sein.

Die Geschwindigkeit v kann in folgender Weise ermittelt werden. S (Fig. 16) sei der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, SA die x-Axe. Es ist $x = r\cos\Theta$ und $y = r\sin\Theta$ und ferner $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Durch die Werthe

(e) $$\dot{x} = \dot{r}\cos\Theta - r\sin\Theta . \dot{\Theta}; \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\Theta + r\cos\Theta . \Theta$$

erhält man

(f) $$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2.$$

Setzt man hier den Werth für $r\dot{\Theta}$ ein, welcher sich aus den Gleichungen (a) und (b) ergiebt, und für $\dot{r}$ den durch Differentiation der Gleichung (b) sich ergebenden Werth, so wird

$$v^2 = \big(1 + 2e\cos(\Theta - \alpha) + e^2\big) . k^2 / a^2(1-e^2)^2.$$

Berücksichtigt man, dass

$$1 + 2e\cos(\Theta - \alpha) + e^2 = 2\big(1 + e\cos(\Theta - \alpha)\big) - (1 - e^2)$$

ist, so ergiebt sich mit Hülfe von Gleichung (b)

$$v^2 = (2/r - 1/a) . k^2 / a(1-e^2),$$

oder durch Einführung der in (d) erklärten Grösse μ

(g) $$v^2 = 2\mu / r - \mu / a.$$

§ 10. Die allgemeine Massenanziehung.

Newton hat die Kraft zu ermitteln versucht, welche auf einen Planeten wirken muss, damit seine Bewegung nach den Kepler'schen Gesetzen erfolgt. Zur Bestimmung der Kraft benutzen wir die Gleichung (g) des § 9. Der Sonnenmittelpunkt sei der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, im Punkte (x, y) befinde sich der Planet. Die Componenten der unbekannten Kraft seien X und Y. Nach dem Satz von der kinetischen Energie (§ 5) ist

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int X\,dx + Y\,dy.$$

Ist v_0 die Geschwindigkeit in der Entfernung r_0, so erhalten wir mit Hülfe der Gleichung § 9 (g)

$$\mu / r - \mu / r_0 = \int X\,dx + Y\,dy.$$

Ist $Xdx + Ydy$ ein vollständiges Differential $d\Phi$, so haben wir

$$X = \partial\Phi / \partial x = \partial(\mu / r)\partial x \text{ und } Y = \partial\Phi / \partial y = \partial(\mu / r) / \partial y.$$
$$X = -\mu / r^2 . \partial r / \partial x = -\mu x / r^3, \quad Y = -\mu / r^2 . \partial r / \partial y = -\mu y / r^3.$$

Die Kraft R, mit welcher die Sonne auf den Planeten wirkt, ist $R = -\mu / r^2$, d. h. *dem Quadrate des Abstandes des Planeten von der Sonne umgekehrt proportional.* Die Grösse μ hat nach der Gleichung § 9 (d) für alle Planeten denselben Werth.

Zu diesem Resultate können wir auch von den allgemeinen Bewegungsgleichungen $\ddot{x} = X$ und $\ddot{y} = Y$ aus gelangen. Die unbekannten Kraftcomponenten X und Y sind durch die Strecken PA und PB (Fig. 17) dargestellt und werden zerlegt in eine

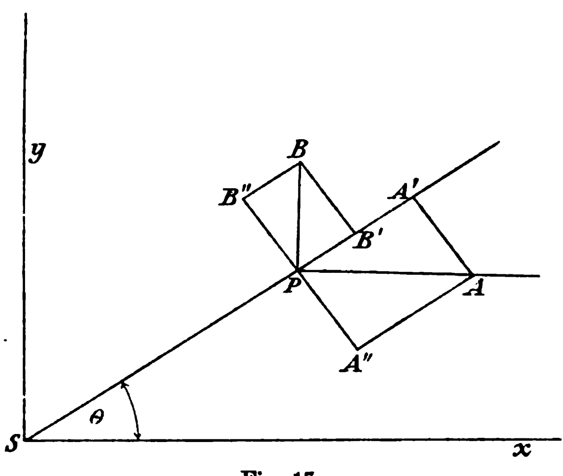


Fig. 17.

Componente R nach der Richtung $SP = r$ und in eine zweite zu SP senkrechte Componente T. Es sei $\sphericalangle PSX = \Theta$. Dann ist

$$R = X\cos\Theta + Y\sin\Theta, \quad T = -X\sin\Theta + Y\cos\Theta.$$

Mit Hülfe der Gleichungen § 9 (e) erhält man

$$\text{(d)} \quad R = \ddot{r} - r\dot{\Theta}^2 \text{ und } T = 2\dot{r}\dot{\Theta} + r\ddot{\Theta} = 1 / r . d(r^2\dot{\Theta}) / dt.$$

Da aber nach dem ersten Kepler'schen Gesetze $r^2\dot{\Theta} = \text{Const.}$

ist, so wird $T = 0$. *Die Anziehungskraft ist also nach der Sonne gerichtet.* Mit Hülfe der Gleichungen § 9 (a) und (b) wird

(e) $$R = -k^2 / a(1 - e^2) r^2 = -\mu / r^2.$$

Wenden wir dieses Resultat auf die Bewegung des Mondes an, so ergiebt sich mit Rücksicht auf § 9 (d)

$$R = -4\pi^2 a^3 / T^2 r^2.$$

Die Mondbahn ist näherungsweise ein Kreis, dessen Radius 60,27 mal so gross ist wie der Erdradius. Setzen wir dementsprechend

$$r = a = 4 . 10^9 . 60{,}27 / 2\pi \text{ cm},$$

so wird die Beschleunigung γ des Mondes gegen die Erde

$$\gamma = 4\pi^2 a / T^2 = 8\pi . 60{,}27 . 10^9 / 2\,360\,600^2 \text{ cm},$$

da die Umlaufszeit des Mondes 27,322 Tage oder 2 360 600 Secunden beträgt. Demnach ist $\gamma = 0{,}27183$ cm. Befände sich der Mittelpunkt des Mondes im Abstande des Erdradius vom Erdmittelpunkt, so würde derselbe unter der Annahme, dass die Kraft umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ist, eine Beschleunigung gleich $0{,}27183 . \overline{60{,}27}^2$ cm $= 987$ cm erhalten. Dieser Werth stimmt so sehr mit demjenigen für die Beschleunigung an der Erdoberfläche überein, dass man zu der Annahme berechtigt ist, die Fallbewegung ist eine Wirkung derselben Kraft, nämlich der Massenanziehung, welche den Mond und die Planeten in ihren Bahnen erhält. Aus der Uebereinstimmung unserer Theorie mit der Beobachtung ergiebt sich, dass das Newton'sche Gesetz wirklich für die Massenanziehung gültig ist.

§ 11. Allgemeine Massenanziehung.

(Fortsetzung.)

Es soll jetzt im Gegensatz zu den vorigen Betrachtungen das Gesetz der Anziehung als bekannt vorausgesetzt und die Bahn des Planeten bestimmt werden, dessen Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ gegeben sind. S sei das Sonnencentrum (Fig. 18), in A befinde sich der angezogene Körper zur Zeit $t = 0$ und AC stelle die Geschwindigkeit v_0 dar, deren Richtung mit der Verlängerung $SA = r_0$ den Winkel $CAD = \varphi$

bildet. Wenn die Beschleunigung, welche die Sonne dem Planeten ertheilt, gleich μ / r^2 gesetzt wird, so erhalten wir

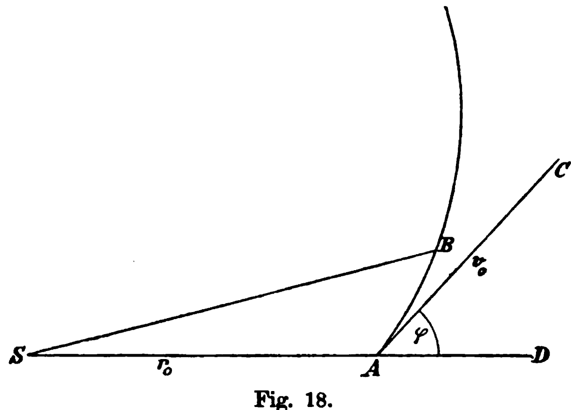


Fig. 18.

bei Benutzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt sich in S befindet, nach § 10 (d)

(a) (b) $\ddot{r} - r\,\dot{\Theta}^2 = -\mu / r^2$ und $1 / r \,.\, d(r^2 \dot{\Theta}) / d\,t = 0,$

weil die Anziehung nach dem Sonnencentrum gerichtet ist. Aus (b) folgt also, dass

(c) $$r^2 \dot{\Theta} = k$$

ist, wo k eine Constante bedeutet. Diese Formel ergab sich aus dem ersten Kepler'schen Gesetze in § 9 (a). Da $r\,\dot{\Theta}$ die zur Richtung von r senkrechte Componente der Geschwindigkeit ist, so erhält man für $t = 0$ auch

(d) $$k / r_0 = v_0 \sin \varphi.$$

Mit Hülfe der Gleichung (c) erhält (a) die Form

$$\ddot{r} - k^2 / r^3 = -\mu / r^2.$$

Wird diese Gleichung mit $2\,\dot{r}\,d\,t$ multiplicirt, so ergiebt sich

$$d(\dot{r}^2) + d(k^2 / r^2) = 2\,d(\mu / r)$$

und durch Integration

$$\dot{r}^2 + k^2 / r^2 = 2\,\mu / r + \text{Const.}$$

In der Anfangslage A ist $v = v_0$ und $\dot{r} = v_0 \cos \varphi$, also wird für $t = 0$

$$v_0^2 \cos^2 \varphi + k^2 / r_0^2 = 2\mu / r_0 + \text{Const.},$$

woraus mit Hülfe von (d) folgt, dass

$$v_0^2 = 2\mu / r_0 + \text{Const.}$$

ist. Demnach haben wir

(e) $$\dot{r}^2 = v_0^2 - 2\mu / r_0 + 2\mu / r - k^2 / r^2.$$

Da die Geschwindigkeit v nach § 9 (f) allgemein durch

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2$$

ausgedrückt wird, so ist mit Berücksichtigung der Gleichungen (c) und (e)

(f) $$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = \mu / r - \mu / r_0.$$

Diese Gleichung entspricht § 9 (g).

Dasselbe Resultat kann auch aus dem Satze von der kinetischen Energie und Arbeit abgeleitet werden. Aus (e) ergiebt sich, dass

(g) $$\dot{r} = \pm \sqrt{v_0^2 - 2\mu / r_0 + 2\mu / r - k^2 / r^2},$$

wo das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn r gleichzeitig wächst oder abnimmt mit t. Infolge von Gleichung (c) ist

$$\dot{\Theta} = k / r^2.$$

Da r und Θ von t allein abhängen, so wird nach (c) und (g)

$$k . d(1/r) / d\Theta = \mp \sqrt{v_0^2 - 2\mu / r_0 + 2\mu / r - k^2 / r^2}$$

sein. Dieses ist die Differentialgleichung der Bahn. Hieraus ergiebt sich, dass

(h) $$d\Theta = d(k/r - \mu / k) / \mp \sqrt{v_0^2 - 2\mu / r_0 + \mu^2 / k^2 - (k/r - \mu / k)^2}$$

ist. Wird $u^2 = v_0^2 - 2\mu / r_0 + \mu^2 / k^2$ gesetzt, so ist

$$\Theta = \arccos(k / ur - \mu / uk) + \alpha,$$

wo α eine Constante ist.

Die Gleichung der Bahn lautet demnach

(i) $$1 / r = \left(1 + ku / \mu \cos(\Theta - \alpha)\right) / (k^2 / \mu).$$

Hier kann u stets positiv genommen werden, da α willkürlich ist.

Die Polargleichung der Kegelschnitte ist

(k) $$1 / r = \left(1 + e \cos(\Theta - \alpha)\right) / a(1 - e^2),$$

welche eine Ellipse, eine Parabel oder einen Hyperbelzweig darstellt jenachdem

$$e < 1, \quad e = 1 \quad \text{oder} \quad e > 1$$

ist. $e = 0$ giebt die Gleichung des Kreises. Aus der Gleichung $e = k u / \mu$, erhalten wir durch Einführung des Werthes u

(l) $$1 - e^2 = (2\mu / r_0 - v_0^2) \,.\, k^2 / \mu^2$$

Nähert sich ein Körper aus unendlicher Ferne der Sonne auf den Abstand r_0, so ist seine Geschwindigkeit v_1 durch die folgende Gleichung bestimmt

$$\tfrac{1}{2} v_1^2 = -\int_{\infty}^{r_0} \frac{\mu \,.\, d r}{r^2} = \frac{\mu}{r_0}\,.$$

Es wird also

(m) $$e^2 = 1 - (v_1^2 - v_0^2) \,.\, k^2 / \mu^2.$$

Die Bahn wird demnach eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem

$$v_0 < v_1, \quad v_0 = v_1 \quad \text{oder} \quad v_0 > v_1$$

ist, d. h. die Bahn des Körpers wird eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel jenachdem die lebendige Kraft, welche dem Planeten im ersten Augenblick ertheilt wird, zu klein ist, um ihn gegen die Sonnenanziehung ins Unendliche zu treiben, oder gerade ausreicht dazu oder noch ein Ueberschuss vorhanden ist.

Durch Vergleichung der Formeln (i) und (k) ergiebt sich, dass

(n) $$a(1 - e^2) = k^2 / \mu.$$

Dies stimmt mit § 9 (d) überein. Aus (m) und (n) folgt ferner, dass

(o) $$\mu = \pm (v_1^2 - v_0^2) \,.\, a.$$

Das obere Vorzeichen wird benutzt, wenn $v_1 > v_0$, das untere wenn $v_1 < v_0$ ist.

Im ersten Falle ergiebt sich aus (o), wenn der Werth für v_1^2 eingesetzt wird,

$$v_0^2 = 2\mu / r_0 - \mu / a.$$

Diese Gleichung ergiebt in Verbindung mit (f)

$$v^2 = 2\mu / r - \mu / a.$$

Diese Gleichung stimmt mit § 9 (g) überein.

§ 12. Das Potential eines Massensystems.

Newton's Gravitationsgesetz ist im Vorhergehenden aus den Kepler'schen Gesetzen unter der Voraussetzung abgeleitet worden, dass die anziehende Kraft vom Sonnenmittelpunkt ausgeht, also gleichsam die ganze Masse der Sonne im Sonnenmittelpunkt concentrirt ist, und dass dasselbe bei den Planeten der Fall ist. Ohne weiteres konnte diese Annahme gemacht werden, wenn der Sonnenradius unendlich klein gegen die Planetenbahnen wäre; da dieses aber nicht der Fall ist, so muss nothwendig untersucht werden, mit welcher Kraft eine in einem gegebenen Raume vertheilte Masse auf einen Körper wirkt. Dieses Problem ist für die einfachsten Fälle schon von Newton selbst gelöst worden. Seine Untersuchungen und die anderer hervorragender Mathematiker haben zu Resultaten geführt, die von grösster Bedeutung für die Physik und Mathematik sind. Die Methode der Behandlung solcher Probleme verdanken wir hauptsächlich Laplace, später haben Poisson, Green, Gauss u. A. die Theorie weiter entwickelt.

In den Punkten A, B, $C\ldots$ mögen sich die Massen m_1, m_2, $m_3\ldots$ befinden (Fig. 19); im Punkte P, dessen Coordinaten x, y, z sind, sei die Masseneinheit concentrirt. Die Kraft, mit welcher die Masseneinheit von m_1 angezogen wird, ist $-fm_1/r_1^2$, wo r_1 der Abstand AP, und f eine von den Einheiten der Masse, Kraft und Länge abhängige Constante ist. A habe die Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1. Die Componenten X_1, Y_1, Z_1 der Kraft, mit welcher P von A angezogen wird, sind dann offenbar

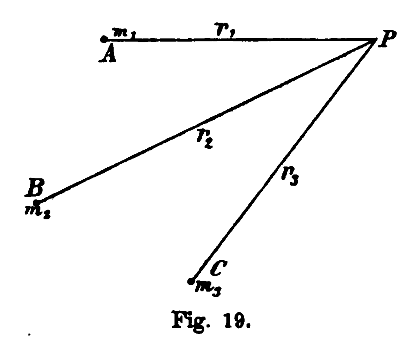


Fig. 19.

$$X_1 = -fm_1/r_1^2 . (x - \xi_1)/r_1 \quad \text{u. s. w.}$$

In derselben Weise werden die Componenten der von den übrigen Punkten B, C u. s. w. ausgehenden Kräfte berechnet. Wird die Summe aller X-Componenten mit X bezeichnet, so ist

$$\text{(a)} \quad X = -f\{m_1(x - \xi_1)/r_1^3 + m_2(x - \xi_2)/r_2^3 + \ldots\ldots\}.$$

Man setze nun

(b) $$V = m_1 / r_1 + m_2 / r_2 + m_3 / r_3 + \ldots\ldots$$

Da aber

$$r_1^2 = (x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2 + (z - \zeta_1)^2$$

und also

$$r_1 \partial r_1 / \partial x = (x - \xi_1) \text{ u. s. w.}$$

ist, so wird

$$\partial V / \partial x = - m_1 (x - \xi_1) / r_1^3 - m_2 (x - \xi_2) / r_2^3 - \ldots\ldots$$

und

(c) $$X = f . \partial V / \partial x.$$

In ganz gleicher Weise kann hergeleitet werden, dass

(d) (e) $$Y = f . \partial V / \partial y \quad \text{und} \quad Z = f . \partial V / \partial z.$$

Die durch die Gleichung (b) definirte Grösse V ist nach § 7 *das Potential des gegebenen Massensystems* für den Punkt P. Ist das Potential gegeben, so bestimmen die Gleichungen (c), (d) und (e) die in den Richtungen der Coordinatenaxen wirkenden Kräfte. Da die Lage des Coordinatensystems aber willkürlich ist, so ist durch V die in jeder Richtung wirkende Kraft gegeben. Dies ist bereits in § 7 gezeigt worden. Die in der Richtung s wirkende Kraft ist also

$$dV/ds = \partial V/\partial x . dx/ds + \partial V/\partial y . dy / ds + \partial V/\partial z . dz/ds.$$

Die Arbeit A, welche die Kraft bei der Bewegung einer Masseneinheit längs einer willkürlich angenommenen Bahn leistet, ist durch

$$A = \int_o^s (X dx + Y dy + Z dz)$$

gegeben, wo o und s bezw. der Anfangs- und Endpunkt der Bahn sind. Werden für X, Y und Z die in den Formeln (c), (d) und (e) angegebenen Werthe eingeführt, und wird das Bahnelement, dessen Projectionen auf die Coordinatenaxen dx, dy dz sind, mit ds bezeichnet, so wird

$$A = f \int_o^s (\partial V/\partial x . dx/ds + \partial V/\partial y . dy/ds + \partial V/\partial z . dz/ds)\, ds = f \int_o^s dV$$

und folglich

(f) $$A = f(V_s - V_o),$$

d. h. durchläuft der Körper eine geschlossene Bahn, so ist die von den Kräften geleistete Arbeit gleich Null (vergl. § 6 und 7). Lassen wir also einen Körper eine geschlossene Bahn unter dem Einflusse der Schwerkraft durchlaufen, so ist die Arbeit, welche die Schwerkraft uns zur Fortbewegung des Körpers leistet, dem absoluten Werthe nach ebenso gross wie die Arbeit, welche wir entgegen der Schwerkraft leisten müssen, um den Körper zum Ausgangspunkt zurückzubringen. Ein Ueberschuss von Arbeit ist nicht vorhanden und daraus erhellt die Unmöglichkeit eines *Perpetuum mobile*, d. h. einer Vorrichtung, welche fortgesetzt Arbeit aus nichts schafft.

Wir haben angenommen, dass die vorhandenen Massen in Punkten concentrirt wären; dieses findet jedoch in der Natur nicht statt. Die Masse ist mehr oder weniger continuirlich im Raume oder auf Flächen vertheilt. Ist die Masse gleichmässig im Raume vertheilt, so ist die in der Raumeinheit enthaltene Masse ϱ die Dichte. Im anderen Falle sei im Punkte P des Raumes eine Kugel mit unendlich kleinem Radius construirt; das Verhältniss der in der Kugel enthaltenen Masse zu ihrem Volumen ist die *Raumdichte* ϱ im Punkte P. Ist die Masse auf einer Fläche vertheilt, so ist die *Flächendichte* σ im Punkte P definirt durch das Verhältniss der innerhalb eines Kreises mit unendlich kleinem Radius um den Punkt P liegenden Masse zur Fläche dieses Kreises.

Die in der Raumeinheit enthaltene Masse sei ϱ, so enthält das Raumelement $d\omega$ die Masse $\varrho\, d\omega$. Das Potential einer räumlich vertheilten Masse ist dann nach der Gleichung (b)

$$\text{(g)} \qquad V = \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, d\omega \,/\, r.$$

Dieses Integral ist über den ganzen mit Masse erfüllten Raum zu erstrecken. r ist der Abstand zwischen $d\omega$ und der Masseneinheit in dem Punkte, für welchen das Potential bestimmt werden soll.

Bisweilen ist es nöthig, die Masse in einer unendlich dünnen Schicht auf einer Fläche vertheilt zu denken. Die auf der Flächeneinheit befindliche Masse sei σ, dann enthält das Flächenelement dS die Masse $\sigma\, dS$. Das Potential nimmt die Form

$$\text{(h)} \qquad V = \int\!\!\int \sigma\, dS \,/\, r \quad \text{an.}$$

Die Bestimmung des Potentials ist in den meisten Fällen nicht ohne weiteres zu bewerkstelligen; im nächsten Paragraphen sollen einige der einfachsten Fälle behandelt werden.

§ 13. Beispiele der Bestimmung eines Potentials.

Die Sonne wie die Planeten haben näherungsweise Kugelgestalt. Unter dieser Voraussetzung kann das Potential derselben leicht berechnet werden, wenn die Dichte ϱ gegeben ist, und man annimmt, dass sie eine Function des Radius ist und also in concentrischen Schichten denselben Werth besitzt.

1. *Das Potential einer unendlich dünnen Kugelschale mit der constanten Oberflächendichte σ.*

ABD (Fig. 20) sei eine Kugel, deren Centrum C und deren Radius R ist. Für den Punkt O soll das Potential bestimmt werden. Man setze

$$OC = r, \quad \sphericalangle OCB = \varphi \quad \text{und} \quad OB = u,$$

so wird

$$V = \int_0^\pi 2\pi R \sin\varphi \,.\, R\, d\varphi \,.\, \sigma / u.$$

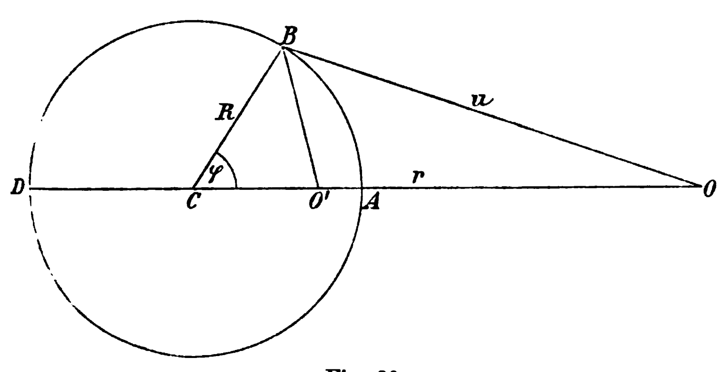


Fig. 20.

Da $u^2 = r^2 + R^2 - 2Rr\cos\varphi$ und demnach $u\,du = Rr\sin\varphi\, d\varphi$ ist, so nimmt das Integral die Form

$$V = \int 2\pi R / r \,.\, u\,du / u \,.\, \sigma = 2\pi R\sigma / r \,.\int du$$

an. Liegt O ausserhalb der Kugel, so wird

$$\int du = (r + R) - (r - R) = 2R,$$

und liegt O' innerhalb der Kugel, so wird

$$\int du = (R + r) - (R - r) = 2r.$$

Bezeichnet man das Potential ausserhalb der Kugel mit V_a, innerhalb der Kugel mit V_i, so wird

$$\text{(a)} \qquad V_i = 4\pi R \sigma; \quad V_a = 4\pi R^2 \sigma / r.$$

Das Potential ist also im Inneren der Kugelschale constant; in den Punkten ausserhalb der Kugelschale ist es umgekehrt proportional dem Abstande vom Kugelcentrum. Das Potential ist demnach für den ganzen Raum durch zwei verschiedene Ausdrücke V_a und V_i dargestellt. An der Oberfläche zeigt das Oberflächenpotential keine Unstetigkeit, denn für $r = R$ wird

$$V_a = V_i = 4\pi R \sigma.$$

Dagegen zeigen die Differentialquotienten an der Oberfläche eine Unstetigkeit. Wir haben

$$dV_a / dr = -4\pi R^2 \sigma / r^2 \quad \text{und} \quad dV_i / dr = 0$$

und also

$$[dV_a / dr]_{r=R} = -4\pi\sigma \quad \text{und} \quad [dV_i / dr]_{r=R} = 0.$$

Eine unendlich dünne Kugelschale übt demnach auf die in ihrem Inneren liegenden Punkte keine Kraft aus. Die Kugel wirkt allein auf äussere Punkte und zwar so, als wenn ihre ganze Masse im Centrum vereinigt wäre. Eine aus lauter homogenen concentrischen Schichten bestehende Vollkugel wirkt demnach auf einen äusseren Punkt so, als ob ihre ganze Masse im Centrum vereinigt wäre. Befindet sich der angezogene Punkt innerhalb der Masse einer Kugelschale, so wird derselbe nach dem Mittelpunkte von den Theilen angezogen, die innerhalb einer mit dem Abstande des Punktes vom Centrum als Radius beschriebenen concentrischen Kugelfläche liegen. Die ausserhalb der erwähnten Kugelfläche liegenden Theile üben keine Wirkung aus.

2. *Das Potential einer Vollkugel.*

Wir berechnen nun das Potential einer Vollkugel, deren Dichte ϱ constant ist. Für äussere Punkte wird

(c) $$V_a = \int_0^R \frac{4\pi R^2 . dR . \varrho}{r} = \frac{4\pi R^3 \varrho}{3r}$$

und für innere Punkte

$$V_i = \int_0^r 4\pi R^2 . dR . \varrho / r + \int_r^R 4\pi R . dR . \varrho = \frac{4\pi}{3} r^2 \varrho + 2\pi \varrho (R^2 - r^2),$$

oder

(d) $$V_i = 2\pi \varrho (R^2 - \tfrac{1}{3} r^2).$$

Auch hier wird das Potential innerhalb und ausserhalb der Kugel durch zwei verschiedene Ausdrücke V_i und V_a dargestellt, aber beide Werthe fallen an der Oberfläche zusammen, denn für $r = R$ hat man für das Raumpotential

$$V_i = V_a = \tfrac{4}{3} \pi R^2 \varrho.$$

Die Function V, welche das Potential einer räumlich vertheilten Masse darstellt, ist demnach im ganzen Raume stetig. Die in Bezug auf r genommenen ersten Differentialquotienten sind

(e) $$d V_i / dr = - \tfrac{4}{3} \pi r \varrho; \quad d V_a / dr = - \tfrac{4}{3} \pi R^3 \varrho / r^2,$$

und diese Werthe werden ebenfalls an der Oberfläche, wo $r = R$ ist, einander gleich, sodass

$$[d V_i / dr]_{r=R} = [d V_a / dr]_{r=R} = - \tfrac{4}{3} \pi \varrho R.$$

Die ersten Derivirten des Potentials einer räumlich vertheilten Masse erleiden demnach an der Oberfläche keine Unstetigkeit, sie sind überhaupt im ganzen Raume stetige Functionen. Dagegen ändert sich die zweite Derivirte desselben Potentials im ganzen inneren und im ganzen äusseren Raume stetig, aber beim Uebergange an der Kugelfläche findet ein Sprung statt. Es hat nämlich $d^2 V / dr^2$ an der Oberfläche zwei Werthe, da

$$[d^2 V_i / dr^2]_{r=R} = - \tfrac{4}{3} \pi \varrho \quad \text{und} \quad [d^2 V_a / dr^2]_{r=R} = + \tfrac{8}{3} \pi \varrho.$$

Nach der Gleichung (e) ist die Kraft ausserhalb der Kugel verkehrt proportional dem Quadrate des Abstandes der Masseneinheit vom Mittelpunkt der Kugel. Dadurch wird die Annahme gerechtfertigt, dass man die Planeten und die Sonne als Punkte behandelt, in denen die gesammte Masse derselben concentrirt ist. Im Inneren der Kugel ist dagegen die Kraft

dem Abstande des angezogenen Punktes vom Centrum proportional. Bringt man die Gleichung (e) in die Form

$$d V_i / d r = - \tfrac{4}{3} \pi r^3 \varrho \,.\, 1 / r^2,$$

so sieht man, dass die Kraft von den Theilen herrührt, deren Abstand vom Centrum kleiner als r ist. Allein dies gilt nur unter der über ϱ gemachten Voraussetzung. Die Dichte ϱ wird nach dem Centrum hin höchst wahrscheinlich wachsen, daher hat die Schwerkraft nicht an der Oberfläche ihren grössten Werth, sondern etwas unterhalb derselben. Dies stimmt mit den Resultaten der Versuche über die Schwingungszeit eines Pendels in einem tiefen Schachte überein.

3. *Das Potential einer Kreisscheibe.*

AB (Fig. 21) sei eine Kreisscheibe mit constanter Oberflächendichte σ; O ist das Centrum, und OP ist die Axe der Scheibe. Der Punkt P, für welchen das Potential bestimmt werden soll, liegt auf der Axe im Abstande x von der Scheibe. Das Potential V ist dann

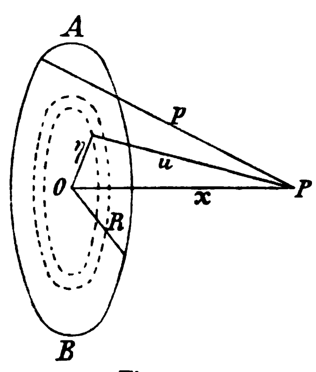


Fig. 21.

$$V = \int_0^R 2 \pi \eta \,.\, d \eta \,.\, \sigma / u,$$

wo R der Radius der Scheibe ist, η und u bezw. die Abstände eines Punktes der Scheibe von O und P sind. Es ist

$$u^2 = \eta^2 + x^2,$$

also $u\,du = \eta\,d\eta$ und demnach

$$V = \int 2 \pi d u \,.\, \sigma = 2 \pi \sigma (p - x),$$

wenn p die Entfernung des Punktes P vom Scheibenrand ist. Wird x nach der einen Seite der Scheibe positiv gerechnet, so ist das Potential für negative Werthe von x

$$V = 2 \pi \sigma (p + x).$$

Demnach ist

$$\text{(f)} \qquad \begin{cases} \text{für } x > o, & V_1 = 2 \pi \sigma (p - x) \\ \text{für } x < o, & V_2 = 2 \pi \sigma (p + x). \end{cases}$$

Ist der Radius der Scheibe unendlich gross gegen x, so kann man

$$V_1 = C - 2\pi\sigma x \quad \text{und} \quad V_2 = C + 2\pi\sigma x$$

setzen, wo C eine unendlich grosse Constante ist, da p unendlich gross ist und σ endlich bleibt.

$$\text{Für } x > o \quad \text{ist} \quad dV_1 / dx = -2\pi\sigma$$

und

$$\text{für } x < o \quad \text{ist} \quad dV_2 / dx = +2\pi\sigma.$$

Beim Durchgange durch die Fläche erfährt also dV/dx, d. h. die Kraft, einen Sprung um $4\pi\sigma$.

4. *Das Potential einer unendlich langen geraden Linie.*

Die Längeneinheit der Linie AB (Fig. 22) enthalte die Masse μ. C sei ein Punkt im Abstande a von AB, und CD sei das von C auf AB gefällte Loth. Das Potential V im Punkte C ist

$$V = 2\int_o^\infty (\mu / r)\, dz$$

$$= 2\mu \int_o^\infty dz / \sqrt{a^2 + z^2},$$

$$V = 2\mu \log\left(z'/a + \sqrt{1 + z'^2/a^2}\right),$$

wo z' unendlich gross gegen a ist. Demnach wird

$$(k) \quad \begin{cases} V = 2\mu \log(2z'/a) \\ \quad = C - \mu \log a^2, \end{cases}$$

wo C eine unendlich grosse Constante ist, wenn z' unendlich gross ist. Wir haben

$$dV/da = -2\mu / a,$$

d. h. *die Kraft ist dem Abstande des betrachteten Punktes C von der geraden Linie umgekehrt proportional.*

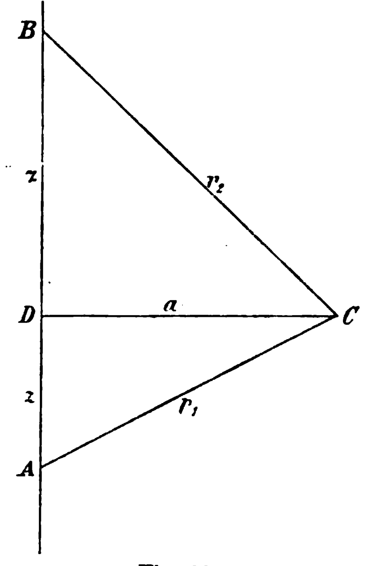


Fig. 22.

5. *Das Potential eines Kreiscylinders.*

Der Kreiscylinder habe die Oberflächendichte σ. Durch den Punkt P, für welchen das Potential bestimmt werden soll, sei senkrecht zur Axe des Cylinders eine Ebene gelegt (Fig. 23).

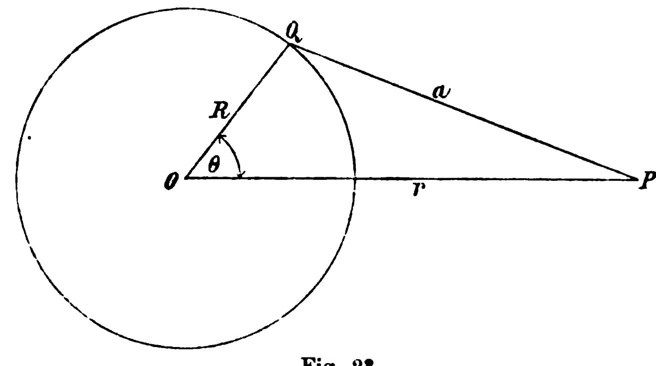


Fig. 23.

R sei der Radius des Cylinderquerschnittes und r der Abstand des Punktes P vom Mittelpunkte des Querschnittes. Wir haben dann nach (k)

$$V = C' - 2R\sigma \int_0^\pi d\Theta \log(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\Theta).$$

Ist wiederum V_a das Potential für einen äusseren Punkt, so wird

$$(1)\quad V_a = C' - 4\pi R\sigma \log r - 2R\sigma \int_0^\pi d\Theta \log(1 - 2\alpha\cos\Theta + \alpha^2),$$

wo $\alpha = R/r < 1$ ist. Betrachtet man, dass

$$\cos\Theta = \tfrac{1}{2}(e^{\Theta i} + e^{-\Theta i})$$

und also

$$1 - 2\alpha\cos\Theta + \alpha^2 = (1 - \alpha e^{\Theta i})(1 - \alpha e^{-\Theta i})$$

ist, so ergiebt sich bei Benutzung der Reihe für den Logarithmus

$$\log(1 - \alpha e^{\Theta i}) = -\alpha e^{\Theta i} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{2\Theta i} - \tfrac{1}{3}\alpha^3 e^{3\Theta i} - \dots$$

$$\log(1 - \alpha e^{-\Theta i}) = -\alpha e^{-\Theta i} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{-2\Theta i} - \tfrac{1}{3}\alpha^3 e^{-3\Theta i} - \dots$$

für $\alpha < 1$

$$\int_0^\pi d\Theta \log(1 - 2\alpha\cos\Theta + \alpha^2) = 0.$$

Alsdann wird

(m) $$V_a = C' - 4\pi R \sigma \log r$$

und ebenso, wenn wir $\alpha = r / R$ setzen $V_i = C' - 4\pi R \sigma \log R$, wo C' eine unendlich grosse Constante ist.

Das Potential ist also im Inneren des Cylinders constant, folglich ist die Kraft daselbst Null. Ausserhalb des Cylinders ist die Kraft durch

(n) $$d V_a / d r = - 4\pi R \sigma / r$$

gegeben, d. h. *die Kraft ist dem Abstande des Punktes von der Cylinderaxe umgekehrt proportional.*

§ 14. Das Gauss'sche Theorem. Die Laplace-Poisson'sche Gleichung.

ABF (Fig. 24) sei eine geschlossene Fläche, $AB = dS$ ein Oberflächenelement derselben, und im Punkte O innerhalb

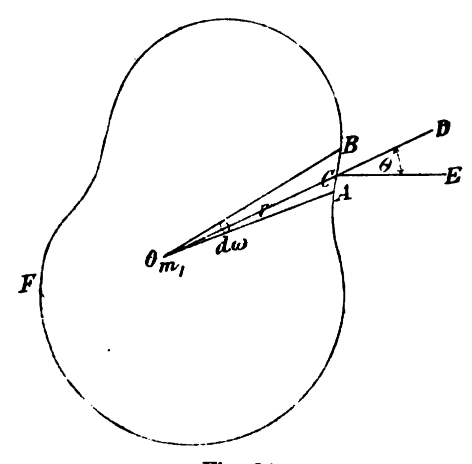


Fig. 24.

der Fläche sei die Masse m_1 concentrirt. Auf dem Elemente dS sei in C die Normale CE construirt. Die Verbindungslinie OC sei r und die Normale CE schliesse mit der Verlängerung von OC den Winkel $DCE = \Theta$ ein. Das von m_1 herrührende Potential in C sei V_1, so ist $V_1 = m_1 / r$. Die im Punkte C in der Richtung CE wirkende Kraft N_1 ist

$$N_1 = \partial V_1 / \partial n,$$

während die ganze in C wirkende Kraft m_1/r^2 ist, deren Richtung mit CO übereinstimmt. Wir haben

(a) $$N_1 = m_1 / r^2 . \cos(\pi - \Theta) = - m_1 / r^2 . \cos \Theta.$$

Beschreibt man um den Punkt O als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius Eins, so begrenzen die nach dem Umfang von dS gezogenen Leitstrahlen auf dieser Einheitskugel ein Oberflächenelement von der Grösse

(b) $$d\omega = dS . \cos \Theta / r^2.$$

Also ist nach (a) und (b)

$$N_1 \, dS = - m_1 / r^2 . \cos \Theta \, dS = - m_1 \, d\omega$$

und

$$\partial V_1 / \partial n . dS = - m_1 \, d\omega.$$

Befinden sich innerhalb der geschlossenen Fläche noch weitere Massen m_2, m_3 u. s. w., so erhalten wir in gleicher Weise

$$\partial V_2 / \partial n . dS = - m_2 \, d\omega, \quad \partial V_3 / \partial n . dS = - m_3 \, d\omega, \ \ldots$$

$V_1, V_2, V_3 \ldots$ seien die bezw. von den Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ herrührenden Potentiale im Punkte C. Für das Gesammtpotential V im Punkte C haben wir

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$$

und also

$$\partial V / \partial n . dS = - (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) \, d\omega.$$

Bezeichnen wir die von der Fläche umschlossene Masse mit Σm, so liefert die Integration über die ganze Fläche

(c) $$\int \partial V / \partial n . dS = - 4 \pi \Sigma m.$$

$\partial V / \partial n$ ist die in der Richtung der Normale der Fläche S wirkende Kraft; $\partial V / \partial n . dS$ bezeichnen wir als die *Kraftströmung*, welche durch das Element dS hindurch geht. Demnach ist *die gesammte durch eine geschlossene endliche Fläche gehende Kraftströmung gleich der Summe der innerhalb der Fläche enthaltenen wirksamen Massen multiplicirt mit* -4π. Wird demnach die gesammte wirkende Masse von der Fläche eingeschlossen, und ist für alle Punkte der Oberfläche $\partial V / \partial n$ gegeben, so kann durch (c) die Summe der Massen bestimmt werden.

Der in (c) ausgesprochene Satz gilt auch dann, wenn wirkende Masse ausserhalb der geschlossenen Fläche liegt. Im

Punkte O' (Fig. 25) ausserhalb der Fläche $ABB'A'$ sei die Masse m' vorhanden. Auf der um O' gelegten Einheitskugel sei das Oberflächenelement $d\omega$ angenommen; die durch die Begrenzung desselben von O' gezogenen Leitstrahlen begrenzen auf der geschlossenen Fläche die Oberflächenelemente $AB = dS$ und $A'B' = dS'$. Die in AB und $A'B'$ nach aussen errichteten Normalen seien bezw. n und n', und in der Richtung

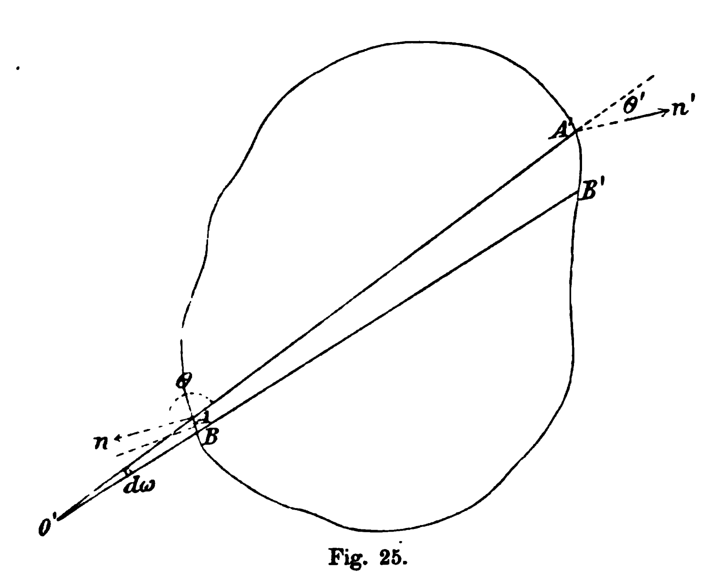


Fig. 25.

derselben wirken die Kräfte: $\partial V' / \partial n$ und $\partial V' / \partial n'$, wenn mit V' das von m' herrührende Potential bezeichnet wird. Werden die Winkel, welche die nach aussen gerichteten Normalen der Fläche mit dem von O' aus gezogenen Leitstrahl bilden, bezw. mit Θ und Θ' bezeichnet und wird $O'A = r$, $O'A' = r'$ gesetzt, so ist

$$\partial V' / \partial n = m' / r^2 . \cos(\pi - \Theta); \quad \partial V' / \partial n' = m' / r'^2 . \cos(\pi - \Theta'),$$
$$dS . \cos(\pi - \Theta) = r^2 d\omega; \quad dS' \cos\Theta' = r'^2 . d\omega,$$

und also

$$\partial V' / \partial n . dS + \partial V' / \partial n' . dS' = 0.$$

Wir haben also

$$\text{d)} \qquad \int \partial V' / \partial n . dS = 0,$$

wenn das Integral über die ganze Fläche erstreckt wird. *Die von einem Punkte ausserhalb einer geschlossenen Fläche ausgehende und die Fläche durchsetzende Kraftströmung ist gleich Null.* Der Werth des Integrales ist also unabhängig von den Massen, die sich ausserhalb der Fläche befinden. Es ist

(e) $$\int \partial V / \partial n . dS = -4\pi M,$$

wenn S eine geschlossene Fläche ist, V das Potential, n die nach aussen gerichtete Normale und M die Summe aller innerhalb der Fläche befindlichen Massen. Dieses Theorem rührt von Gauss her.

Die Gleichung (e) kann noch in eine andere Form gebracht werden. Wir haben

$$\partial V / \partial n = \partial V / \partial x . dx / dn + \partial V / \partial y . dy / dn + \partial V / \partial z . dz / dn$$

und setzen $dx / dn = \lambda$, $dy / dn = \mu$, $dz / dn = \nu$, wo λ, μ und ν die Cosinus der Winkel sind, welche die Normale der Fläche mit den Axen bildet. Dann ergiebt sich

$$\partial V / \partial n = \lambda X + \mu Y + \nu Z.$$

X, Y und Z sind die Kraftcomponenten und f soll gleich 1 gesetzt werden. Nach dem Theorem von Gauss ist sodann

(f) $$\int (X\lambda + Y\mu + Z\nu) dS = -4\pi M.$$

Der Punkt O (Fig. 26) habe die Coordinaten x, y, z; Ox, Oy und Oz seien den Coordinatenaxen parallel und OO' sei ein Parallelepipedon, dessen Kanten den Axen parallel sind. Die in O wirkende Kraft habe die Componenten X, Y, Z. Die Componenten der Kraft in A, dessen Coordinaten $x + dx, y, z$ sind, werden $X + \partial X / \partial x . dx$, $Y + \partial Y / \partial x . dx$, $Z + \partial Z / \partial x . dx$. Wir wenden das Theorem von Gauss auf die Oberfläche des Parallelepipeds an. Die an der Oberfläche OA' wirkende Normalkraft ist gleich $-X$, die an der Fläche AO' wirkende ist $+X + \partial X / \partial x . dx$. Ebenso ist die an OB' wirkende Normalkraft gleich $-Y$ und die an BO' wirkende gleich $Y + \partial Y / \partial y . dy$. Aehnliches gilt für die z-Coordinate. Wir haben also

$$\begin{aligned}\int \partial V / \partial n . dS = \iiint & [-X dy dz + (X + \partial X / \partial x . dx) dy dz] \\ & + [-Y dx dz + (Y + \partial Y / \partial y . dy) dz dx] \\ & + [-Z dx dy + (Z + \partial Z / \partial z . dz) dx dy],\end{aligned}$$

oder

$$\int \partial V / \partial n \,.\, dS = \int\int\int (\partial X / \partial x + \partial Y / \partial y + \partial Z / \partial z)\, dx\, dy\, dz.$$

In dem betrachteten Raumelemente OO' sei die Masse M von der Dichte ϱ vorhanden, sodass $M = \varrho\, dx\, dy\, dz$. Dann wird nach (e)

(g) $$\partial X / \partial x + \partial Y / \partial y + \partial Z / \partial z = -4\pi\varrho,$$

oder

(h) $$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 + 4\pi\varrho = 0.$$

Wegen der häufigen Anwendung dieser Gleichung in der mathematischen Physik brauchen wir für die Summe der ersten

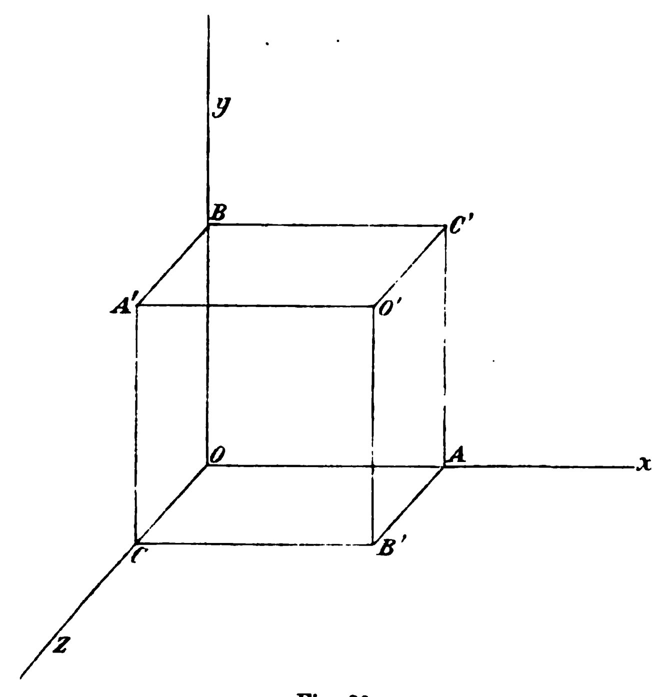


Fig. 26.

Ableitungen einer Function f nach den drei Coordinaten das Zeichen

$$\nabla f = \partial f / \partial x + \partial f / \partial y + \partial f / \partial z$$

und für die Summe der zweiten Ableitungen nach denselben Variablen das Zeichen

$$\nabla^2 f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2.$$

Die Gleichung (h) lautet dann in dieser Bezeichnung

$$\text{(i)} \qquad \nabla^2 V + 4\pi\varrho = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung, die zuerst von Poisson aufgestellt ist, kann man die Dichte bestimmen, wenn das Potential bekannt ist. Befindet sich keine Masse in dem betrachteten Raume, d. h. ist $\varrho = 0$, so wird

$$\text{(k)} \qquad \partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = \nabla^2 V = 0.$$

Diese Gleichung ist zuerst von Laplace abgeleitet worden. Sie ergiebt sich auf einem kürzeren Wege in folgender Weise. Wir gehen aus von

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

wo ξ, η und ζ Constante sind und finden dann

$$\partial(1/r)/\partial x = -(x - \xi)/r^3, \quad \partial^2(1/r)/\partial x^2 = -1/r^3 + 3(x - \xi)^2/r^5.$$

Analoge Ausdrücke gelten für $\partial^2(1/r)/\partial y^2$ und $\partial^2(1/r)/\partial z^2$. Addirt man die rechten und die linken Seiten dieser Gleichungen, so wird

$$\partial^2(1/r)/\partial x^2 + \partial^2(1/r)/\partial y^2 + \partial^2(1/r)/\partial z^2 = 0.$$

Da das Potential $V = \Sigma m/r$ [§ 12 (b)] ist, so haben wir demnach

$$\nabla^2 V = 0.$$

Die Gleichung von Poisson kann auch noch auf folgende Weise gefunden werden. Die Dichte im Punkte P des Raumes sei ϱ. Man beschreibt mit dem unendlich kleinen Radius R eine Kugel, welche den Punkt P umgiebt. Die Dichte im Inneren der Kugel sei constant. Das Potential V im Punkte P besteht aus zwei Theilen V_i und V_a; V_a rührt von der Masse her, die ausserhalb der Kugelfläche mit dem Radius R liegt, und V_i von der Masse innerhalb der Kugelfläche. Man hat dann

$$V = V_a + V_i.$$

Liegt P im Abstande r vom Kugelmittelpunkt, so hat man nach § 13 (d)

$$\text{(k')} \qquad V_i = 2\pi\varrho(R^2 - \tfrac{1}{3}r^2); \quad V = V_a + 2\pi\varrho(R^2 - \tfrac{1}{3}r^2).$$

Haben der Kugelmittelpunkt und P bezw. die Coordinaten ξ, η. ζ und x, y, z, so ist

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Durch Differentiation nach x ergiebt sich

$$\partial(r^2)/\partial x = 2(x-\xi) \text{ und } \partial^2(r^2)/\partial x^2 = 2,$$

also wird

$$\nabla^2 r^2 = 6$$

und nach der Gleichung (k′)

$$\nabla^2 V = \nabla^2 V_a - 4\pi\varrho.$$

V_a ist aber das Potential, welches von Massen herrührt, die ausserhalb der betrachteten Kugel liegen, und es ist daher

$$\nabla^2 V_a = 0 \text{ und } \nabla^2 V + 4\pi\varrho = 0.$$

Dieses ist aber die Gleichung von Poisson.

An den Stellen des Raumes, wo ϱ unendlich gross ist, verliert die Poisson'sche Gleichung ihre Bedeutung. In diesem Falle gehen wir zur Grundgleichung (e) zurück. Es sei z. B. die Masse auf einer Fläche S mit der Oberflächendichte σ ausgebreitet. Auf einem Elemente dS werden die Normalen ν_i und ν_a auf beiden Seiten von S construirt. Ueber dem Elemente dS denken wir uns zu beiden Seiten der Fläche gerade Cylinder mit den Höhen $d\nu_i$ und $d\nu_a$ construirt; die Seitenlinien dieser Cylinder sind Kraftlinien. Auf den von den Cylindern gebildeten Raum wenden wir die Gleichung (e) an und erhalten

$$\partial V_i/\partial\nu_i . dS + \partial V_a/\partial\nu_a . dS = -4\pi\sigma dS,$$

wo V_i und V_a die Werthe des Potentials auf beiden Seiten der Fläche sind. Wir haben demnach

$$\text{(l)} \qquad \partial V_i/\partial\nu_i + \partial V_a/\partial\nu_a + 4\pi\sigma = 0.$$

Diese Gleichung findet in der Electricitätslehre Anwendung.

Durch Vergleichung der Formeln (e) und (h) ergiebt sich die Relation

$$\text{(m)} \qquad \int\int\int \nabla^2 V dx\,dy\,dz = \int\int \partial V/\partial n . dS,$$

wenn berücksichtigt wird, dass

$$M = \int\int\int \varrho\, dx\,dy\,dz$$

ist. Das dreifache Integral in (m) muss über den von der Fläche S begrenzten Raum erstreckt werden, das zweite Integral

über die Fläche S. Dieser Satz lässt sich auch durch theilweise Integration beweisen.

§ 15. Beispiele für die Anwendung der Gleichungen von Laplace und Poisson.

Das Potential V im Punkte x, y, z ist eine Function der drei Ortscoordinaten und hat nach den früheren Betrachtungen in der Regel die Form

(a) $$V = \int\int\int \varrho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, / \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

wo die Dichte ϱ im Punkte (ξ, η, ζ) eine Function der Coordinaten ist.

Wir können aber auch die Differentialgleichung

(b) $$\nabla^2 V + 4\pi\varrho = 0$$

zum Ausgangspunkt der Bestimmung des Potentials nehmen; dadurch erhalten wir oft auf einem bequemeren Wege das gesuchte Resultat. ϱ soll als Function von x, y und z gegeben sein. Das Integral von (b) ist durch (a) gegeben, wir werden aber oft V durch directe Integration der Poisson'schen Gleichung bequemer finden können.

Bei den Lösungen der Aufgaben über das Potential sind besonders die Grenzbedingungen zu berücksichtigen, welche zur Bestimmung der Functionen dienen, die mittelst Integrationen erhalten werden. Es sollen die Bedingungsgleichungen aufgestellt werden, welchen das Potential V_i innerhalb einer geschlossenen Fläche S und das Potential V_a ausserhalb derselben genügen müssen, wenn die Fläche S alle vorhandene Masse von der Dichte ϱ einschliesst, und ausserhalb der Fläche S sich gar keine Masse befindet. Wir wenden auf den von S umschlossenen Raum die Poisson'sche Gleichung an, und es ist also

(c) $$\nabla^2 V_i + 4\pi\varrho = 0.$$

Ausserhalb der Fläche S haben wir

(d) $$\nabla^2 V_a = 0.$$

Ist O ein willkürlicher Punkt innerhalb S, P ein Punkt ausserhalb S und wird $OP = r$ gesetzt, so ist, wenn r sehr grosse Werthe annimmt,

(e) $$V_a = M / r,$$

wo M die ganze von S umschlossene Masse angiebt. Demnach wird für $r = \infty$ das Potential $V_a = 0$ und

(f) $$\lim (r V_a)_{r=\infty} = M,$$

d. h. das Produkt $r V_a$ nähert sich, wenn der Punkt P in das Unendliche rückt, dem endlichen Grenzwerthe M.

Sind P_1 und P_2 zwei Punkte, die auf verschiedenen Seiten der Fläche S einander unendlich nahe liegen, so muss das Potential in beiden Punkten gleich gross sein, es ist also längs der ganzen Fläche S

(g) $$\overline{V_i} = \overline{V_a}.$$

Der über V gezogene Strich soll andeuten, dass der Werth von V an der Fläche S selbst betrachtet ist.

Aus § 14 (l) folgt ferner, dass für die Punkte der Oberfläche, wo $\sigma = 0$ ist,

(h) $$\overline{\partial V_i} / \partial \nu = \overline{\partial V_a} / \partial \nu,$$

wenn $\nu = -\nu_i = \nu_a$ die Normale von S bezeichnet. Das Potential ist dabei überall endlich.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass ϱ nirgend unendlich ist. Für die Stellen, wo $\varrho = \infty$ wird, erhält man andere Bedingungsgleichungen, die leicht aus dem Vorhergehenden abgeleitet werden können. Ist z. B. σ die Oberflächendichte auf einer Fläche S, in der ϱ also unendlich gross ist, und ist $\varrho = 0$ für alle übrigen Punkte im Raume, so hat man nach der früheren Bezeichnung

$$\nabla^2 V_i = 0 \quad \text{und} \quad \nabla^2 V_a = 0,$$

aber

(i) $$\overline{V_i} = \overline{V_a}, \quad \overline{\partial V_i} / \partial \nu_i + \overline{\partial V_a} / \partial \nu_a + 4 \pi \sigma = 0$$

für alle Punkte der Oberfläche S.

Hiernach soll das Potential bestimmt werden, wenn die Dichte ϱ innerhalb einer Kugel mit dem Radius R constant ist. Ausserhalb der Kugel soll $\varrho = 0$ sein. V_i ist das Potential innerhalb, V_a ausserhalb der Kugel. Dann wird

$$\nabla^2 V_i + 4 \pi \varrho = 0, \quad \nabla^2 V_a = 0.$$

Es ist aber

$$\partial V / \partial x = d V / d r \, . \, x / r,$$

$$\partial^2 V / \partial x^2 = d^2 V / d r^2 \, . \, x^2 / r^2 + d V / d r \, . \, 1 / r - d V / d r \, . \, x^2 / r^3.$$

Solche Gleichungen gelten auch für die Ableitungen von V nach den Variablen y und z. Wir haben dann

$$\nabla^2 V = d^2 V / dr^2 + 2 / r \,.\, dV / dr.$$

Da aber

$$d(rV)/dr = r\,dV/dr + V \text{ und } d^2(rV)/dr^2 = r\,d^2V/dr^2 + 2\,dV/dr,$$

so wird

(l) $$\nabla^2 V = 1 / r \,.\, d^2(rV) / dr^2.$$

Die Differentialgleichungen, denen V_i und V_a genügen müssen, sind also

(m) $$d^2(rV_i) / dr^2 + 4\pi\varrho r = 0, \quad d^2(rV_a) / dr^2 = 0.$$

Hieraus erhält man durch Integration

$$rV_i + \tfrac{2}{3}\pi\varrho r^3 = Cr + C' \text{ und } V_a = C_1 + C_1' / r.$$

Für $r = \infty$ ist $V_a = 0$, also wird $V_a = C_1' / r$.

Da V_i nicht für $r = 0$ unendlich sein kann, so ist $C' = 0$ und demnach

$$V_i + \tfrac{2}{3}\pi\varrho r^2 = C.$$

Da die Kraft eine stetige Function der Coordinaten ist, also längs der ganzen Oberfläche

$$\overline{dV_i} / dr = \overline{dV_a} / dr$$

wird, so haben wir für $r = R$ auch

$$\tfrac{4}{3}\pi\varrho R = C_1' / R^2.$$

Es ist aber $C_1' = \frac{4}{3}\pi\varrho R^3$, demnach

(n) $$V_a = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho / r.$$

Da $V_i = V_a$ für $r = R$ ist, so wird $C = 2\pi R^2 \varrho$ und also

(o) $$V_i = 2\pi\varrho(R^2 - \tfrac{1}{3}r^2).$$

Diese Formeln stimmen mit § 13 (c) und (d) überein.

Ist das Potential vom Abstande des betrachteten Punktes von einer geraden Linie abhängig, so wird diese zur z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes gewählt. Der Abstand des Punktes, für welchen das Potential bestimmt werden soll, von der z-Axe sei r. Es ist dann $r^2 = x^2 + y^2$ und ferner

$$\partial V / \partial x = dV / dr \,.\, x / r;$$

$$\partial^2 V / dx^2 = x^2/r^2 \,.\, d^2V / dr^2 + 1/r \,.\, dV / dr - x^2/r^3 \,.\, dV / dr$$

u. s. w. Also wird

(p) $$\nabla^2 V = d^2V / dr^2 + 1/r \,.\, dV / dr = 1/r \,.\, d(r\,dV / dr) / dr.$$

Haben wir einen unendlich langen Kreiscylinder mit dem Radius R und der Oberflächendichte σ, so ist, wenn die Cylinderaxe zur z-Axe genommen wird,

$$\text{(q)} \qquad \nabla^2 V_i = 0 \text{ und } \nabla^2 V_a = 0$$

und zugleich für $r = R$

$$\text{(r)} \qquad \overline{V_i} = \overline{V_a}, \quad dV_a / dr - dV_i / dr = -4\pi\sigma.$$

Aus den Gleichungen (p) und (q) folgt

$$d(r\,dV_i / dr) / dr = 0 \text{ und } d(r\,dV_a / dr) / dr = 0.$$

Demnach ist

$$dV_i / dr = C_1 / r \text{ und } dV_a / dr = C_2 / r,$$

$$V_i = C_1 \log r + C_1' \text{ und } V_a = C_2 \log r + C_2'.$$

C_1 muss gleich Null sein, da in den Punkten der Cylinderaxe keine Kraft wirkt. Für $r = R$ ist ferner

$$C_1' = C_2 \log R + C_2'.$$

Nach der Gleichung (r) ist

$$C_2 = -4\pi R\sigma$$

und also

$$V_i = C_2' - 4\pi R\sigma \log R; \quad V_a = C_2' - 4\pi R\sigma \log r.$$

Diese Gleichungen stimmen mit den in § 13 (m) gegebenen überein.

§ 16. Action und Reaction. Aufbau der Körper aus Molecülen und Atomen.

Im Vorhergehenden ist die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss gegebener Kräfte behandelt worden; über den Ursprung der Kräfte ist dagegen bis jetzt nichts erwähnt. Ein Körper, auf welchen keine Kräfte wirken, bewegt sich nach dem Satze vom Beharrungsvermögen in gerader Richtung mit constanter Geschwindigkeit fort. Eine Veränderung in der Bewegung kann nur durch eine äussere Ursache hervorgebracht werden. Die Erfahrung lehrt, dass ein Körper in der Nähe eines anderen seine Bewegung ändert, und wir müssen daher annehmen, dass in der Wechselwirkung der Körper auf einander der Grund für Bewegungsänderungen zu suchen ist. Zunächst ist die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern zu

betrachten; dadurch erhalten wir die Mittel zur Untersuchung des allgemeinen Falles, in welchem drei oder mehrere Körper auf einander wirken. Die Wechselwirkung kann eine verschiedene sein. Stossen zwei Körper zusammen, so ändern sie ihre Bewegung, ebenso wenn die Körper an einander hingleiten. In beiden Fällen hat eine Berührung stattgefunden. Oft wirken auch die Körper auf einander, ohne dass sie sich berühren, so zieht z. B. ein Magnet ein Stück Eisen oder ein Stück geriebenen Bernsteines eine Feder an. Den ersten ernstlichen Versuch, diese Wechselwirkungen oder sogen. Fernewirkungen zu erklären, verdanken wir Descartes, der von der Annahme ausging, dass der ganze Raum mit kleinsten in Bewegung begriffenen Theilchen angefüllt wäre, durch deren Stoss gegen die sichtbaren Körper, die beobachteten Bewegungen entstehen.

Demnach würde es eine Hauptaufgabe der Physiker sein, die Gesetze des Stosses aufzufinden. Descartes hat dies auch versucht, allein ohne Erfolg. Erst am Schlusse des 17. Jahrhunderts fanden fast zu derselben Zeit Huygens, Wallis und Wren diese Gesetze. Eine in Bewegung begriffene Kugel vermag eine ruhende in Bewegung zu versetzen; die bewegte Kugel hat also in sich eine bestimmte Energie. Der Stoss sei ein centraler, d. h. die Bewegungsrichtung falle mit der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte zusammen. Eine Kugel von Eisen wirkt auf die ruhende Kugel stärker als eine gleich grosse mit derselben Geschwindigkeit sich bewegende Holzkugel. Von zwei gleich grossen Kugeln aus derselben Masse wirkt diejenige stärker, welche die grössere Geschwindigkeit hat. Die Kraft, welche die bewegte Kugel in sich hat, wächst demnach in gleichem Verhältniss sowohl mit der Masse als auch mit der Geschwindigkeit derselben. Das Product aus der Masse und der Geschwindigkeit eines Körpers giebt ein Maass für die dem Körper innewohnende Kraft und wird als *Bewegungsmenge* oder *Bewegungsquantität* bezeichnet.

Das Hauptresultat, zu welchem Huygens, Wallis u. A. gelangten, war folgendes: Stossen zwei Körper zusammen, so erhalten sie beide gleich grosse Bewegungsmengen in entgegengesetzten Richtungen, oder sie wirken auf einander mit gleich grossen aber entgegengesetzt gerichteten Kräften. Die *Wirkung*

und die *Gegenwirkung* sind also gleich gross und entgegengesetzt gerichtet.

Dieser Satz ist einer der wichtigsten in der Naturlehre und wir untersuchen, mit welchem Rechte wir ihn aufstellen. Er ist zuerst aus den Beobachtungen über den Stoss abgeleitet, ohne dass dabei ersichtlich ist, in wie weit er für andere Wechselwirkungen zwischen Körpern gelten muss. Newton erkannte zuerst in dem Satze ein allgemeines Naturgesetz, welches immer dann Anwendung findet, wenn Körper auf einander einwirken. Durch sorgfältige Versuche über den Zusammenstoss verschiedener Körper (Stahl, Glas, Wolle, Kork) hat er gefunden, dass die Wirkung und Gegenwirkung gleich gross sind, wenn Rücksicht auf den Einfluss der Luft genommen wird. Um zu untersuchen, ob dasselbe Gesetz auch bei Fernwirkungen gilt, liess er einen Magneten und ein Stück Eisen je auf einem Stück Kork auf dem Wasser schwimmen. Das Eisen und der Magnet näherten sich einander und blieben nach dem Zusammenstoss in Ruhe, also waren die Kräfte, mit welchen sich Magnet und Eisen gegenseitig anzogen, entgegengesetzt gerichtet und gleich. Dass bei Anziehung oder Abstossung zwischen zwei Körpern die Action und Reaction gleich sind, zeigte er ferner noch durch folgende Ueberlegung. Sind zwei Körper, die auf einander einwirken, fest mit einander verbunden, so müssten sie beide, wenn die Action und Reaction nicht gleich gross wären, sich in der Richtung bewegen, in welcher die grössere Kraft wirkt; dieses widerspricht indessen dem Trägheitsgesetze.

Nach Newton ist dieses Gesetz auf mannigfache Weise bestätigt worden und für die Richtigkeit desselben haben viele Entdeckungen in der Physik neue Beweise geliefert. Das Gesetz, dessen allgemeine Gültigkeit nicht bezweifelt werden kann, hat selbst in manchen Fällen zu neuen Entdeckungen geführt.

Die einfachste Vorstellung über den Bau der Körper ist diejenige, nach welcher die Körper aus discreten Massentheilen zusammengesetzt sind, für deren Wechselwirkung das Gesetz von Action und Reaction ebenfalls gilt. Von dieser Anschauung ausgehend hat Newton die Wirkung der Schwerkraft berechnet. Die Schwerkraft ist eine Function des Abstandes; ihre Stärke ist also bei unverändertem Abstande dieselbe.

Auch auf anderen Gebieten hat jene Vorstellung vom Bau der Körper zu wichtigen Resultaten geführt. Indessen lassen sich in manchen Fällen die Verhältnisse noch nicht übersehen. Die Chemie lehrt uns, dass die Körper aus Molecülen bestehen, welche selbst Gruppen von kleineren Massentheilen oder Atomen sein können. Diese Molecüle haben sicher einen sehr zusammengesetzten Bau und die Wechselwirkungen zwischen ihnen müssen daher, besonders wenn ihre Abstände gross zu ihren Dimensionen sind, sehr complicirter Natur sein. Darüber wissen wir bis jetzt sehr wenig. Wir werden uns im Folgenden auf die Betrachtungen der Bewegungen von Theilchen beschränken, die auf einander mit Kräften wirken, welche allein Functionen der gegenseitigen Abstände der Massentheile sind.

§ 17. Der Schwerpunkt.

Auf alle Theile eines Körpers wirkt die Schwerkraft; die Richtung derselben kann für alle Theile desselben Körpers als parallel betrachtet werden. Die Wirkungen der Schwerkraft auf alle Massentheilchen eines Körpers können zu einer Resultirenden zusammengesetzt werden, deren Angriffspunkt im *Schwerpunkte* liegt. Ist der Schwerpunkt mit dem Körper fest verbunden und unterstützt, so bleibt der Körper in jeder Lage im Gleichgewicht. Da die Schwerkraft der Masse proportional ist, so ist der Schwerpunkt identisch mit dem *Massenmittelpunkt.* Die im Schwerpunkte angreifende Resultirende ist das *Gewicht des Körpers.* Der geradlinige zweiarmige Hebel ist im Gleichgewicht, wenn man in seinem Schwerpunkte eine seinem Gewichte gleiche Kraft in entgegengesetzter Richtung wirken lässt; die Theilchen auf der einen Seite des Schwerpunktes tragen ihres Gewichtes wegen ebenso stark zur Umdrehung bei wie die Theilchen auf der anderen Seite.

In den Punkten A und B (Fig. 27) befinden sich die Massen m_1 und m_2, welche die Geschwindigkeiten AA' und BB' haben. Der Punkt C werde auf der Verbindungslinie AB so bestimmt, dass $m_1 AC = m_2 BC$ ist. Dann heisst C der *Schwerpunkt* der beiden Massen m_1 und m_2. Wird der Punkt C' auf der Verbindungslinie $A'B'$ so bestimmt, dass $m_1 A'C' = m_2 B'C'$ ist, so kann CC' als die *Geschwindigkeit des*

Schwerpunktes betrachtet werden. Sind AD und BE gleich gross und parallel zu CC', so kann die Geschwindigkeit AA' der Masse m_1 in die Componenten AD und DA' zerlegt werden. In derselben Weise wird die Geschwindigkeit BB' in die Componenten BE und EB' zerlegt. Da nun

$$m_1 / m_2 = BC / AC = B'C' / A'C'$$

ist, so sind die Dreiecke $A'C'D$ und $B'C'E$ ähnlich und die Seiten $A'D$ und $B'E$ sind parallel. Ferner ist

$$m_1 / m_2 = B'E / A'D.$$

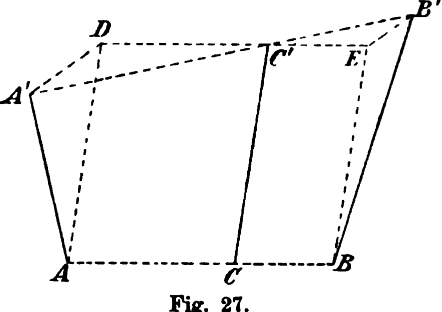


Fig. 27.

Die Geschwindigkeit der Massen kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus der Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes und aus zwei Geschwindigkeiten v_1 und v_2, die parallel gerichtet und umgekehrt proportional mit den Massen sind, also

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Stellen also oa und ob (Fig. 28) die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 dar und wird ab durch den Punkt c in die Theile ac und bc zerlegt, die sich umgekehrt wie die Massen verhalten, so stellt oc die Geschwindigkeit des Schwerpunktes dar, und ca und cb sind die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 in Bezug auf den Schwerpunkt. Die Zerlegung der Geschwindigkeit ist ausgeführt, weil durch die äusseren Kräfte allein die Geschwindigkeit des Schwerpunktes geändert wird.

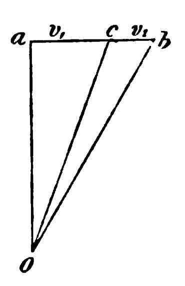


Fig. 28.

Werden die Bewegungsmengen zerlegt und zusammengesetzt wie Kräfte, so ist nach Fig. 28 *die Bewegungsmenge des Schwerpunktes,* in dem beide Massen vereinigt gedacht sind, gleich der Resultante der Bewegungsmengen der einzelnen Massen m_1 und m_2. Die Bewegungs-

menge $m_1 . \overline{oa}$ wird in $m_1 \overline{oc} + m_1 \overline{ca}$ zerlegt, und die Bewegungsmenge $m_2 \overline{ob}$ wird in $m_2 \overline{oc} + m_2 \overline{cb}$ zerlegt. Es sind aber $m_1 \overline{ca}$ und $m_2 \overline{cb}$ gleich gross, aber der Richtung nach entgegengesetzt. Demnach bleibt als Bewegungsmenge

$$m_1 \overline{oc} + m_2 \overline{oc} = (m_1 + m_2) \overline{oc}.$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bleibt unverändert, wenn die Körper m_1 und m_2 nach dem Gesetze der Action und Reaction auf einander wirken. In diesem Falle erhalten beide Körper in derselben Zeit gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Bewegungsmengen, welche sich einander aufheben. Analytisch kann dieses folgendermaassen hergeleitet werden. Haben die Massenpunkte m_1 und m_2, deren Verbindungslinie zur x-Axe genommen wird, die Coordinaten x_1 und x_2, und sind die x-Componenten der Kräfte, mit welchen die Massen auf einander wirken, X_1 und X_2, so gelten die Bewegungsgleichungen

(a) $$m_1 \ddot{x}_1 = X_1 \quad \text{und} \quad m_2 \ddot{x}_2 = X_2 .$$

Daraus folgt durch Addition

(b) $$d^2 (m_1 x_1 + m_2 x_2) / d t^2 = X_1 + X_2 .$$

Da X_1 und X_2 von der gegenseitigen Einwirkung der Massen auf einander herrühren, so sind sie gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt, also ist

$$X_1 + X_2 = 0.$$

Setzen wir

(c) $$m_1 x_1 + m_2 x_2 = (m_1 + m_2) \xi ,$$

so ist

$$\xi = 0, \quad \xi = \text{Const.}$$

Der durch die ξ-Coordinate bestimmte Punkt bewegt sich demnach mit constanter Geschwindigkeit ξ. ξ ist die x-Coordinate des Schwerpunktes, weil

$$m_1 (x_1 - \xi) = m_2 (\xi - x_2)$$

ist. Differenziiren wir in der Gleichung (c) nach t, so wird

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = (m_1 + m_2) \dot{\xi}.$$

Daraus ergiebt sich, *dass die Bewegungsmenge des Schwerpunktes gleich der Summe der Bewegungsmengen der einzelnen Massen ist.*

Nach dem Newton'schen Gesetze wirken zwei Massen m_1 und m_2 auf einander mit einer Kraft $-f m_1 m_2 / r^2$, wo r der Abstand der beiden Massen ist. Die Bewegung kann in folgender Weise bestimmt werden. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und die Geschwindigkeiten der Massen in Bezug auf den Schwerpunkt werden aus den Geschwindigkeiten der Massen bestimmt. Die letzteren wirken mit Kräften auf einander, die nach dem Schwerpunkte gerichtet sind, und diesen kann man deshalb als den anziehenden Punkt betrachten. Ist r_1 der Abstand der Masse m_1 vom Schwerpunkt, so ist

$$m_1 r_1 = m_2 (r - r_1)$$

und also

$$m_2 r = (m_1 + m_2) r_1 .$$

Demnach erhalten wir für die wirkende Kraft den Ausdruck

$$f m_1 m_2^3 / (m_1 + m_2)^2 r_1^2 .$$

m_1 bewegt sich also um den Schwerpunkt, wie wenn von diesem die Kraft ausgeht und in ihm sich eine anziehende Masse $M_1 = m_2^3 / (m_1 + m_2)^2$ befindet.

§ 18. Ein materielles System.

Wir betrachten nun ein System von einander getrennten Massen im leeren Raume, die auf einander mit Kräften wirken, die nur Functionen des Abstandes der Massen sind, und dem Gesetze von Action und Reaction Genüge leisten. Die Kräfte, welche in solcher Weise im System wirken, heissen *innere Kräfte*. Auf das System können auch *äussere Kräfte* wirken, die von Körpern herrühren, welche nicht dem Systeme angehören. Die Massen werden mit m_1, m_2, m_3 u. s. w. bezeichnet, und die Oerter der Massen sind durch die Coordinaten x, y, z mit zugehörigem Index bestimmt. Wir können den Ort des Massensystems dadurch bestimmen, dass wir die einzelnen Massen in Masseneinheiten uns aufgelöst denken; die Mittelwerthe ξ, η, ζ der x, y, z-Coordinaten werden dann

$$\text{(a)} \qquad \xi = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots) / (m_1 + m_2 + \ldots)$$

u. s. w. ξ, η, ζ sind die Coordinaten des *Schwerpunktes des Massensystems*. Wird in den Gleichungen (a) nach der Zeit t differenziirt, so zeigt sich, dass die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in

einfacher Weise von den Geschwindigkeiten der Massentheilchen abhängt. Es ist nämlich

(b) $\xi = (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3 + \ldots) / (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)$

u. s. w.

Die inneren Kräfte können die Bewegung des Schwerpunktes nicht verändern, da nach dem Satze der Action und Reaction zwei Massen sich gegenseitig entgegengesetzt gleiche Bewegungsmengen ertheilen, deren Projectionen also auf eine beliebige Axe die Summe Null ergeben.

Geometrisch wird dieses folgendermaassen ausgedrückt. Von einem willkürlich gewählten Punkte O (Fig. 29) aus werden die Linien Oa, Ob, Oc u. s. w. gezogen, welche der Richtung und Grösse nach die Geschwindigkeiten der Massen m_1, m_2, m_3 u. s. w. darstellen. Sind dann in den Punkten a, b, c u. s. w. bezw. die Massen m_1, m_2, m_3 u. s. w. angebracht und ist p der Schwerpunkt der Massen, so ist Op die Geschwindigkeit des Schwerpunktes.

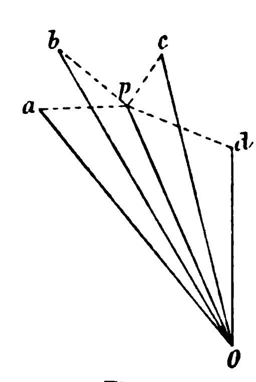


Fig. 29.

Zur Bestimmung der Bewegung des einzelnen Massentheilchens muss man die auf dasselbe wirkenden Kräfte kennen. Werden die Componenten der äusseren auf die Masse m_a wirkenden Kräfte mit X_a, Y_a, Z_a bezeichnet, ist F_{ab} die Kraft, mit welcher m_a von m_b angezogen wird, und ist ferner r_{ab} der Abstand derselben zwei Massen, so ist die x-Componente der auf m_a wirkenden Kräfte

$$X_a + F_{ab} \cdot (x_a - x_b) / r_{ab} + F_{ac}(x_a - x_c) / r_{ac} + \ldots$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man für m_b, m_c u. s. w. Demnach ist

(c) $m_a \ddot{x}_a = X_a + F_{ab} \cdot (x_a - x_b) / r_{ab} + F_{ac} \cdot (x_a - x_c) / r_{ac} + \cdots$

u. s. w. Da nach dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung

$$F_{ab} = F_{ba}, \quad F_{ac} = F_{ca}$$

u. s. w., so wird

$$
\text{(d)} \quad \begin{cases} d^2(m_a x_a + m_b x_b + \ldots)/dt^2 = d^2 \Sigma m x / dt^2 \\ \quad = X_a + X_b + \ldots = \Sigma X. \end{cases}
$$

Führen wir nun die Coordinaten des Schwerpunktes ein, so wird mit Rücksicht auf die Gleichung (a)

$$(m_a + m_b + m_c + \ldots)\ddot{\xi} = X_a + X_b + X_c + \ldots$$

oder

$$\ddot{\xi} \Sigma m = \Sigma X.$$

Diese Gleichung enthält *das Gesetz der Bewegung des Schwerpunktes*, welches aussagt: *Der Schwerpunkt des Massensystems bewegt sich wie ein materieller Punkt, in dem die sämmtlichen Massen des Systems und die Angriffspunkte aller Kräfte vereinigt sind.*

Aus den Bewegungsmengen der einzelnen Massen des Systems wird die Bewegungsmenge des ganzen Systems zusammengesetzt. Von einem Punkte O (Fig. 30) aus wird $OA = m_a v_a$ gezogen und zwar parallel der Richtung der Geschwindigkeit v_a. In derselben Weise werden

$$AB = m_b v_b, \quad BC = m_c v_c$$

u. s. w. construirt. Man gelangt bei Berücksichtigung aller Massentheilchen zu einem Punkte D. Die Strecke OD stellt dann die Bewegungsmenge des Systems dar. Die Summen der Projectionen der Bewegungsmengen auf die Coordinatenaxen sind

$$\Sigma m_s \dot{x}_s, \quad \Sigma m_s \dot{y}_s, \quad \Sigma m_s \dot{z}_s.$$

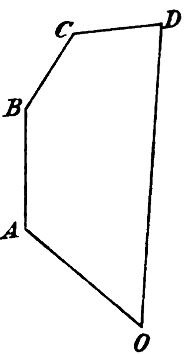


Fig. 30.

Diese sind nach der Gleichung (b) den Componenten der Bewegungsmenge des Schwerpunktes gleich. In einem Zeitelement dt wird die Bewegung der einzelnen Theile durch die Einwirkung der Kräfte verändert; indessen ändern die inneren Kräfte nicht die Bewegungsmenge, denn die Resultante der Bewegungsmengen, welche diese Kräfte hervorbringen, ist Null in Folge des Gesetzes der Action und Reaction. Dagegen ändern die äusseren Kräfte die Bewegungsmenge. Eine Kraft K bringt in dem Zeitelement dt die Bewegungsmenge $K.dt$ hervor. Werden auf diese Weise alle Bewegungsmengen, welche die äusseren

Kräfte hervorbringen, bestimmt und mit den ursprünglich gegebenen zusammengesetzt, so ergiebt sich die vorhandene Bewegungsmenge. Dieses geht auch aus der Gleichung (d) hervor. welcher wir die Form

$$\text{(f)} \quad d(m_a \dot{x}_a + m_b \dot{x}_b + m_c \dot{x}_c + \ldots) = (X_a + X_b + X_c + \ldots) dt$$

geben können.

W. R. Hamilton hat für die Grössen, welche eine Richtung haben und wie Bewegungen, Geschwindigkeiten, Kräfte u. s. w. zusammengesetzt werden, die Bezeichnung *Vector* eingeführt. Die Summe der Vectoren ist die Resultante derselben. Betrachtet man die Bewegungsmengen und Kräfte als Vectoren. so ist der Zuwachs der Bewegungsgrösse, den ein System in der Zeit dt erhält, gleich dem Producte der Resultante der äusseren Kräfte und der Zeit dt. Da die Bewegungsmenge des Systems gleich der Bewegungsmenge des Schwerpunktes ist, so gilt der ausgesprochene Satz auch für die letztere.

§ 19. Das Moment der Bewegungsmenge.

Die Masse m im Punkte A (Fig. 31) bewege sich in der Richtung AB mit der Geschwindigkeit v, ihre Bewegungsmenge ist dann mv. Ist O ein willkürlich angenommener, fester Punkt, $OC = p$ eine Linie, die senkrecht auf AB steht, so heisst das Product mvp das Moment der Bewegungsmenge in Bezug auf O. Der Werth des Momentes ist von der Lage des Punktes O abhängig. Errichtet man auf der durch O und AB bestimmten Ebene in O das Loth und trägt auf diesem von O aus eine Strecke ab. deren Länge mvp proportional ist, so heisst der auf diese Weise bestimmte Vector das *Moment der Bewegungsmenge*. Dieser Vector soll so construirt werden, dass er parallel der Richtung des Daumens ist, wenn die rechte Hand in der Richtung OC liegt und die innere Handfläche nach der Richtung der Kraft liegt.

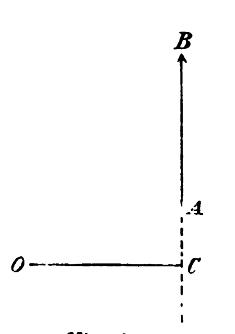


Fig. 31.

Auf dieselbe Weise können alle den Theilen des Systems entsprechenden Vectoren bestimmt und nach der in Fig. 30

angegebenen Methode zusammengesetzt werden. Wirken weder äussere noch innere Kräfte auf die Theile des Systems, so ist das Moment der Bewegungsgrösse des ganzen Systems unveränderlich, da die einzelnen Momente unverändert bleiben. Das Moment der Bewegungsmenge des Systems wird auch nicht durch die inneren Kräfte verändert. Sind z. B. A und B (Fig. 32) zwei Massen m_1 und m_2, die sich mit der Kraft K abstossen, so erhält A dabei in der Zeit dt die Bewegungsmenge $K.dt$ in der Richtung AA', und B dieselbe Menge in entgegengesetzter Richtung. Die Momente der Bewegungsgrössen von A und B heben sich also auf. Dagegen wird das Moment der Bewegungsgrösse im allgemeinen durch die äusseren Kräfte verändert. Ausser dem oben besprochenen Falle wird die Summe der Momente der Bewegungsgrössen auch dann constant bleiben, wenn die Richtungen der sämmtlichen äusseren Kräfte beständig durch den festen Punkt O gehen.

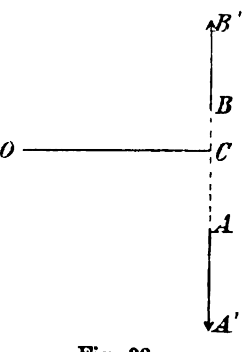


Fig. 32.

Werden demnach die Bewegungsmomente und die Momente der äusseren Kräfte als Vectoren aufgefasst, so ist der Zuwachs des Momentes der Bewegungsgrösse des Systems in der Zeit dt gleich der Resultante der Momente der äusseren Kräfte multiplicirt mit dt.

Analytisch lässt sich dieses folgendermaassen darstellen. Ein Massentheilchen m, das sich in A (Fig. 33) befindet, habe die Componenten der Geschwindigkeit

$$AB = \dot{x} \quad \text{und} \quad AC = \dot{y}.$$

Die Richtung der ersteren hat von der x-Axe den Abstand y, die Richtung der zweiten Componente hat von der y-Axe den Abstand x. Die Momente der Bewegungsmenge in Bezug auf die z-Axe sind demnach

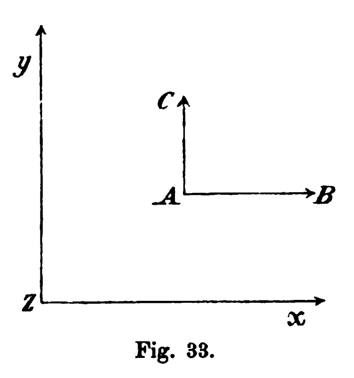


Fig. 33.

$$m\dot{x}y \quad \text{und} \quad m\dot{y}x.$$

Diese sind nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, die Differenz

$$m x \dot{y} - m y \dot{x}$$

ist das Moment der Bewegungsgrösse von m in Bezug auf die z-Axe. Dieses Moment erfährt in der Zeit dt den Zuwachs

$$m\, d(x \dot{y} - y \dot{x}) = m(x \ddot{y} - y \ddot{x})\, dt$$

Demnach ist

$$\text{(a)} \qquad \Sigma m(x \ddot{y} - y \ddot{x}) = \Sigma(x Y - y X)$$

oder

$$\text{(b)} \qquad d \Sigma m(x \dot{y} - y \dot{x}) = dt\, \Sigma(x Y - y X)$$

d. h. *der Zuwachs, welchen das in Bezug auf eine beliebige Axe genommene Moment der Bewegungsgrösse in der Zeit* dt *erfährt, ist gleich dem Producte aus der Summe der Momente der äusseren Kräfte in Bezug auf dieselbe Axe und dem Zeitelement* dt.

§ 20. Die Energie eines Massensystems.

Bewegt sich ein Massentheilchen m mit der Geschwindigkeit $v = ds / dt$, so ist die kinetische Energie desselben nach § 5

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m (ds / dt)^2 = \tfrac{1}{2} m \dot{s}^2.$$

Da $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist, so ist die kinetische Energie des Massentheilchens m

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Durch die Geschwindigkeiten der einzelnen Massentheilchen des Systems ist die *kinetische Energie* des Systems bestimmt. Dieselbe wird durch

$$T = \tfrac{1}{2} \,.\, \Sigma m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

ausgedrückt. Sind x, y, z die Coordinaten eines Massentheilchens, ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes, so sind

$$x - \xi = x', \quad y - \eta = y', \quad z - \zeta = z'$$

die Coordinaten des Massentheilchens in Bezug auf den Schwerpunkt. Man erhält dann

$$\Sigma m \dot{x}^2 = \Sigma m (\dot{\xi} + \dot{x}')^2 = \dot{\xi}^2 \Sigma m + \Sigma m \dot{x}'^2 + 2 \dot{\xi} \Sigma m \dot{x}' \text{ u. s. w.}$$

In Folge von § 18 (a) ist $\Sigma m x' = 0$, wenn der Schwerpunkt zum Coordinatenanfangspunkt gewählt wird. Dann ist

$$T = \tfrac{1}{2}.(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2).\Sigma m + \tfrac{1}{2}.\Sigma m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2).$$

Die kinetische Energie des Systems ist gleich der Summe der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung und der kinetischen Energie der relativen Bewegung der Massentheilchen in Bezug auf den Schwerpunkt.

Der Zuwachs der kinetischen Energie des Systems im Zeitelement dt ist gleich der während derselben Zeit von den Kräften geleisteten Arbeit. Diese zerfällt in zwei Theile, nämlich in die Arbeit der äusseren und in die der inneren Kräfte. Bezeichnet man die Componenten der Bewegung des Massentheilchens in Bezug auf die Axen mit dx, dy und dz, so ist die von den äusseren Kräften geleistete Arbeit

$$\Sigma(X dx + Y dy + Z dz).$$

Ist r der Abstand zweier Massentheilchen und wirkt zwischen denselben die abstossende Kraft F, so ist die von den inneren Kräften geleistete Arbeit $\Sigma F dr$, sofern mit dr ein Zuwachs von r bezeichnet wird. Demnach ist also

$$dT = \Sigma(X dx + Y dy + Z dz) + \Sigma F dr.$$

Ist die Kraft, mit welcher die Massen auf einander wirken, nur eine Function des Abstandes r, so kann man $F dr = d\Phi$ setzen, wo Φ nur eine Function von r ist. Ist nun $\Sigma d\Phi = dU$, so erhält man

$$\text{(d)} \qquad dT = \Sigma(X dx + Y dy + Z dz) + dU.$$

Die Function U ist allein von den Abständen der Massentheilchen von einander oder von der Configuration des Systems der Massentheilchen abhängig. U ist *das Potential des Systems auf sich selber* oder *die innere potentielle Energie des Systems.* U giebt ferner die Arbeit an, welche von den Kräften geleistet wird, wenn die Massentheilchen von ihrer augenblicklichen Stellung in solche Lagen sich bewegen, in welchen die gegenseitige Einwirkung Null ist.

Wirken die gegebenen Massen z. B. auf einander nach dem Newton'schen Gesetze, so ist

$$F = -f m_1 m_2 / r^2 \quad \text{und also}$$

$$F\,dr = -f m_1 m_2\, dr / r^2 = +f d(m_1 m_2 / r).$$

Sind mehrere Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ vorhanden, deren Abstände von einander bezw. $r_{12}, r_{13}, r_{23} \ldots$ sind, so ist

(e) $$dU = f d(m_1 m_2 / r_{12} + m_1 m_3 / r_{13} + m_2 m_3 / r_{23} + \ldots).$$

Geht das System von einer Stellung zu einer anderen über, so wird die von den inneren Kräften geleistete Arbeit allein durch die Anfangs- und Endlage der Massentheilchen bestimmt ohne Rücksicht auf den zurückgelegten Weg. Wirken keine äusseren Kräfte, so ist

(f) $$dT = dU \text{ oder } T - T_0 = U - U_0.$$

Nach den Betrachtungen des § 7 können wir aber $U_0 = 0$ setzen und erhalten dann

$$T = U + T_0,$$

d. h. die kinetische Energie des Systems ist gleich der ursprünglich vorhandenen kinetischen Energie T_0 vermehrt um die von den Kräften geleistete Arbeit U. Bei einer Aenderung der Lage der Massentheilchen zu einander findet bei Ausschluss von äusseren Kräften eine Verwandlung der einen Form der Energie in die andere statt, ohne dass die gesammte dem Systeme innewohnende Energie geändert wird, d. h. *die Summe der kinetischen und potentiellen Energie des betrachteten Systems ist constant.*

§ 21. Gleichgewichtsbedingungen. Feste Körper.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems sollen entwickelt werden. Wenn die Stellungen der einzelnen Massen in einem bestimmten Augenblick gegeben sind und ausserdem die inneren und äusseren Kräfte, so ist das System im Gleichgewicht, wenn die Resultante aller auf ein jedes Massentheilchen wirkenden Kräfte Null ist. Sind die inneren Kräfte im Gleichgewicht, so erfährt das System keine Veränderung, solange keine äusseren Kräfte auf dasselbe wirken. Die letzteren werden in der Regel eine Bewegung hervorbringen; aber es ist auch möglich, dass sie das Gleichgewicht des Systems im ganzen nicht stören, wenn auch die einzelnen

Theile Bewegungen ausführen. Ist die Resultante der äusseren Kräfte Null, so bleibt nach § 18 die Bewegung des Schwerpunktes unverändert; ist z. B. der Schwerpunkt in Ruhe, so bleibt er auch in Ruhe. Aber selbst wenn dieses auch der Fall ist, so können doch die äusseren Kräfte andere Bewegungen der Massen hervorbringen; es kann die relative Lage der Theile zu einander geändert werden, oder es können Formveränderungen oder Drehungen eintreten. Die Bedingungen für solche Veränderungen werden in der Elasticitätslehre und Hydrodynamik entwickelt, hier soll nur das Verhalten der festen Körper betrachtet werden.

Die Massentheilchen dieser Körper befinden sich in Abständen von einander, die ganz oder doch nahezu unveränderlich sind. Ist die Lage dreier Massentheilchen des Körpers gegeben, so sind damit auch die Lagen aller anderen Massentheilchen desselben gegeben und der Ort des Körpers ist bestimmt. Ist der Körper (Fig. 34) aus seiner Stellung gebracht, sodass die Punkte A, B, C bezw. nach A' B' C' gelangt sind, so kann derselbe zu seiner ursprünglichen Lage zurückgeführt werden. Zunächst kann man den Körper parallel mit sich selbst um die Strecke AA' verschieben, sodass der Punkt A' nach A fällt, dabei gelange B' nach b und C' nach c. Es sind $C'c$, $B'b$ und $A'A$ gleich gross und parallel. Der Körper wird sodann um eine durch A gehende Axe, die auf der durch BA und bA bestimmten Ebene senkrecht steht, um den Winkel BAb so gedreht, dass b mit B zusammenfällt, aber c nach c' gelangt. Durch eine zweite Drehung um die Axe AB fällt c' mit C zusammen. Die Bewegung des Körpers ist also auf eine fortschreitende Bewegung und zwei Drehbewegungen zurückgeführt. Ein fester Körper kann also keine Bewegung ausführen, wenn er weder verschoben noch gedreht werden kann.

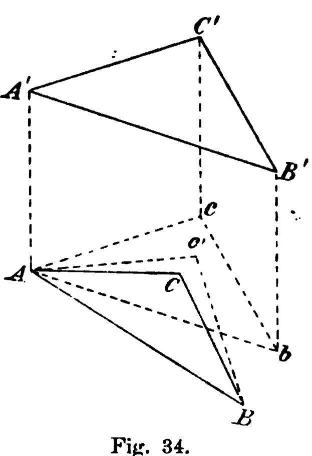


Fig. 34.

Soll ein Körper unter der Einwirkung äusserer Kräfte im Gleichgewichte sein, so muss der Schwerpunkt in Ruhe bleiben, und dies ist der Fall, wenn die Resultante der äusseren Kräfte Null ist. Ferner darf keine Drehung um irgend eine Axe erfolgen können. Findet eine solche statt, so erhalten die Theilchen eine gewisse Bewegungsmenge, die ein Moment in Bezug auf die Axe besitzt. Da alle einzelnen Bestandtheile in diesem Momente positiv sind, weil sich die Theile des Körpers nach derselben Seite hin bewegen, also die Bewegungsmengen der einzelnen Massentheilchen dasselbe Vorzeichen haben, so kann die Summe der Bewegungsmengen nur verschwinden, wenn jede einzelne derselben Null ist. Aber die Summe der Momente der Bewegungsmengen ist nach § 19 gleich dem Producte aus dem Momente der Kraft und der Zeit, während welcher die Kraft gewirkt hat. Zum Gleichgewicht ist demnach erforderlich, dass die Kräfte kein Moment in Bezug auf die Axe haben. Dasselbe muss für jede Axe gelten, um die der Körper sich drehen kann. Ist nämlich das Moment der Kräfte gleich Null, so ist auch die Summe der Bewegungsmomente gleich Null, also ist das Bewegungsmoment eines jeden Theilchens gleich Null, d. h. jeder Theil ist im Gleichgewicht. Da die Momente indessen wie Kräfte zusammengesetzt werden können, so genügt es, dass die Momente in Bezug auf drei willkürliche Axen Null sind.

§ 22. Rotation eines festen Körpers. Pendel.

Ein fester Körper drehe sich um eine unveränderliche Axe, die zur z-Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt wird. Die Winkelgeschwindigkeit des Körpers sei ω. Ist r der Abstand irgend eines Massentheilchens m des Körpers von der z-Axe, so ist die Geschwindigkeit dieses Theilchens $r\omega$ und die kinetische Energie $\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$. Da ω für alle Massentheilchen denselben Werth hat, so ist die kinetische Energie T gleich

$$T = \tfrac{1}{2}\,\omega^2 \Sigma m r^2.$$

$\Sigma m r^2$ heisst das *Trägheitsmoment* J des Körpers in Bezug auf die z-Axe; das Trägheitsmoment ist gleich der Summe der

Producte der Massentheilchen in die Quadrate der Abstände derselben von der z-Axe. Demnach ist

$$T = \tfrac{1}{2}\,\omega^2 J,$$

d. h. *die kinetische Energie eines rotirenden Körpers ist gleich dem Trägheitsmoment desselben multiplicirt mit dem halben Quadrat der Winkelgeschwindigkeit.*

Sind nur solche äusseren Kräfte vorhanden, welche die Axe in ihrer Stellung erhalten, so ist die Arbeit derselben Null, da die Axe sich nicht bewegt. Da die inneren Kräfte auch keine Arbeit leisten, so muss die kinetische Energie und also auch die Winkelgeschwindigkeit ω constant bleiben.

Da nach § 18 der Schwerpunkt sich bewegt, wie wenn die Resultirende aller Kräfte auf die im Schwerpunkte angebrachte Masse des Körpers wirkte, so kann diese Resultirende R bestimmt werden. Bezeichnen wir den Abstand OP (Fig. 35) des Schwerpunktes von der z-Axe mit a, so ist nach § 4

(b) $R = \Sigma m\, a^2 \omega^2 / a = \Sigma m\, a\, \omega^2.$

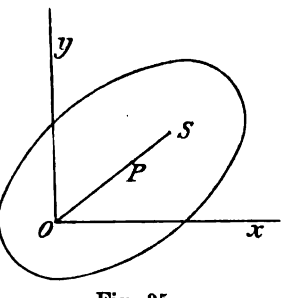


Fig. 35.

R ist also die Resultirende der Kräfte, mit welchen der Körper auf die Umdrehungsaxe wirkt. Doch werden diese Kräfte im allgemeinen so wirken, dass sie keine wirkliche Resultirende haben; sie suchen dann eine Drehung der Rotationsaxe hervorzubringen. Zur Bestimmung dieser Kräfte muss der Satz § 19 über die Momente der Bewegungsmenge benutzt werden.

Wirken äussere Kräfte auf den Körper, so ändert sich die Winkelgeschwindigkeit desselben. Wir bestimmen die Aenderung derselben nach § 19. Ein Massentheilchen m habe die Bewegungsmenge $m\, r\, \omega$, deren Moment $m\, r\, \omega\, r$ ist. Demnach ist das Moment für alle Theilchen des Körpers gleich

$$\omega\, \Sigma m\, r^2 = \omega\, J.$$

Wird das Moment der Kräfte in Bezug auf die z-Axe mit M bezeichnet, so ist nach § 19

$$d(\omega\, J) = M\, dt \quad \text{oder}$$

(c) $$J\, d\omega / dt = M.$$

Ist das Moment z. B. constant, so wächst die Winkelgeschwindigkeit proportional mit der Zeit.

Rührt das Moment von der Schwerkraft her, so führt der Körper unter gewissen Bedingungen eine schwingende Bewegung aus. Die Schwerkraft sei parallel der x-Axe gerichtet und wirke auf eine Masseneinheit mit der Stärke g. Die Lage des Schwerpunktes P (Fig. 35) sei durch den Winkel $POX = \Theta$ bestimmt. Es ist $d\Theta = \omega\, dt$. Das Moment der Kraft in Bezug auf die z-Axe ist dann

$$-(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots) g = -\eta \,.\, g \Sigma m,$$

wo η die y-Coordinate des Schwerpunktes ist und Σm die Summe aller Massen bedeutet. Da $\eta = a \sin \Theta$ ist, so ergiebt sich aus (c)

$$J \,.\, \Theta = -a \sin \Theta \,.\, g \Sigma m.$$

Ist Θ sehr klein, so wird

$$\Theta = -a \Theta g \Sigma m / J. \tag{d}$$

Vergleichen wir diese Beziehung mit der in § 8 (g) gegebenen, so werden beide identisch, wenn

$$1 / l = a \Sigma m / J.$$

Die Schwingungsdauer des körperlichen Pendels wird also

$$t = \pi \sqrt{l / g} = \pi \sqrt{J / g a \Sigma m}. \tag{e}$$

Da $J = \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2)$, so ergiebt sich bei Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in den Schwerpunkt (ξ, η, ζ), wenn x', y', z' die Coordinaten in Bezug auf letzteren sind,

$$\text{(f)} \quad \begin{cases} J = \Sigma m \{(x' + \xi)^2 + (y' + \eta)^2 + (z' + \zeta)^2\} = \Sigma m a^2 \\ \qquad + \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2), \end{cases}$$

da die Glieder $\xi \Sigma m x'$, $\eta \Sigma m y'$ und $\zeta \Sigma m z'$ verschwinden.

Wird nun $J = a^2 \Sigma m + k^2 \Sigma m$ gesetzt, wo k der Gyrationsradius ist, so ergiebt sich aus (e)

$$t = \pi \sqrt{(a^2 + k^2) / g a}. \tag{g}$$

l ist die *reducirte Pendellänge* und zwar wird

$$l = (a^2 + k^2) / a.$$

Wird durch O und P die Linie $OS = l$ (Fig. 35) gezogen, so ist S der *Schwingungsmittelpunkt*. Schwingt der Körper um eine

durch S gehende Axe, die der z-Axe parallel ist, so wird die reducirte Pendellänge l'

$$l' = \left((l-a)^2 + k^2\right) / (l-a).$$

Da aber $l - a = k^2 / a$ ist, so erhält man $l' = (a^2 + k^2) / a$. Die reducirte Pendellänge ist also unverändert und gleichfalls die Schwingungsdauer.

Zweiter Abschnitt.

Elasticitätstheorie.

§ 23. Innere Kräfte.

Sind alle Theile eines Körpers im Gleichgewichte und wirken weder Zug- noch Druckkräfte auf denselben, so müssen doch zwischen den einzelnen Theilen des Körpers innere Kräfte thätig sein. Jede Einwirkung ruft Formveränderungen des Körpers hervor, durch welche sich im Inneren des Körpers Kräfte entwickeln, die in entgegengesetztem Sinne wirken wie die äusseren Kräfte. Die inneren Kräfte bedingen die Beschaffenheit des Körpers, wie den Unterschied zwischen den festen und flüssigen Körpern, zwischen denen sich freilich keine scharfe Grenze ziehen lässt. Eine Zwischenstufe zwischen den festen und flüssigen Körpern bilden die zähflüssigen und gallertartigen Körper.

Wirkt auf die Oberfläche einer Flüssigkeit ein Druck, so muss dieser Druck an allen Punkten auf gleiche Flächen der Oberfläche gleich gross sein und auf der Oberfläche senkrecht stehen, wenn sich die Flüssigkeit im Gleichgewicht befinden soll. Der Druck pflanzt sich durch die ganze Masse fort; alle gleich grossen Flächenelemente in einem Punkte erleiden gleichen Druck, der stets senkrecht zu den Flächenelementen steht. Einen solchen Druck nennen wir *hydrostatischen* Druck. Dasselbe gilt für den Druck in Gasen. Auch in den festen Kör-

pern kann ein solcher Druck vorhanden sein. Befindet sich ein fester Körper, z. B. eine Glasmasse, die massiv ist oder deren Hohlräume mit dem äusseren Raume in Verbindung stehen, in einer Flüssigkeit, auf welche ein Druck ausgeübt wird, so herrscht in der Glasmasse überall derselbe Druck wie in der Flüssigkeit. Der Druck ist auch im Glase überall gleich gross und steht senkrecht zu den Flächenelementen. Man kann also auch vom hydrostatischen Drucke in einem festen Körper sprechen.

Im allgemeinen sind indess die inneren Kräfte in festen Körpern sehr verschieden von denen in Flüssigkeiten. Eine cylindrische Stange sei am einen Ende befestigt, am anderen Ende suche eine Kraft V die Stange auszudehnen. In einem zur Cylinderaxe senkrechten Schnitt sind die inneren Kräfte überall gleich gross. Die Schnittfläche sei A (Fig. 36), dann wirkt auf die Flächeneinheit von A die Kraft V/A. Dieser Quotient giebt die *Spannung* S in der Stange an. Wird durch die Stange ein zweiter ebener Schnitt B gelegt, der mit A den Winkel φ bildet, so wirkt auf jede Flächeneinheit von B eine Kraft S', sodass $S . A = S' . B = S . B \cos \varphi$ und demnach

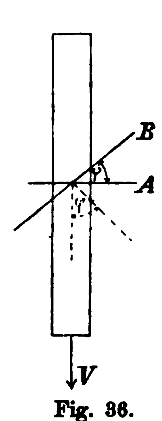


Fig. 36.

(a) $$S' = S \cos \varphi$$

ist. Die Spannung S' steht nicht mehr senkrecht zu derjenigen Fläche B, auf welche sie wirkt; ihre Grösse nimmt ab mit $\cos \varphi$ und sie verschwindet für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Ein Flächenelement, welches im Inneren des Cylinders der Axe desselben parallel ist, erfährt also keinen Druck oder Zug; dasselbe gilt für ein Oberflächenelement des Cylinders. S' kann in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine T tangential, die andere N normal zu B wirkt. Wir haben dann

(b) $$N = S \cos^2 \varphi, \quad T = S \cos \varphi \sin \varphi.$$

Sind in einem Körper die inneren Kräfte von der betrachteten Art, so kann man die Spannungen *axial* nennen. In der Richtung der Axe ist die Spannung S, aber auf die Flächeneinheit, deren Normale mit der Axe den Winkel φ bildet, wirkt eine Kraft $S \cos \varphi$ in der Richtung der Axe.

Wir betrachten ein rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 37); OA, OB und OC sind drei zusammenstossende Kanten. Auf jede Flächeneinheit der Endflächen, die senkrecht zu OA, OB und OC sind, wirken bezw. die Zugkräfte S_a, S_b, S_c. Die Normale einer beliebig gelegenen Flächeneinheit f bilde mit den Kanten OA, OB, OC bezw. die Winkel α, β, γ, dann ist die auf f wirkende Kraft die Resultirende der Kräfte

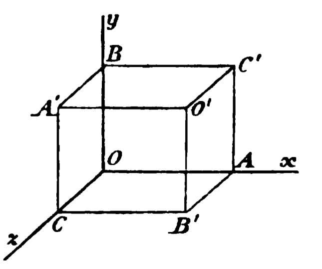


Fig. 37.

$$S_a \cos\alpha, \quad S_b \cos\beta, \quad S_c \cos\gamma,$$

welche bezw. parallel OA, OB, OC sind. Sind die Spannungen S_a, S_b und S_c gleich gross und zwar gleich S, so wird die Resultirende

$$S\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = S.$$

Drei gleiche Spannungen, deren Richtungen rechte Winkel mit einander bilden, rufen also eine hydrostatische Spannung hervor, da ihre Resultante unabhängig von der Richtung der Fläche stets denselben Werth annimmt. Diese Spannung ist senkrecht zur Flächeneinheit f, da ihre Componenten $S\cos\alpha$, $S\cos\beta$, $S\cos\gamma$ sind.

Ist dagegen $S_c = 0$ und $S_a = S_b = S$, d. h. wirken zwei zu einander senkrechte Spannungen, während die dritte zu ihnen senkrechte Spannung Null ist, so sind die Componenten in den Richtungen OA, OB, OC bezw.

$$S\cos\alpha, \quad S\cos\beta, \quad 0.$$

Die auf f wirkende Kraft wird demnach

$$S\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} = S\sqrt{1 - \cos^2\gamma} = S\sin\gamma$$

und steht senkrecht auf OC. Ein solcher Spannungszustand in einem Körper kann etwa als *äquatorialer* bezeichnet werden. Die Ebene, welche OA und OB enthält, oder vielmehr jede diesen beiden Linien parallele Ebene, ist als Aequatorialebene zu betrachten. Auf jede Flächeneinheit, welche senkrecht zur Aequatorialebene ist, wirkt dieselbe Spannung S; bildet die Normale der Fläche f mit der Aequatorialebene einen Winkel φ, so ist die Spannung proportional $\cos\varphi$.

§ 24. Die Spannungscomponenten.

Eine Fläche F (Fig. 38) theile einen Körper in zwei Theile A und B. Wird von A der Theil weggenommen, welcher das Element dF der Fläche F berührt, so muss zur Erhaltung des Gleichgewichtes in B eine Kraft auf dF wirken. Diese Kraft $S\,dF$ steht in der Regel nicht senkrecht auf dF, sondern bildet einen Winkel mit der Normale von dF. Die in den einzelnen Punkten von F wirkenden Kräfte sind im allgemeinen verschieden. Sucht die Kraft das Element dF in den von B erfüllten Raum zu bewegen, so ist sie als *Druck* auf die Fläche dF aufzufassen; sucht dagegen die Kraft das Element dF in den von A erfüllten Raum zu bewegen, so ist sie als *Zugkraft* zu betrachten. In allen Fällen bezeichnen wir die Kraft S als *Spannung*; wirkt dieselbe als Zug, so ist sie *positive Spannung*, wirkt sie als Druck, so ist sie *negative Spannung*. Wird der Theil von B fortgenommen, welcher dF berührt, so muss zur Erhaltung des Gleichgewichtes in A eine Kraft $S\,dF$ auf dF wirken, da Wirkung und Gegenwirkung gleich gross sind. Die beiden Kräfte, welche demnach auf ein Flächenelement im Inneren eines Körpers wirken, sind gleich gross aber entgegengesetzt gerichtet. Es ist charakteristisch für die Spannung, dass sie als aus zwei gleich grossen und entgegengesetzt gerichteten Kräften bestehend angesehen werden muss.

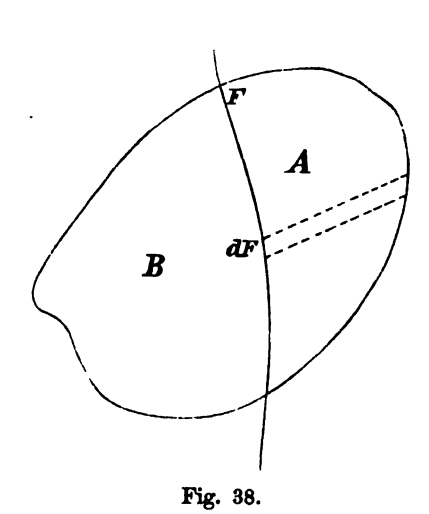


Fig. 38.

Das Flächenelement dF verbleibt zwar an derselben Stelle im Körper, wird aber um einen seiner Punkte gedreht, so entspricht jeder Stellung der Fläche eine bestimmte Spannung; für einzelne Stellungen kann die Spannung auch Null sein. Befindet sich die Fläche in einer Flüssigkeit, so ist die

Spannung von der Lage der Fläche unabhängig. Wir nehmen in dem Körper ein rechtwinkliges Coordinatensystem an. Die Spannungen in den Flächenelementen, welche auf den Axenrichtungen senkrecht stehen, werden durch ihre Componenten bestimmt.

Das Flächenelement dF stehe senkrecht auf der x-Axe, und es sei $dF = dy \,.\, dz$. Wird der Theil des Körpers fortgenommen, welcher vom Flächenelement $dy\,dz$ aus nach der positiven Seite der x-Axe liegt, so muss zur Erhaltung des Gleichgewichtes eine Kraft $S\,dy\,dz$ auf die Fläche $dy\,dz$ wirken. Die Kraft S wird in die Componenten X_x, Y_x, Z_x zerlegt, welche bezw. den Coordinatenaxen parallel sind, und zwar bezeichnet der Index, dass die Kräfte auf ein Element wirken, welches zur x-Axe senkreckt steht. X_x ist senkrecht zum Flächenelement; es ist also als *Normalkraft* zu bezeichnen, während Y_x und Z_x *Tangentialkräfte* sind. Das Element dF bleibe an derselben Stelle, es soll aber gedreht werden, so dass es senkrecht zur y-Axe liegt. Wir setzen dementsprechend $dF = dz\,dx$. Wie vorhin erhalten wir hier drei Componenten X_y, Y_y, Z_y, von denen Y_y Normalkraft, dagegen X_y und Z_y Tangentialkräfte des Flächenelementes $dz\,dx$ sind. Wird das Flächenelement dF so gedreht, dass es senkrecht zur z-Axe steht, so ergeben sich als Componenten X_z, Y_z, Z_z, von denen wiederum Z_z Normalkraft und X_z und Y_z Tangentialkräfte sind. Im ganzen erhalten wir die neun Componenten:

$$X_x,\ Y_x,\ Z_x;\quad X_y,\ Y_y,\ Z_y;\quad X_z,\ Y_z,\ Z_z.$$

Durch diese Componenten ist die Spannung an jeder Fläche bestimmt. OA, OB, OC (Fig. 39) sind drei Linienelemente, welche bezw. der x, y, z-Axe parallel sind. Durch A, B und C wird eine Ebene gelegt, wodurch das Tetraëder $OABC$ entsteht. P, Q und R seien die Componenten der Spannung in den Richtungen der Coordinatenaxen in einem Punkte auf der Grundfläche ABC des Tetraëders. Damit das Tetraëder sich nicht in der Richtung der x-Axe bewegt, muss folgende

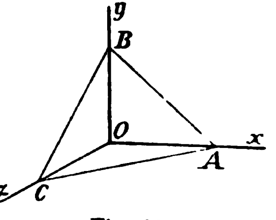


Fig. 39.

Bedingungsgleichung gelten. In der Richtung der x-Axe wirken die Kräfte $P.ABC$ auf die Grundfläche,

$$-X_x.OBC, \quad -X_y.OAC, \quad -X_z.OAB$$

auf die Kathetenflächen. Die Kraft, welche das Tetraëder in der Richtung der x-Axe zu bewegen strebt, ist demnach

$$P.ABC - X_x.OBC - X_y.OAC - X_z.OAB.$$

Die Winkel, welche die vom Tetraëder nach aussen gezogene Normale der Fläche ABC mit den Axen bildet, seien α, β, γ, dann ist die Kraft in der Richtung der x-Axe

$$(P - X_x \cos\alpha - X_y \cos\beta - X_z \cos\gamma).ABC.$$

Wirken zunächst keine äussere anziehende oder abstossende Kräfte auf die Theile des Körpers, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} P = X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma, \\ Q = Y_x \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Y_z \cos\gamma, \\ R = Z_x \cos\alpha + Z_y \cos\beta + Z_z \cos\gamma, \end{cases}$$

wo die beiden letzten Gleichungen in derselben Weise wie die erste hergeleitet werden können. Wirken noch andere Kräfte ausser den Spannungen auf die Theile des Körpers, so müssen dieselben in den Gleichungen (a) berücksichtigt werden. Die Kraft X wirke auf die Masseneinheit in der Richtung der x-Axe, so wirkt in derselben Richtung auf das Tetraëder die Kraft $X\varrho\,dv$, wenn dv das Volumen und ϱ die Dichte des Tetraëders ist. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten dann

$$(P - X_x \cos\alpha - X_y \cos\beta - X_z \cos\gamma).ABC + X\varrho\,dv = 0.$$

Da nun $dv = \frac{1}{3}h.ABC$, wenn h die Höhe des Tetraëders ist, so lautet die eine der drei Gleichgewichtsbedingungen

$$P - X_x \cos\alpha - X_y \cos\beta - X_z \cos\gamma + \tfrac{1}{3}h\,\varrho\,X = 0.$$

Da die Höhe h des Tetraëders unendlich klein ist, so ergiebt sich wiederum die erste der Gleichungen (a), welche allgemein gültig sind.

§ 25. Die Beziehungen zwischen den Spannungscomponenten.

Durch die Spannungscomponenten ist die Kraft bestimmt, welche auf das Raumelement $dx\,dy\,dz$ (Fig. 40) wirkt. Die

im Punkte O wirkenden Componenten seien gegeben. Die Kraft, welche auf OA' in der Richtung der x-Axe wirkt, sei gleich $-X_x\,dy\,dz$. Durch Entwicklung mittelst der **Maclaurin**'schen Reihe erhalten wir die auf AO' wirkende Kraft

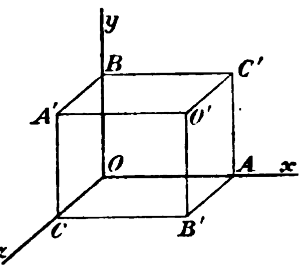


Fig. 40.

$$(X_x + \partial X_x / \partial x . dx)\, dy\, dz.$$

Die Resultante dieser beiden Kräfte ist $\partial X_x / \partial x . dx\, dy\, dz$. Auf die Flächen OB' und $O'B$ wirken in der Richtung der x-Axe bezw. die Kräfte $-X_y\,dx\,dz$ und

$$(X_y + \partial X_y / \partial y . dy)\, dx\, dz,$$

deren Resultante $\partial X_y / \partial y . dx\, dy\, dz$ ist. Für die Flächen OC' und $O'C$ ergiebt sich die Resultante $\partial X_z / \partial z . dx\, dy\, dz$. Die ganze auf das Parallelepiped $dx\, dy\, dz$ in der Richtung der x-Axe wirkende Kraft ist demnach

$$(\partial X_x / \partial x + \partial X_y / \partial y + \partial X_z / \partial z)\, dx\, dy\, dz.$$

Sind (X), (Y) und (Z) die Componenten der Kraft, mit welcher die Spannungen auf die Volumeneinheit wirken, so ist

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} (X) = \partial X_x / \partial x + \partial X_y / \partial y + \partial X_z / \partial z, \\ (Y) = \partial Y_x / \partial x + \partial Y_y / \partial y + \partial Y_z / \partial z, \\ (Z) = \partial Z_x / \partial x + \partial Z_y / \partial y + \partial Z_z / \partial z. \end{cases}$$

Wirken auf die Theile des Körpers nur Spannungen, so findet Gleichgewicht statt, wenn alle drei Componenten (X), (Y), (Z) Null sind. Die Gleichungen (b) geben dann drei Differentialgleichungen, denen die Spannungscomponenten genügen müssen. Wirkt auf jede Masseneinheit eine Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, und ist die Dichte des Körpers gleich ϱ, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} \partial X_x / \partial x + \partial X_y / \partial y + \partial X_z / \partial z + \varrho X = 0, \\ \partial Y_x / \partial x + \partial Y_y / \partial y + \partial Y_z / \partial z + \varrho Y = 0, \\ \partial Z_x / \partial x + \partial Z_y / \partial y + \partial Z_z / \partial z + \varrho Z = 0. \end{cases}$$

Die inneren Kräfte können nicht allein *Translationen* im Inneren des Körpers, sondern auch *Rotationen* hervorrufen.

Die Tangentialcomponenten suchen das Parallelepiped OO' um die z-Axe zu drehen. Auf die Fläche OB' wirkt die Tangentialkraft X_y in negativer Richtung, auf die gegenüberliegende Fläche $O'B$ wirkt die Tangentialkraft

$$X_y + \partial X_y / \partial y \, . \, dy$$

in positiver Richtung. Diese beiden Kräfte wirken auf das Parallelepiped mit einem Momente $X_y \, . \, dx \, dz \, . \, dy$, wenn die Glieder von höherer als der dritten Ordnung vernachlässigt werden. Dieses Drehungsmoment sucht das Parallelepiped in negativer Richtung um die z-Axe zu drehen. Auf die Flächen OA' und $O'A$ wirken Tangentialkräfte, deren Moment $Y_x \, . \, dy \, dz \, . \, dx$ ist. Dieses Drehungsmoment sucht das Parallelepiped in positiver Richtung zu drehen. Das ganze Moment, welches eine Umdrehung des Parallelepipeds um die z-Axe bewirkt, ist

$$(Y_x - X_y) \, dx \, dy \, dz.$$

Ist der Körper im Gleichgewichte unter dem Einflusse der betrachteten Spannungen, so muss dieses Moment Null sein, d. h.

$$\text{(d)} \qquad Y_x = X_y,$$

und ebenso haben wir

$$Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x.$$

Die beiden letzten Gleichungen werden auf dieselbe Weise wie die beiden ersten abgeleitet. Wirken auf den Körper anziehende Kräfte, wie die Schwerkraft oder fernewirkende Kräfte überhaupt, so müssen die Gleichungen (d) bestehen bleiben. Der Angriffspunkt jener Kräfte kann bei unendlich kleinen Körpern in den Schwerpunkt verlegt werden, sie können daher keine Rotationen hervorrufen und also auch nicht den Kräften, welche den Körper zu drehen suchen, das Gleichgewicht halten.

Nach den Gleichungen (d) sind zur Bestimmung der Spannung in einem Punkte eines Körpers nur sechs Grössen erforderlich, nämlich

$$X_x, \, Y_y, \, Z_z; \quad Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x, \quad Y_x = X_y.$$

Die drei ersten Componenten sind *Normalkräfte*, die drei übrigen *Tangentialkräfte*. Obschon eine einfachere Bezeichnungsweise für diese Kräfte eingeführt werden kann, wollen wir

doch obenstehende beibehalten, da bei der Benutzung derselben schnell die eigentliche Bedeutung der Grössen zu ersehen ist. Es sei daran erinnert, dass der Werth einer Spannungscomponente ungeändert bleibt, wenn die Richtung der Kraft mit der Richtung der Normalen des Flächenelementes vertauscht wird, auf welches die Spannung wirkt.

§ 26. Die Hauptspannungen.

Um einen besseren Einblick in das Wesen der inneren Kräfte zu erhalten, untersuchen wir, ob durch einen gegebenen Punkt eines Körpers eine Fläche gelegt werden kann, auf die keine tangentiale Spannung wirkt. Im voraus sei bemerkt, dass durch jeden Punkt des Körpers drei gegen einander senkrechte Flächenelemente gelegt werden können, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen. Wir gehen von den Gleichungen § 24 (a) aus

$$\text{(a)}\qquad \begin{cases} P = X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma, \\ Q = Y_x \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Y_z \cos\gamma, \\ R = Z_x \cos\alpha + Z_y \cos\beta + Z_z \cos\gamma, \end{cases}$$

α, β, γ sind die Winkel zwischen der Normalen der Fläche und den Axen, und bestimmen die Lage der Fläche, auf welche die Spannungscomponenten P, Q, R wirken. Diese Fläche möge eine solche Lage im Körper haben, dass die Spannung senkrecht zur Fläche wirkt; wir wollen diese Spannung die *Hauptspannung* S nennen. Die Winkel, welche die Richtung von S mit den Axen bildet, sind ebenfalls α, β, γ und daraus folgt, dass

$$\text{(b)}\qquad P = S\cos\alpha, \quad Q = S\cos\beta, \quad R = S\cos\gamma.$$

Durch Einführung dieser Werthe in (a) folgt

$$\text{(c)}\qquad \begin{cases} (X_x - S)\cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma = 0, \\ Y_x \cos\alpha + (Y_y - S)\cos\beta + Y_z \cos\gamma = 0, \\ Z_x \cos\alpha + Z_y \cos\beta + (Z_z - S)\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Werden $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ aus diesen Gleichungen eliminirt, so ergiebt sich

$$\text{(d)}\begin{cases} S^3 - (X_x + Y_y + Z_z)S^2 + (X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x - Z_y^2 - X_z^2 - Y_x^2)S \\ \quad - (X_x Y_y Z_z + 2 Z_y X_z Y_x - X_x Z_y^2 - Y_y X_z^2 - Z_z Y_x^2) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung hat immer *eine* reelle Wurzel A, und man kann aus den Gleichungen (c) in Verbindung mit

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

die entsprechenden Werthe von α, β, γ finden. Damit ist gezeigt, dass stets durch jeden Punkt eine Ebene gelegt werden kann, welche die Eigenschaft hat, dass keine Tangentialkräfte in ihr wirksam sind. Eine solche Ebene soll *Hauptebene* heissen.

Das Coordinatensystem sei so gedreht, dass diese Hauptebene parallel der yz-Ebene wird. Unter dieser Voraussetzung ist

$$X_x = A, \quad Y_x = 0, \quad Z_x = 0.$$

Die Gleichungen (c) lauten dann

$$(A - S)\cos\alpha = 0; \quad (Y_y - S)\cos\beta + Y_z\cos\gamma = 0;$$
$$Z_y\cos\beta + (Z_z - S)\cos\gamma = 0.$$

Diesen Gleichungen wird zunächst genügt, wenn $S = A$ und $\cos\beta = \cos\gamma = 0$ gesetzt wird, woraus folgt, dass $\cos\alpha = 1$ ist. Dadurch kommen wir zu der bereits gefundenen Hauptebene mit zugehöriger Normalspannung A. Dieselben Gleichungen sind erfüllt, wenn

$$\cos\alpha = 0; \quad \cos\beta / \cos\gamma = -Y_z/(Y_y - S) = -(Z_z - S)/Z_y$$

gesetzt wird.

Da $\cos\alpha = 0$, also $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ist, so stehen die neuen Hauptebenen zur ersten senkrecht. Ferner ist

$$S = \tfrac{1}{2}\left(Y_y + Z_z \pm \sqrt{(Y_y - Z_z)^2 + 4Z_y^2}\right)$$

und

$$\cos\beta / \cos\gamma = \tfrac{1}{2}\left(Y_y - Z_z \pm \sqrt{(Y_y - Z_z)^2 + 4Z_y^2}\right) / Z_y.$$

Man erhält für S, wie auch für β und γ, zwei Werthe. Werden die Werthe von β und γ bezw. mit β' und β'', γ' und γ'' bezeichnet, so wird

$$\cos\beta'\cos\beta'' / \cos\gamma'\cos\gamma'' = -1$$

und demnach

$$\cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0.$$

Da die entsprechenden Werthe von α gleich $\frac{1}{2}\pi$ sind, so ergiebt sich, dass die beiden neuen Hauptebenen senkrecht zu einander stehen.

Damit ist bewiesen, dass durch jeden Punkt in einem Körper im allgemeinen nur drei zu einander senkrechte Flächenelemente gelegt werden können, auf welche ausschliesslich Normalkräfte wirken. Die den drei Hauptebenen entsprechenden Normalspannungen heissen A, B und C. Nach (d) bestehen zwischen diesen und den Spannungscomponenten folgende Beziehungen:

$$
\text{(e)}\begin{cases} A + B + C = X_x + Y_y + Z_z, \\ BC + AC + AB = Z_z Y_y + X_x Z_z + Y_y X_x - Z_y^2 - X_z^2 - Y_x^2, \\ ABC = X_x Y_y Z_z + 2 Z_y X_z Y_x - X_x Z_y^2 - Y_y X_z^2 - Z_z Y_x^2. \end{cases}
$$

Von diesen Gleichungen ist besonders die erste zu beachten; sie zeigt, *dass die Summe der Normalkräfte für drei gegen einander senkrechte Ebenen constant ist.*

Sind die Axen des Coordinatensystems den Richtungen der drei Hauptspannungen A, B und C parallel, so lauten die Gleichungen (a):

$$
P = A\cos\alpha, \quad Q = B\cos\beta, \quad R = C\cos\gamma.
$$

Ist $A > B > C$ und wird $A = B + S_1$, $C = B - S_2$ gesetzt, so können die Hauptspannungen durch eine hydrostatische Spannung B und zwei axiale Spannungen S_1 und S_2 ersetzt werden, von denen die erstere als Zug, die letztere als Druck wirkt.

Diese Untersuchung zeigt, dass durch einen willkürlich angenommenen Punkt in einem Körper stets drei Ebenen gelegt werden können, auf welche nur Normalspannungen wirken, die den Hauptspannungen A, B und C gleich sind. A, B, C sind die drei Wurzeln der Gleichung (d); ihre Richtungen werden mit Hülfe der Gleichungen (c) bestimmt. A bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel α_1, β_1, γ_1 und es wird $\cos\alpha_1 = l_1$, $\cos\beta_1 = m_1$ und $\cos\gamma_1 = n_1$ gesetzt. Eine entsprechende Bezeichnung wird für B und C eingeführt nach folgender Tabelle

(g)

	x	y	z
A	l_1	m_1	n_1
B	l_2	m_2	n_2
C	l_3	m_3	n_3

Zwischen diesen Grössen bestehen nach den Gleichungen (c) folgende Beziehungen:

$$
\text{(h)}\quad\begin{cases}
A l_1 = X_x l_1 + X_y m_1 + X_z n_1; & B l_2 = X_x l_2 + X_y m_2 + X_z n_2;\\
A m_1 = Y_x l_1 + Y_y m_1 + Y_z n_1; & B m_2 = Y_x l_2 + Y_y m_2 + Y_z n_2;\\
A n_1 = Z_x l_1 + Z_y m_1 + Z_z n_1; & B n_2 = Z_x l_2 + Z_y m_2 + Z_z n_2;\\
C l_3 = X_x l_3 + X_y m_3 + X_z n_3, & \\
C m_3 = Y_x l_3 + Y_y m_3 + Y_z n_3, & \\
C n_3 = Z_x l_3 + Z_y m_3 + Z_z n_3. &
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen können nach den Spannungscomponenten X_x, Y_y u. s. w. aufgelöst werden, deren Bestimmung leichter durch folgende Betrachtung geschieht. Durch einen Punkt P werden die Linien PA', PB' und PC' parallel mit den Richtungen der Hauptspannungen A, B und C gezogen. Diese drei Linien bestimmen zusammen mit einer Ebene F, welche der yz-Ebene parallel ist, ein Tetraëder. F ist so gelegt, dass das Tetraëder unendlich klein wird; die Grundfläche desselben sei dF. Die Inhalte der in P zusammenstossenden Seitenflächen sind $l_1\, dF$, $l_2\, dF$ und $l_3\, dF$. Auf die Flächeneinheit von $l_1\, dF$ wirkt in der Richtung der x-Axe die Kraft $A l_1$; auf die Flächeneinheit der beiden anderen wirken bezw. die Kräfte $B l_2$ und $C l_3$ und auf die Flächeneinheit von dF wirkt die Kraft X_x. Damit das Tetraëder sich nicht in der Richtung der x-Axe bewegt, muss

$$l_1 A . l_1\, dF + l_2 B . l_2\, dF + l_3 C . l_3\, dF = X_x\, dF$$

oder

$$X_x = A l_1^2 + B l_2^2 + C l_3^2$$

sein. Durch ähnliche Betrachtungen ergeben sich für die übrigen Componenten die folgenden Gleichungen

$$
\text{(i)}\quad\begin{cases}
X_x = A l_1^2 + B l_2^2 + C l_3^2; & Z_y = A m_1 n_1 + B m_2 n_2 + C m_3 n_3,\\
Y_y = A m_1^2 + B m_2^2 + C m_3^2; & X_z = A l_1 n_1 + B l_2 n_2 + C l_3 n_3,\\
Z_z = A n_1^2 + B n_2^2 + C n_3^2; & Y_x = A l_1 m_1 + B l_2 m_2 + C l_3 m_3.
\end{cases}
$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die für die Spannungscomponenten gefundenen Werthe den Gleichungen (h) genügen, wenn die bekannten Beziehungen zwischen den in (g) zusammengestellten Grössen berücksichtigt werden.

§ 27. Faraday's Vorstellung über das Wesen der fernewirkenden Kräfte.

Newton betrachtete die Wirkung zwischen zwei Massen als eine Fernewirkung, welche nicht von Theilchen zu Theilchen des zwischen den Massen sich befindenden Mediums fortgepflanzt wird. Faraday dagegen hatte die Vorstellung, dass das Zwischenmedium die Wirkungen zwischen zwei mit Electricität geladenen Körpern vermittelt; die Wirkungen werden von Theilchen zu Theilchen übertragen. In den letzteren wird in der Richtung der Kraftlinien die Electricität verschoben, das eine Ende derselben wird positiv, das andere negativ electrisch.

Bei dieser *Polarisation* liegen zwei Theilchen mit ungleichnamigen Polen an einander; infolge dessen hat die Kraftlinie das Bestreben sich zu verkürzen; es tritt ein Spannungszustand im Zwischenmedium auf. Diese Spannung gleicht der elastischen Spannung und ist von Maxwell als *electrische Elasticität* bezeichnet worden. Derselbe hat im 5. Kapitel seiner Electricitätslehre mittelst der von Faraday gegebenen Hypothese eine Theorie entwickelt, welche wir auch im Nachfolgenden ausführen. Da die electrischen und magnetischen Fernewirkungen demselben Gesetze unterworfen sind wie die allgemeine Massenanziehung, so können wir die Betrachtung ganz allgemein durchführen mit Berücksichtigung der Kräfte, die umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes der Körper sind.

Das Potential ψ sei für alle Punkte des betrachteten Raumes gegeben. Die Dichte ϱ ist durch das Potential nach der Poisson'schen Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \partial^2\psi / \partial x^2 + \partial^2\psi / \partial y^2 + \partial^2\psi / \partial z^2 + 4\pi\varrho = 0$$

bestimmt.

Auf die im Raumelement dv enthaltene Masse $\varrho\, dv$ wirkt eine Kraft, deren Componenten

$$\mp \varrho\, dv\, \partial\psi / \partial x; \quad \mp \varrho\, dv\, \partial\psi / \partial y; \quad \mp \varrho\, dv\, \partial\psi / \partial z$$

sind. Das obere Vorzeichen gilt für magnetische oder electrische Anziehungen, das untere für Massenanziehung. Mit

Rücksicht auf (a) ist die in der Richtung der x-Axe wirkende Componente

$$\pm \partial\psi / \partial x . (\partial^2\psi / \partial x^2 + \partial^2\psi / \partial y^2 + \partial^2\psi / \partial z^2) . dv / 4\pi.$$

Diese Grösse muss als Summe dreier Differentialquotienten in Bezug auf x, y und z dargestellt werden können. Wir haben

$$\partial\psi / \partial x . \partial^2\psi / \partial x^2 = \tfrac{1}{2} \partial (\partial\psi / \partial x)^2 / \partial x,$$

$$\partial\psi/\partial x . \partial^2\psi/\partial y^2 = \partial(\partial\psi/\partial x . \partial\psi/\partial y)/\partial y - \partial\psi/\partial y . \partial^2\psi/\partial x \partial y$$
$$= \partial(\partial\psi/\partial x . \partial\psi/\partial y)/\partial y - \tfrac{1}{2}\partial(\partial\psi/\partial y)^2/\partial x,$$

$$\partial\psi/\partial x . \partial^2\psi/\partial z^2 = \partial(\partial\psi/\partial x . \partial\psi/\partial z)/\partial z - \partial\psi/\partial z . \partial^2\psi/\partial x \partial z$$
$$= \partial(\partial\psi/\partial x . \partial\psi/\partial z)/\partial z - \tfrac{1}{2}\partial(\partial\psi/\partial z)^2/\partial x.$$

Demnach wirkt auf das Raumelement dv in der Richtung der x-Axe die Kraft:

$$\pm \partial\{(\partial\psi / \partial x)^2 - (\partial\psi / \partial y)^2 - (\partial\psi / \partial z)^2\} / \partial x . dv / 8\pi$$
$$\pm \partial(\partial\psi/\partial x . \partial\psi/\partial y)/\partial y . dv/4\pi \pm \partial(\partial\psi/\partial x . \partial\psi/\partial z)/\partial z . dv/4\pi.$$

Werden wie in § 25 die Componenten der Kraft, welche auf die Volumeneinheit wirken, mit (X), (Y) und (Z) bezeichnet und wird der Kürze wegen

$$X = -\partial\psi / \partial x, \quad Y = -\partial\psi / \partial y, \quad Z = -\partial\psi / \partial z$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$\text{(b)} \begin{cases} (X) = \pm 1/8\pi . [\partial(X^2 - Y^2 - Z^2)/\partial x + 2\partial(XY)/\partial y + 2\partial(XZ)/\partial z], \\ (Y) = \pm 1/8\pi . [2\partial(XY)/\partial x + \partial(Y^2 - X^2 - Z^2)/\partial y + 2\partial(YZ)/\partial z], \\ (Z) = \pm 1/8\pi . [2\partial(XZ)/\partial x + 2\partial(YZ)/\partial y + \partial(Z^2 - X^2 - Y^2)/\partial z]. \end{cases}$$

Da diese Gleichungen ganz analog denen sind, welche die Kraft bestimmen, mit der die Spannungen auf die Volumeneinheit wirken, so können auch die fernewirkenden Kräfte als Spannungen im Medium betrachtet werden. Handelt es sich um allgemeine Massenanziehung, so kann als Zwischenmedium der Aether angesehen werden; ist dagegen von electrischen Fernewirkungen die Rede, so muss die Abhängigkeit der Spannung des Aethers von den den Raum erfüllenden Massen, wie Luft, Wasser u. s. w. berücksichtigt werden. Es ist nicht nöthig hierauf in unseren Betrachtungen einzugehen.

Die Vergleichung der Formeln (b) mit den Formeln § 25 (b) zeigt, dass

$$
\text{(c)}\left\{\begin{array}{ll}
X_x = \pm (X^2 - Y^2 - Z^2)/8\pi, & Y_z = Z_y = \pm (YZ)/4\pi, \\
Y_y = \pm (Y^2 - X^2 - Z^2)/8\pi, & Z_x = X_z = \pm (XZ)/4\pi, \\
Z_z = \pm (Z^2 - X^2 - Y^2)/8\pi, & X_y = Y_x = \pm (XY)/4\pi.
\end{array}\right.
$$

Zur Bestimmung der Hauptspannungen im Medium benutzen wir die Gleichungen § 26 (e) und erhalten

$$
\begin{aligned}
A + B + C &= \mp (X^2 + Y^2 + Z^2)/8\pi, \\
BC + AC + AB &= -\left((X^2 + Y^2 + Z^2)/8\pi\right)^2, \\
ABC &= \pm \left((X^2 + Y^2 + Z^2)/8\pi\right)^3.
\end{aligned}
$$

Setzt man

$$
\text{(d)} \qquad (X^2 + Y^2 + Z^2)/8\pi = S,
$$

so sind A, B und C die Wurzeln der Gleichung

$$
D^3 \pm SD^2 - S^2 D \mp S^3 = 0
$$

oder

$$
(D \mp S)(D \pm S)^2 = 0.
$$

Wir haben also entweder

$$
\text{(e)} \quad A = +S, \ B = C = -S \ \text{oder} \ A = -S, \ B = C = +S.
$$

Demnach sind immer zwei Hauptspannungen gleich gross. Um die Richtungen derselben zu bestimmen, werden α, β und γ nach § 26 (c) berechnet, und es ist am einfachsten, die Richtungen der gleich grossen Spannungen B und C zu bestimmen. Werden die Werthe (d) von $\pm S$ in die erwähnten Gleichungen für S eingesetzt, so ergiebt sich einfach

$$
\text{(f)} \qquad X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = 0.
$$

Demnach sind in jedem Punkte die beiden gleich grossen Hauptspannungen senkrecht zur Richtung der Kraft; die dritte Hauptspannung liegt in der Richtung der Kraft und ist gleich dem Quadrate der Kraft dividirt durch 8π.

Hierdurch ist gezeigt, dass alle fernewirkenden Kräfte durch einen Spannungszustand des Zwischenmediums erklärt werden können. Anstatt der allgemeinen Massenanziehung ist von diesem Gesichtspunkte aus eine negative Spannung, d. h. eine Druckspannung, in der Richtung der Kraftlinien und eine positive Spannung, d. h. eine Zugspannung, in allen zur Kraft senk-

rechten Richtungen zu setzen. Auf ein Flächenelement, welches senkrecht zur Kraftrichtung liegt, wird eine gleich grosse Zugkraft ausgeübt. Für die magnetischen und electrischen Anziehungen findet das Entgegengesetzte statt. In Betreff der Schwere deutet übrigens nichts auf das Vorhandensein solcher Spannungen hin, dagegen machen mehrere Erscheinungen in der Electricität die Existenz solcher Spannungen höchst wahrscheinlich.

§ 28. Die Formveränderungen.

Aendert ein Körper seine Gestalt oder seine Lage im Raume, so hat ein Punkt desselben, welcher ursprünglich die Coordinaten x, y, z hatte, nach der Veränderung die Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$. ξ, η, ζ sind die Projectionen der Bahn, welche P durchlaufen hat, oder sie sind die Componenten der Verrückung. Sind ξ, η und ζ als Functionen der Zeit gegeben, so ist die Lage des Punktes P zu jeder Zeit bestimmt. Die Bewegungen der einzelnen Punkte sind im allgemeinen verschieden, d. h. ξ, η, ζ sind Functionen von x, y, z. Wir betrachten zunächst einzelne einfache Bewegungen.

Sind ξ, η und ζ gleich gross für alle Punkte des Körpers, so bewegen sich alle Punkte gleich weit und in derselben Richtung; die Bewegung ist eine *Translation*, bei welcher alle Theile des Körpers in unveränderten Abständen von einander bleiben, und welche daher keine Veranlassung zur Entstehung innerer Kräfte giebt. Dasselbe ist auch bei einer Drehung des Körpers um eine Axe der Fall. Die Umdrehungsaxe sei der x-Axe parallel und gehe durch den Punkt P (Fig. 41), dessen Coordinaten x, y, z sind. Ein Punkt Q mit den Coordinaten x', y', z' lege den Weg $QR = h_x . r$ zurück, wenn $r = QS$ der Abstand des Punktes Q von der Axe und h_x der Drehungswinkel ist. Dabei wird die y-Coordinate vermindert um

$$BB' = QR(z' - z) / r = h_x(z' - z),$$

während die z-Coordinate die Vergrösserung

$$CC' = QR(y' - y) / r = h_x(y' - y)$$

erfährt. Wird der Körper zugleich um zwei andere Axen gedreht, welche der y- und z-Axe parallel sind, und werden

die Drehungswinkel bezw. mit h_y und h_z bezeichnet, so erfahren die Coordinaten von Q die Vergrösserungen ξ, η, ζ, welche folgende Werthe haben:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \xi = (z' - z)\,h_y - (y' - y)\,h_z, \\ \eta = (x' - x)\,h_z - (z' - z)\,h_x, \\ \zeta = (y' - y)\,h_x - (x' - x)\,h_y. \end{cases}$$

Wir gehen jetzt über zur Betrachtung des allgemeinen Falles, in dem die Punkte des Körpers ihre relative Lage zu

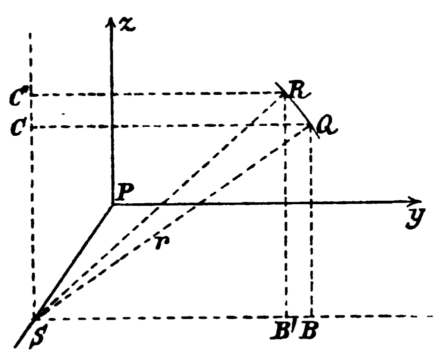


Fig. 41.

einander ändern. Der Punkt P mit den Coordinaten x, y, z gelange bei der Bewegung nach P', dessen Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ sind; ein anderer Punkt Q, welcher ursprünglich die Coordinaten x', y', z' hatte, gelange nach Q' mit den Coordinaten $x' + \xi'$, $y' + \eta'$, $z' + \zeta'$. Ist ξ eine gegebene Function von x, y, z, so ergiebt sich

$$\xi' = \xi + (x' - x)\,\partial\xi/\partial x + (y' - y)\,\partial\xi/\partial y + (z' - z)\,\partial\xi/\partial z + \dots$$

P und Q liegen unendlich nahe bei einander, sodass

$$x' - x = dx, \quad y' - y = dy, \quad z' - z = dz.$$

Bei Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung ergeben sich dann folgende Beziehungen

$$\xi' = \xi + \partial\xi/\partial x\,.\,dx + \partial\xi/\partial y\,.\,dy + \partial\xi/\partial z\,.\,dz,$$
$$\eta' = \eta + \partial\eta/\partial x\,.\,dx + \partial\eta/\partial y\,.\,dy + \partial\eta/\partial z\,.\,dz,$$
$$\zeta' = \zeta + \partial\zeta/\partial x\,.\,dx + \partial\zeta/\partial y\,.\,dy + \partial\zeta/\partial z\,.\,dz.$$

Folgende neue Grössen werden eingeführt:

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} x_x = \partial\xi/\partial x; & z_y = y_z = \frac{1}{2}(\partial\zeta/\partial y + \partial\eta/\partial z); & h_x = \frac{1}{2}(\partial\zeta/\partial y - \partial\eta/\partial z); \\ y_y = \partial\eta/\partial y; & x_z = z_x = \frac{1}{2}(\partial\xi/\partial z + \partial\zeta/\partial x); & h_y = \frac{1}{2}(\partial\xi/\partial z - \partial\zeta/\partial x); \\ z_z = \partial\zeta/\partial z; & y_x = x_y = \frac{1}{2}(\partial\eta/\partial x + \partial\xi/\partial y); & h_z = \frac{1}{2}(\partial\eta/\partial x - \partial\xi/\partial y). \end{cases}$$

Wir erhalten:

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} \xi' = \xi + x_x dx + x_y dy + x_z dz - h_z dy + h_y dz, \\ \eta' = \eta + y_x dx + y_y dy + y_z dz - h_x dz + h_z dx, \\ \zeta' = \zeta + z_x dx + z_y dy + z_z dz - h_y dx + h_x dy. \end{cases}$$

Die Gleichungen bestimmen die Bewegungen, welche die einzelnen in der Nähe von P liegenden Punkte ausführen. Diese Bewegung ist aus einer Verschiebung, deren Componenten ξ, η, ζ sind, aus einer Drehung, deren Componenten h_x, h_y, h_z sind, zusammengesetzt und aus zwei besonderen Bewegungen, welche durch x_x, y_y, z_z und z_y, x_z, y_x bestimmt sind. Wird nur Rücksicht auf die Formveränderungen genommen, so kommt es dann nur auf die Bewegung an, deren Componenten $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$\text{(d)}\quad \begin{cases} d\xi = x_x dx + x_y dy + x_z dz, \\ d\eta = y_y dy + y_x dx + y_z dz, \\ d\zeta = z_z dz + z_x dx + z_y dy. \end{cases}$$

Um die Bedeutung der Coefficienten x_x, y_y, z_z und z_y, x_z, y_x zu finden, nehmen wir an, dass alle Grössen mit Ausnahme von x_x Null sind. Dann ist $d\xi = x_x . dx$, während $d\eta = d\zeta = 0$ sind. Die entsprechende Formveränderung ist also eine *Dilatation* des Körpers in der Richtung der x-Axe, wobei dx den Zuwachs $d\xi$ und die Längeneinheit also den Zuwachs $d\xi/dx = x_x$ erhält. x_x giebt die Dilatation einer Längeneinheit parallel mit der x-Axe an oder x_x ist die Dilatation in der Richtung der x-Axe. y_y und z_z sind demnach die Dilatationen bezw. in den Richtungen der y- und z-Axe.

Verschwinden dagegen alle Coefficienten mit Ausnahme von z_y, so ist

$$d\xi = 0, \quad d\eta = z_y . dz, \quad d\zeta = z_y . dy.$$

Die Theilchen werden in einer zur yz-Ebene parallelen Ebene verschoben, ihre Abstände von der yz-Ebene bleiben unver-

ändert. Der Punkt P (Fig. 42) habe ursprünglich die Coordinaten x, y, z; $ABCD$ sei ein Quadrat mit der Seite $2a$. Der Punkt A, welcher ursprünglich die Coordinaten x, $y+a$, $z+a$ hatte, rückt nach A', dessen Coordinaten $a+z_y a$, $a+z_y a$ in Bezug auf die Axen PY und PZ sind. A' liegt also auf der Verlängerung von PA. Die Punkte B und D gelangen bei der Formveränderung nach B' und D', welche auf BD liegen; C rückt auf der Verlängerung von AC nach C'. Das Quadrat $ABCD$ wird zum Rhombus $A'B'C'D'$. Diese Formveränderung wird als *Schiebung* bezeichnet; sie zeigt die physikalische Bedeutung der Grössen z_y, x_z, y_x, welche also *Schiebungscomponenten* genannt werden.

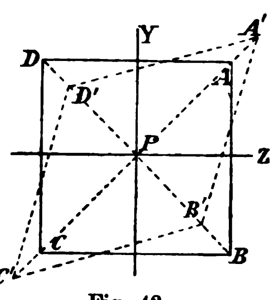


Fig. 42.

In der Lehre von der Elasticität werden nur sehr kleine Aenderungen in der Form der Körper betrachtet; die Componenten x_x, x_y u. s. w. sind dementsprechend kleine Grössen, deren zweite und höheren Potenzen vernachlässigt werden. Durch die Schiebung wird das Volumen des Körpers nicht verändert; das Quadrat mit der Fläche $4a^2$ wird zum Rhombus $A'B'C'D'$, dessen Fläche

$$2PA'.PB' = 2(a+z_y a)\sqrt{2}(a-z_y a)\sqrt{2} = 4a^2(1-z_y^2).$$

Vernachlässigt man z_y^2, so ist der Inhalt des Quadrates gleich dem des Rhombus; durch die Schiebung wird demnach das Volumen nicht verändert.

Aus der Fig. 42 ergiebt sich, dass der unendlich kleine Winkel zwischen AB und $A'B'$ gleich $a z_y / a = z_y$ ist; der rechte Winkel DAB wird bei der Formveränderung demnach um $2z_y$ vermindert, sodass $\sphericalangle D'A'B' = \sphericalangle DAB - 2z_y$ ist.

Durch die Dilatationen x_x, y_y, z_z wird das Volumen verändert, sodass das Parallelepipedon $dx\,dy\,dz$ in

$$dx\,dy\,dz(1+x_x)(1+y_y)(1+z_z)$$

verwandelt wird. Die Dilatationscomponenten sind ebenfalls sehr klein, sodass die Volumeneinheit die Vergrösserung

$$\Theta = x_x + y_y + z_z$$

erfährt. Θ ist die *räumliche Dilatation.* Wir haben auch

$$\Theta = \partial \xi / \partial x + \partial \eta / \partial y + \partial \zeta / \partial z. \tag{e}$$

dr sei ein Element einer geraden Linie, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet, so ist

$$dx = dr \cos \alpha, \quad dy = dr \cos \beta, \quad dz = dr \cos \gamma.$$

Durch die Formveränderung wird dr zu dr', welches die Winkel α', β', γ' mit den Axen bildet, so dass

$$dx + d\xi = dr' \cos \alpha'; \; dy + d\eta = dr' \cos \beta'; \; dz + d\zeta = dr' \cos \gamma',$$

wobei $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ durch die Gleichungen (d) bestimmt sind. Soll die Linie dr ihre Richtung unverändert behalten, so muss $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$ sein. Man hat

$$d\xi = d\varrho \cos \alpha, \quad d\eta = d\varrho \cos \beta, \quad d\zeta = d\varrho \cos \gamma,$$

wenn $d\varrho = d(r' - r)$ ist. $d\varrho$ ist die Verlängerung von dr und $d\varrho / dr$ ist die *Dilatation* s in der gesuchten Richtung. Wir haben demnach

$$s = d\varrho / dr.$$

Die Gleichungen (d) nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\left\{ \begin{aligned} &(x_x - s) \cos \alpha + x_y \cos \beta + x_z \cos \gamma = 0, \\ &y_x \cos \alpha + (y_y - s) \cos \beta + y_z \cos \gamma = 0, \\ &z_x \cos \alpha + z_y \cos \beta + (z_z - s) \cos \gamma = 0. \end{aligned} \right. \tag{f}$$

Die Vergleichung dieser Beziehungen mit § 26 (c) zeigt, dass sie zu denselben Resultaten wie jene führen.

In drei zu einander senkrechten Richtungen, den *Dilatationshauptaxen*, finden demnach nur Dilatationen statt; alle Linienelemente, welche parallel einer von diesen drei Richtungen sind, enthalten nach eingetretener Formveränderung dieselben Massentheilchen, welche sich vor der Deformation auf ihnen befanden, wenn wir von Rotationen absehen, welche aus den Gleichungen (d) bereits ausgesondert sind. Werden die in solcher Weise bestimmten Hauptdilatationen mit a, b, c bezeichnet, so hat man wie in § 26 (e)

$$\left\{ \begin{aligned} &a + b + c = x_x + y_y + z_z, \\ &bc + ac + ab = z_z y_y + x_x z_z + y_y x_x - z_y^2 - x_z^2 - y_x^2, \\ &abc = x_x y_y z_z + 2 z_y x_z y_x - x_x z_y^2 - y_y x_z^2 - z_z y_x^2. \end{aligned} \right. \tag{g}$$

Die erste dieser Gleichungen sagt aus, *das die räumliche Dilatation von der Lage des Coordinatensystems unabhängig ist.*

Ebenso wie in § 26 (i) die Spannungscomponenten durch die Hauptspannungen ausgedrückt sind, so können auch x_x, x_y, ... mit Hülfe der Hauptdilatationen a, b und c bestimmt werden. Bildet die Richtung von a mit den Axen Winkel, deren Cosinus l_1, m_1, n_1 sind und sind entsprechend die Cosinus der Winkel, welche b und c mit den Axen bilden l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3, so erhält man

$$\text{(h)} \quad \begin{cases} x_x = a l_1^2 + b l_2^2 + c l_3^2; & z_y = a m_1 n_1 + b m_2 n_2 + c m_3 n_3, \\ y_y = a m_1^2 + b m_2^2 + c m_3^2; & x_z = a l_1 n_1 + b l_2 n_2 + c l_3 n_3, \\ z_z = a n_1^2 + b n_2^2 + c n_3^2; & y_x = a l_1 m_1 + b l_2 m_2 + c l_3 m_3. \end{cases}$$

§ 29. Beziehungen zwischen den Spannungen und Formveränderungen.

Bei den Untersuchungen über die Formveränderungen eines elastischen Körpers hat man gefunden, dass ein gerades Prisma, auf dessen Endflächen Zugkräfte wirken, eine *Längsdilatation* und zugleich eine *Quercontraction* erfährt. Berücksichtigen wir nur Kräfte, welche so klein sind, dass die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, so ist die Verlängerung s der Längeneinheit

$$s = S / E,$$

wo E der *Elasticitätscoefficient* und S die auf die Flächeneinheit wirkende Kraft ist. Eine Längeneinheit, welche parallel mit den Endflächen ist, wird gleichzeitig verkürzt um s', und es ist

$$s' = k \,.\, S / E,$$

wo k eine Constante bedeutet. Es wird vorausgesetzt, dass der Körper isotrop ist, d. h. nach allen Richtungen und in allen Punkten gleich elastisch ist.

Wir betrachten zunächst ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind. Die Normalkräfte heissen X_x, Y_y, Z_z und eine Längeneinheit, welche der x-Axe parallel ist, soll die Verlängerung x_x bekommen; ebenso erhalten die Längeneinheiten, welche bezw.

der y- und z-Axe parallel sind, die Verlängerungen y_y und z_z. Dann haben wir

$$x_x = X_x / E - k(Y_y + Z_z) / E,$$
$$y_y = Y_y / E - k(X_x + Z_z) / E,$$
$$z_z = Z_z / E - k(X_x + Y_y) / E.$$

Die räumliche Dilatation Θ ist nach § 28 (e)

$$\Theta = x_x + y_y + z_z = (1 - 2k)(X_x + Y_y + Z_z) / E.$$

Dagegen ist

$$X_x = k E \Theta / (1 + k)(1 - 2k) + E x_x / (1 + k).$$

Setzt man

$$\lambda = k E / (1 + k)(1 - 2k), \quad \mu = \tfrac{1}{2} E / (1 + k),$$

so wird

(a) $X_x = \lambda\Theta + 2\mu x_x$; $Y_y = \lambda\Theta + 2\mu y_y$; $Z_z = \lambda\Theta + 2\mu z_z$,

und ferner durch Addition

(b) $$X_x + Y_y + Z_z = (3\lambda + 2\mu)\Theta.$$

Zur Auffindung des Zusammenhanges zwischen den Schiebungen und den Tangentialkräften kann man mit V. v. Lang[1]) folgendes Verfahren anwenden. Das Prisma $ABCD$ (Fig. 43) nimmt die Gestalt $AB'C'D'$ an, wenn auf jede Einheit der Endflächen AB und CD die Zugkraft S wirkt. Durch das Prisma werden vier ebene Schnitte EF, FG, GH und HE gelegt, welche auf einer zur Axe parallelen Ebene das Rechteck $EFGH$ begrenzen; das Rechteck $EFGH$ geht bei der Formveränderung in das Parallelogramm $E'F'G'H'$ über. Der Winkel AFE sei gleich φ, so wirkt auf die Fläche EF in der Richtung EF die Tangentialspannung T, welche nach § 23 (b) durch

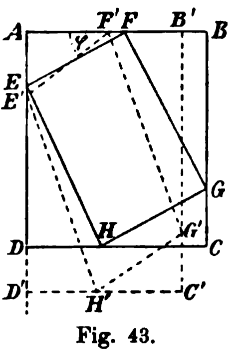


Fig. 43.

$$T = S \sin\varphi \cos\varphi$$

bestimmt ist.

Da $\sphericalangle BFG = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi$, so wirkt auf GF dieselbe Tangen-

[1]) V. v. Lang, Theoretische Physik. S. 411.

tialspannung T in der Richtung GF. Bei der Formveränderung geht der Winkel AFE in $AF'E' = \varphi + d\varphi$ über und wir haben

$$\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) = AE.(1 + s) / AF.(1 - s') = \operatorname{tg}\varphi (1 + s) / (1 - s').$$

Da nun $s = S/E$ und $s' = kS/E$ unendlich kleine Grössen sind, so ist

$$(1 + s) / (1 - s') = 1 + s + s' = 1 + (1 + k) S / E.$$

Ferner hat man

$$\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) = \big(1 + (1 + k) S / E\big) \operatorname{tg}\varphi$$

und

$$\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) = \operatorname{tg}\varphi + d\varphi / \cos^2\varphi,$$

sodass

$$d\varphi = (1 + k) S \sin\varphi \cos\varphi / E = (1 + k) T / E$$

ist. Die Aenderung des Winkels φ ist demnach der Tangentialspannung T proportional. Da auf GF dieselbe Tangentialspannung wirkt wie auf EF, so wird der Winkel BFG um $d\varphi$ vergrössert und der Winkel EFG um $2\,d\varphi$ vermindert, während der Winkel FGH um $2\,d\varphi$ vergrössert wird. Die Schiebung ist in diesem Falle gleich $2\,d\varphi$, und es ist $2\,d\varphi = 2(1 + k) T/E$. Aber $2\,d\varphi$ ist die früher eingeführte Grösse $2z_y$, wenn das Rechteck $EFGH$ der yz-Ebene parallel ist. In diesem Falle ist $T = Z_y$ und also

$$z_y = (1 + k) Z_y / E.$$

Setzen wir der Kürze wegen $\mu = \frac{1}{2} E / (1 + k)$, so wird

$$\text{(c)} \qquad Z_y = 2\mu z_y, \quad X_z = 2\mu x_z, \quad Y_x = 2\mu y_x.$$

Die Gleichungen (a) und (c) lösen die Aufgabe, die Spannungscomponenten zu finden, wenn die Formveränderungen gegeben sind und umgekehrt. Die Gleichungen enthalten nur zwei Constante λ und μ, welche von den Formveränderungen bei einfacher Dilatation in folgender Weise abhängen:

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} \lambda = kE / (1 + k)(1 - 2k); & \mu = \frac{1}{2} E / (1 + k), \\ E = (3\lambda\mu + 2\mu^2) / (\lambda + \mu); & k = \frac{1}{2}\lambda / (\lambda + \mu). \end{cases}$$

Da λ und μ positiv sind, so muss k kleiner als $\frac{1}{2}$ sein.

Die Beziehungen zwischen den elastischen Kräften und Formveränderungen können auch auf einem anderen Wege abgeleitet werden. Im Punkte P seien die Hauptspannungen

A, B und C der Grösse und der Richtung nach bekannt [vgl. § 26 (g)]. Ein unendlich kleines Parallelepipedon, dessen Kanten den Richtungen der Spannungen A, B, C parallel sind, wird in diesen drei Richtungen ausgedehnt. Die Vergrösserungen a, b und c der Längeneinheit sind parallel mit A, B und C und ebenso wie in (a) ist

(e) $A = \lambda\Theta + 2\mu a, \quad B = \lambda\Theta + 2\mu b, \quad C = \lambda\Theta + 2\mu c,$

wo $\Theta = a + b + c$ ist oder auch in Folge von § 28 (g)

$$\Theta = x_x + y_y + z_z.$$

Durch Anwendung der Formeln § 26 (i) erhält man die Gleichung

$$X_x = \lambda\Theta + 2\mu(a l_1^2 + b l_2^2 + c l_3^2),$$

die mittelst § 28 (h) übergeht in

$$X_x = \lambda\Theta + 2\mu x_x.$$

Die Ausdrücke für Y_y und Z_z ergeben sich in derselben Weise.

Nach § 26 (i) ist

$$Z_y = 2\mu(a m_1 n_1 + b m_2 n_2 + c m_3 n_3)$$

und demnach zufolge § 28 (h)

$$Z_y = 2\mu z_y.$$

Die Ausdrücke für X_z und Y_x erhalten wir in gleicher Weise.

Die Coefficienten E und k sind von der Natur der Körper abhängig. Man hat geglaubt, dass k für alle Körper gleich gross wäre. Diese Ansicht ist zuerst von Navier vertreten, der annahm, dass die Körper aus materiellen einander abstossenden Punkten beständen. Dabei kam Navier zu dem Resultat, dass $k = \frac{1}{4}$ wäre. Dieselbe Ansicht hat auch Poisson vertreten.

Während k eine reine Zahl ist, wird der Elasticitätscoefficient E durch $E = S/s$ bestimmt; $1/E$ heisst der *Elasticitätsmodul.* Die Kraft S wirkt auf die Flächeneinheit und hat nach § 3 die Dimension

$$L\,T^{-2}M / L^2 = L^{-1}T^{-2}M.$$

Da s das Verhältniss zwischen der Längenvergrösserung und der ursprünglichen Länge ist, so ist es eine reine Zahl. Demnach hat E ebenfalls die Dimension $L^{-1}T^{-2}M$. In praktischen

Einheiten bezeichnet man mit E die Anzahl der Kilogramme, welche durch Zug die Länge einer Stange verdoppeln, deren Querschnitt ein Quadratmillimeter ist. Um diese Angaben in ein absolutes Maass zu verwandeln, muss man beachten, dass die Wirkung der Schwerkraft auf ein Gramm etwa 981 Dynen, also auf ein Kilogramm 981 000 Dynen ist. Da wir annehmen müssen, dass der Querschnitt 1 qcm ist, so muss die gefundene Grösse noch mit 100 multiplicirt werden, so dass sie 98 100 000 wird. Nach Wertheim ist E für englischen Stahl in den praktischen Einheiten 17278, in absoluten also

$$17278 \,.\, 981 \,.\, 10^5 = 1{,}695 \,.\, 10^{12}.$$

Bei *flüssigen* Körpern erhalten wir einfachere Resultate. Da in diesen keine Tangentialkräfte existiren, wenn das Gleichgewicht eingetreten ist, so muss nach (c) $\mu = 0$ sein. Wird das Volumen v der Flüssigkeit durch den Druck p vermindert um dv, so ist nach (b)

(f) $$\begin{cases} -3p = -(3\lambda + 2\mu)\, dv / v \\ \text{oder, da } \mu = 0 \text{ ist,} \\ dv = pv / \lambda. \end{cases}$$

Wird z. B. die Volumeneinheit Wasser vermindert um 0,000 046, wenn der Druck um 1 Atmosphäre vermehrt wird, so ist

$$\lambda = pv / dv = 76 \,.\, 13{,}596 \,.\, 981 / 0{,}000\,46 = 2{,}204 \,.\, 10^{10}.$$

Für Gase, die dem Mariotte'schen Gesetze gehorchen, ergiebt sich, wenn der ursprüngliche Druck P ist und die Steigerung p des Druckes sehr klein ist im Vergleich zu P, nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$Pv = (P + p)(v - dv).$$

Diese Gleichung giebt unter der erwähnten Voraussetzung

$$dv = pv / P.$$

Für Gase ist also nach (f)

(g) $$P = \lambda.$$

§ 30. Die Gleichgewichtsbedingungen für einen elastischen Körper.

Wirkt auf die Masseneinheit des Körpers eine Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, so hat man nach § 25 (c)

(a) $\partial X_x / \partial x + \partial X_y / \partial y + \partial X_z / \partial z + \varrho X = 0$ u. s. w.

Nach § 29 (a) und (c) ist ferner

(b) $X_x = \lambda \Theta + 2\mu . \partial \xi / \partial x, \; Z_y = Y_z = \mu (\partial \zeta / \partial y + \partial \eta / \partial z)$ u. s. w.

Werden die Werthe für X_x u. s. w. in (a) eingesetzt, so folgt:

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) . \partial \Theta / \partial x + \mu \nabla^2 \xi + \varrho X = 0, \\ (\lambda + \mu) . \partial \Theta / \partial y + \mu \nabla^2 \eta + \varrho Y = 0, \\ (\lambda + \mu) . \partial \Theta / \partial z + \mu \nabla^2 \zeta + \varrho Z = 0. \end{cases}$$

Benutzen wir die früher für die Rotationscomponenten eingeführten Bezeichnungen

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} 2h_x = \partial \zeta / \partial y - \partial \eta / \partial z, \quad 2h_y = \partial \xi / \partial z - \partial \zeta / \partial x, \\ \qquad 2h_z = \partial \eta / \partial x - \partial \xi / \partial y, \end{cases}$$

so lauten die Gleichungen (c)

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} (\lambda + 2\mu) . \partial \Theta / \partial x + 2\mu (\partial h_y / \partial z - \partial h_z / \partial y) + \varrho X = 0, \\ (\lambda + 2\mu) . \partial \Theta / \partial y + 2\mu (\partial h_z / \partial x - \partial h_x / \partial z) + \varrho Y = 0, \\ (\lambda + 2\mu) . \partial \Theta / \partial z + 2\mu (\partial h_x / \partial y - \partial h_y / \partial x) + \varrho Z = 0. \end{cases}$$

Wird die erste Gleichung nach x, die zweite nach y und die dritte nach z differentiirt, so ergiebt sich durch Addition, wenn ϱ constant ist,

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Theta + \varrho (\partial X / \partial x + \partial Y / \partial y + \partial Z / \partial z) = 0.$$

Sind X, Y, Z die Derivirten eines Potentials Ψ und ist überall im Körper $\nabla^2 \Psi = 0$, so hat man

$$\text{(f)} \qquad \nabla^2 \Theta = 0.$$

Wir fügen noch die Gleichgewichtsbedingungen für die Grenzfläche des Körpers hinzu. Der auf das Oberflächenelement dS wirkenden Kraft, deren Componenten P', Q', R' sind, wird das Gleichgewicht gehalten durch die elastischen Kräfte, die auf die an dS liegenden Theile wirken. Sind X_x', Y_y' u. s. w. die Componenten der elastischen Kräfte, so ist

$$\text{(g)} \qquad P' = X_x' \cos \alpha + X_y' \cos \beta + X_z' \cos \gamma.$$

Aehnliche Werthe ergeben sich für Q' und R'. α, β, γ sind die Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale mit den Coordinatenaxen bildet.

Wir setzen

(h) $$\xi = a x, \quad \eta = b y, \quad \zeta = c z,$$

wo a, b und c constant sind. ξ, η und ζ sind also lineare Functionen von x, y und z, und zwar hängt ξ nur von x, η nur von y, ζ nur von z ab. In Bezug auf die Gleichungen § 28 (b) finden also nur Dilatationen ohne Schiebungen statt. Die räumliche Dilatation ist $\Theta = a + b + c$; demnach genügen die für ξ, η, ζ angenommenen Werthe den Gleichungen (c), wenn wir von der Wirkung äusserer Kräfte absehen. Ferner ist

$$X_x = \lambda(a + b + c) + 2\mu a; \quad Y_y = \lambda(a + b + c) + 2\mu b;$$
$$Z_z = \lambda(a + b + c) + 2\mu c.$$
$$Y_z = 0, \quad Z_x = 0, \quad X_y = 0.$$

Es sei $X_x = S$, $Y_y = 0$, $Z_z = 0$, so ist $b = c$ und

$$S = \lambda(a + 2b) + 2\mu a; \quad 0 = \lambda(a + 2b) + 2\mu b.$$

Die letztere Gleichung ergiebt

$$b / a = -\tfrac{1}{2}\lambda / (\lambda + \mu) = -k,$$

und die erstere

$$S = a(3\lambda\mu + 2\mu^2) / (\lambda + \mu) = E a.$$

Wir haben damit die Gesetze über die Dehnung eines elastischen Körpers von prismatischer Form erhalten.

§ 31. Die Spannungen in einer Kugelschale.

Die Kugelschale sei begrenzt von zwei concentrischen Kugelflächen, die innere habe den Radius r_1, die äussere den Radius r_2. Auf die innere Fläche wirkt ein hydrostatischer constanter *Druck* p_1, auf die äussere ein ebensolcher p_2. Die Druckkräfte p_1 und p_2 sind senkrecht zur Fläche. Das Centrum O der Kugel sei der Coordinatenanfangspunkt. Ein willkürlich angenommener Punkt in der Kugelschale habe von O den Abstand r. Unter der über den Druck gemachten Voraussetzung entfernen sich alle Punkte, welche in derselben Kugelfläche mit dem Centrum O liegen, gleich weit vom Centrum.

Die Verrückung des betrachteten Punktes sei εr, wo ε eine sehr kleine Grösse ist. Wir haben dann

(a) $$\xi = \varepsilon x, \quad \eta = \varepsilon y, \quad \zeta = \varepsilon z.$$

Da ε eine Function allein von r ist, so kann man setzen

$$\xi = \varepsilon r \,.\, x/r = d\varphi/dr \,.\, \partial r/\partial x = \partial\varphi/\partial x,$$

wo φ eine neue Function von r ist. η und ζ werden in derselben Weise dargestellt, sodass

(b) $$\xi = \partial\varphi/\partial x, \quad \eta = \partial\varphi/\partial y, \quad \zeta = \partial\varphi/\partial z$$

ist. Demnach ist

(c) $$\Theta = \nabla^2\varphi.$$

Die Gleichungen § 30 (c) lauten, wenn die Wirkung der Schwerkraft unberücksichtigt bleibt,

$$(\lambda + 2\mu) \,.\, \nabla^2 \partial\varphi/\partial x = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \,.\, \nabla^2 \partial\varphi/\partial y = 0,$$
$$(\lambda + 2\mu) \,.\, \nabla^2 \partial\varphi/\partial z = 0,$$

sodass

(d) $$\Theta = \nabla^2\varphi = a$$

ist, wo a eine Constante bedeutet.

Nach § 30 (b) sind die Spannungscomponenten

(e) $$\begin{cases} X_x = \lambda a + 2\mu \,.\, \partial^2\varphi/\partial x^2; & Z_y = 2\mu \,.\, \partial^2\varphi/\partial y\,\partial z; \\ Y_y = \lambda a + 2\mu \,.\, \partial^2\varphi/\partial y^2; & X_z = 2\mu \,.\, \partial^2\varphi/\partial x\,\partial z; \\ Z_z = \lambda a + 2\mu \,.\, \partial^2\varphi/\partial z^2; & Y_x = 2\mu \,.\, \partial^2\varphi/\partial x\,\partial y. \end{cases}$$

Die Spannung in einem Flächenelemente, welches senkrecht zu r ist, ergiebt sich aus § 24 (a), indem man

$$\cos\alpha = x/r, \quad \cos\beta = y/r, \quad \cos\gamma = z/r$$

setzt. Die Componenten der Spannung seien P, Q und R, so ist z. B.

$$P = \lambda a \,.\, x/r + 2\mu\,(x/r \,.\, \partial^2\varphi/\partial x^2 + y/r \,.\, \partial^2\varphi/\partial x\partial y + z/r \,.\, \partial^2\varphi/\partial x\partial z).$$

Bei Benutzung der Gleichungen

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 = x^2/r^2 \,.\, d^2\varphi/dr^2 - x^2/r^3 \,.\, d\varphi/dr + 1/r \,.\, d\varphi/dr,$$
$$\partial^2\varphi/\partial x\,\partial y = xy/r^2 \,.\, d^2\varphi/dr^2 - xy/r^3 \,.\, d\varphi/dr,$$
$$\partial^2\varphi/\partial x\,\partial z = xz/r^2 \,.\, d^2\varphi/dr^2 - xz/r^3 \,.\, d\varphi/dr,$$

wird

$$P = (\lambda a + 2\mu \,.\, d^2\varphi/dr^2) \,.\, x/r.$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für Q und R. Demnach wirkt auf das erwähnte Flächenelement eine Hauptspannung

(f) $$A = \lambda a + 2\mu . d^2\varphi / dr^2.$$

Für ein Flächenelement, das r enthält, ergeben sich die Componenten in derselben Weise. Sind α, β, γ die Winkel, welche die Normale des Flächenelementes mit den Axen bildet, so ist

$$P = \lambda a \cos\alpha + 2\mu(\partial^2\varphi / \partial x^2 . \cos\alpha + \partial^2\varphi / \partial x \partial y . \cos\beta + \partial^2\varphi / \partial x \partial z . \cos\gamma).$$

Beachtet man, dass in diesem Falle

$$\cos\alpha . x / r + \cos\beta . y / r + \cos\gamma . z / r = 0$$

ist und benutzt man die oben für die Differentialquotienten gegebenen Ausdrücke, so wird

$$P = (\lambda a + 2\mu / r . d\varphi / dr) \cos\alpha.$$

Q und R ergeben sich, indem man α bezw. mit β und γ vertauscht. Die auf das Element wirkende Hauptspannung B ist demnach

(g) $$B = \lambda a + 2\mu / r . d\varphi / dr.$$

Nach (d) und § 15 (l) ist

$$\nabla^2\varphi = 1 / r . d^2(r\varphi) dr^2 = a$$

und also

(h) $$d\varphi / dr = \tfrac{1}{3} ar + b / r^2; \quad d^2\varphi / dr^2 = \tfrac{1}{3} a - 2b / r^3.$$

Aus (f) und (g) folgt, dass

$$A = (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu) a - 4\mu b / r^3; \quad B = (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu) a + 2\mu b / r^3.$$

Für $r = r_1$ ist $A = -p_1$ und für $r = r_2$ ist $A = -p_2$, also haben wir

$$a = 3 / (3\lambda + 2\mu) . (p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) / (r_2^3 - r_1^3),$$
$$b = 1 / 4\mu . (p_1 - p_2) r_1^3 . r_2^3 / (r_2^3 - r_1^3)$$

und ferner

$$A = (p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) / (r_2^3 - r_1^3) - (p_1 - p_2) r_1^3 r_2^3 / (r_2^3 - r_1^3) . 1 / r^3,$$
$$B = (p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) / (r_2^3 - r_1^3) + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2) r_1^3 r_2^3 / (r_2^3 - r_1^3) . 1 / r^3.$$

§ 32. Torsion.

Die Axe eines Kreiscylinders falle mit der z-Axe zusammen; der Kreis, in welchem die xy-Ebene den Cylinder schneidet, sei die Endfläche des Cylinders und werde fest gehalten. Ein Punkt im Abstande r von der Axe beschreibt bei der Torsion einen Kreisbogen $r\varphi$, der parallel mit der xy-Ebene ist und dessen Centrum in der z-Axe liegt. Der Winkel φ ist bei einer einfachen Torsion dem Abstande des Punktes von der xy-Ebene proportional, sodass $\varphi = kz$ ist, wo k eine Constante bedeutet. Die Verrückung des betrachteten Punktes ist krz und ihre Componenten ξ, η, ζ sind

$$\text{(a)} \qquad \xi = -kyz, \quad \eta = kxz, \quad \zeta = 0.$$

Daraus folgt, dass die räumliche Dilatation Θ Null ist, d. h. *bei der Torsion findet keine Veränderung des Volumens statt.* Ferner werden nach § 30 (b)

$$X_x = 0, \quad Y_y = 0, \quad Z_z = 0,$$

und demnach wirken keine Normalkräfte auf die Flächen, welche den Coordinatenebenen parallel sind. Dagegen ist

$$Z_y = \mu kx, \quad X_z = -\mu ky, \quad Y_x = 0.$$

Auf ein zur z-Axe senkrechtes Flächenelement wirken die Tangentialkräfte $Y_z = +\mu kx$ und $X_z - \mu ky$, deren Resultante μkr sowohl zum Radius r wie zur z-Axe senkrecht ist.

Durch Anwendung von § 24 (a) gelangen wir zu demselben Resultat. Wir haben nämlich

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} P = -\mu ky\cos\gamma, \quad Q = \mu kx\cos\gamma, \\ R = -\mu ky\cos\alpha + \mu kx\cos\beta. \end{cases}$$

Für die Spannung an der Cylinderfläche selbst ist

$$\cos\alpha = x/r, \quad \cos\beta = y/r, \quad \cos\gamma = 0$$

zu setzen. Dann wird

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0.$$

Demnach wirkt keine Kraft auf ein Flächenelement, welches zum Radius senkrecht ist oder einem Kreiscylinder angehört, dessen Axe die z-Axe ist.

Zur Auffindung der Flächenelemente, auf welche nur

Normalkräfte wirken, benutzen wir die Gleichung § 26 (d), welche im vorliegenden Falle lautet

$$S^3 - \mu^2 k^2 r^2 S = 0.$$

Sind A, B und C die Wurzeln dieser Gleichung, so kann man setzen

$$A = 0, \quad B = \mu k r, \quad C = -\mu k r.$$

Die Winkel zwischen den Axen und der Normalen eines dieser Flächenelemente seien α, β, γ, so ist

$$S \cos\alpha = -\mu k y \cos\gamma, \quad S \cos\beta = \mu k x \cos\gamma,$$
$$S \cos\gamma = -\mu k y \cos\alpha + \mu k x \cos\beta.$$

Löst man diese Gleichungen mit Rücksicht auf α, β und γ auf, so ergiebt sich, dass die Spannung $A = 0$ auf ein zum Radius r senkrechtes Flächenelement wirkt; während B und C in den Richtungen zweier Linien wirken, welche zum Radius r senkrecht sind und mit der z-Axe Winkel von 45° bilden. B ist mit der Torsion gleichgerichtet, C ist derselben entgegengesetzt gerichtet.

Setzen wir nämlich $y = 0$ und $x = r$ und betrachten also einen Punkt in der Cylinderfläche, welcher in der xz-Ebene liegt, so haben wir

$$S \cos\alpha = 0, \quad S \cos\beta = \mu k r \cos\gamma, \quad S \cos\gamma = \mu k r \cos\beta.$$

Für $S = 0$ ist $\gamma = \beta = \frac{1}{2}\pi$; für $S = \pm \mu k r$ ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\cos\beta = \cos\gamma$. Da $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist, wird

$$\cos\beta = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Das Moment M der Kräfte, welches zur Torsion des Cylinders erforderlich ist, wird

$$M = \int_0^R \mu k r . 2\pi r \, dr . r,$$

wo R der Radius des Cylinders ist. Man hat

$$M = \tfrac{1}{2}\pi \mu k R^4 = \pi \varphi \mu R^4 / 2 l,$$

wenn l die Länge des Cylinders und φ der *Torsionswinkel* ist.

Der Factor von φ

$$\tau = \pi \mu R^4 / 2 l$$

heisst *Torsionsmoment* τ des Cylinders, welches ausser von den

Dimensionen des Cylinders nur von einer Elasticitätsconstanten μ abhängig ist. Aus diesem Grunde wird μ auch als *Torsionscoefficient* bezeichnet.

§ 33. Biegung.

Die allgemeine Behandlung der Biegung eines Prismas lässt sich nicht streng durchführen, wir wollen uns auf eine angenäherte Berechnung in einem sehr einfachen Falle[1]) beschränken. $ABCD$ (Fig. 44) sei das betrachtete Prisma, dessen Längsrichtung horizontal ist und mit der Axe Ox zusammenfällt. Die Axe Oz ist senkrecht nach oben gerichtet, die Axe Oy ist also auch horizontal. Nach der Biegung befindet sich der Schnitt AB in $A'B'$, welcher mit AB in derselben Ebene liegen möge. Ein anderer ebener zur Axe senkrechter Schnitt FG gelangt in Folge der Biegung nach $F'G'$; wir setzen voraus, dass der Schnitt $F'G'$ auch eben ist und dass die Ebene $F'G'$ die Ebene $A'B'$ in einer durch P gehenden horizontalen Linie schneidet. Diese Schnittlinie soll allen zur Axe des Prisma senkrecht gelegten Schnittebenen gemeinsam sein.

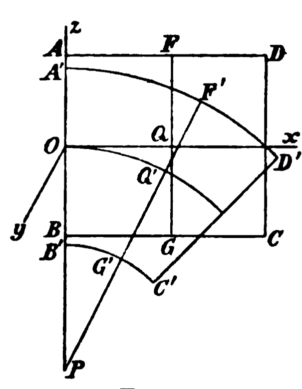


Fig. 44.

Die Theile des Prisma, welche sich ursprünglich in OQ befanden, liegen nach der Biegung in OQ', welches wir als Kreisbogen mit dem Mittelpunkte in P betrachten wollen. Eine solche Biegung heisst eine circulare. Alle Linien im Prisma, welche ursprünglich parallel mit der x-Axe sind, werden zu Kreisbogen, deren Mittelpunkte in der durch P gehenden Geraden liegen.

Ein beliebiger Punkt M des Schnittes AB hat ursprünglich die Coordinaten $0, y, z$, nach der Biegung sind dieselben $0, y + \eta_0, z + \zeta_0$. Dieselben Veränderungen gehen in den übrigen Querschnitten vor, z. B. in FG. Ein Punkt M' in FG, welcher

[1]) Barré de Saint-Venant, Mem. prés. par div. Savants. T. 14. Paris 1856.

ursprünglich die Coordinaten x, y, z hatte, hat nach der Biegung die Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$. Wir setzen $\sphericalangle OPQ' = \varphi$, $OP = \varrho$ und ausserdem $OQ = OQ'$, was erlaubt ist, da es stets eine Linie giebt, welche bei der Biegung ihre Länge nicht ändert, und da wir noch keine Annahme über die Lage der x-Axe gemacht haben. Wir erhalten also

$$x + \xi = (\varrho + z + \zeta_0) \sin \varphi,$$
$$y + \eta = y + \eta_0,$$
$$z + \zeta = z + \zeta_0 - (\varrho + z + \zeta_0)(1 - \cos \varphi).$$

Ist ϱ sehr gross im Vergleich zu x, z und ζ_0, so kann man setzen

$$\sin \varphi = x / \varrho; \quad 1 - \cos \varphi = x^2 / 2 \varrho^2$$

und

(a) $$\xi = xz / \varrho, \quad \eta = \eta_0, \quad \zeta = \zeta_0 - x^2 / 2 \varrho.$$

Man kann nun η_0 und ζ_0 so bestimmen, dass alle Spannungscomponenten mit Ausnahme von X_x verschwinden und demnach setzen

1. $X_x = \lambda \Theta + 2 \mu z / \varrho = S$;
2. $Y_y = \lambda \Theta + 2 \mu \, \partial \eta_0 / \partial y = 0$,
3. $Z_z = \lambda \Theta + 2 \mu \, \partial \zeta_0 / \partial z = 0$,
4. $Z_y = \mu (\partial \zeta_0 / \partial y + \partial \eta_0 / \partial z) = 0$,
5. $X_z = \mu \, \partial \zeta_0 / \partial x = 0$,
6. $Y_x = \mu \, \partial \eta_0 / \partial x = 0$.

Ferner ist

$$\Theta = z / \varrho + \partial \eta_0 / \partial y + \partial \zeta_0 / \partial z.$$

Aus 2. und 3. ergiebt sich

(b) $$\partial \eta_0 / \partial y = \partial \zeta_0 / \partial z = - \tfrac{1}{2} \lambda / (\lambda + \mu) . z / \varrho.$$

Durch Vergleichung von (b) mit § 29 (d) ergiebt sich, dass die Quercontraction sich zur Längendilatation wie $\frac{1}{2} \lambda$ zu $\lambda + \mu$ verhält oder wie $k : 1$. Da ferner η_0 und ζ_0 nicht von x abhängen, so ist nach (b)

$$\eta_0 = - k y z / \varrho + f(z), \quad \zeta_0 = - k z^2 / 2 \varrho + g(y),$$

wo f und g zwei unbekannte Functionen bezeichnen. Nach (4) ist

$$- k y / \varrho + f'(z) + g'(y) = 0$$

und demnach $f'(z) = c$, wo c eine unbekannte Constante ist. Hieraus folgt, dass

$$f(z) = cz + c', \quad g(y) = ky^2/2\varrho - cy + c''$$

und ferner

$$\eta_0 = -kyz/\varrho + cz + c'; \quad \zeta_0 = k(y^2 - z^2)/2\varrho - cy + c''.$$

Im Punkte O oder für $y = z = 0$ sind $\eta_0 = 0$ und $\zeta_0 = 0$ und demnach müssen auch $c' = 0$ und $c'' = 0$ sein. Da das Prisma sich nicht um die x-Axe bei der Biegung dreht, so muss für $y = 0$ auch $\eta_0 = 0$ sein und demgemäss ist $c = 0$. Wir erhalten also

(c) $$\eta_0 = -kyz/\varrho, \quad \zeta_0 = k(y^2 - z^2)/2\varrho$$

und ferner nach (a)

(d) $$\xi = xz/\varrho, \quad \eta = -kyz/\varrho, \quad \zeta = k(y^2 - z^2)/2\varrho - x^2/2\varrho.$$

Diese Werthe für ξ, η und ζ befriedigen die Gleichungen § 30 (c), da nach Voraussetzung $X = Y = Z = 0$ ist. Die Gleichungen 1—6 zeigen, dass die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Aus (1) und (b) ergiebt sich, dass

$$X_x = S = (3\lambda\mu + 2\mu^2)/(\lambda + \mu) . z/\varrho$$

ist. Führen wir nach § 29 (d) den allgemeinen Elasticitätscoefficienten E ein, so ist

(e) $$S = Ez/\varrho.$$

Die Resultante R der Kräfte S ist

(f) $$R = E/\varrho . \int z . dy\,dz,$$

welche gleich Null ist, wenn die x-Axe durch den Schwerpunkt des Prisma geht. Setzen wir dieses voraus und bestimmen wir dann das Moment M der Kräfte S in Bezug auf eine horizontal durch den Schwerpunkt gehende Linie, so wird

$$M = \int Sz\,dy\,dz = E/\varrho . \int z^2\,dy\,dz = EJ/\varrho,$$

wo J das Trägheitsmoment des Schnittes ist. Um das Prisma so zu biegen, dass eine Axe durch den Schwerpunkt des Prisma in einen Kreisbogen mit dem Radius ϱ übergeht, muss auf jede Endfläche eine drehende Kraft vom Momente M wirken: die Axen der Drehkräfte stehen zur Kreisebene senkrecht, sind aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Bei der Biegung erfährt der Querschnitt im allgemeinen eine merkbare Veränderung. Da die Theile auf der convexen Seite des Prisma ausgedehnt, die Theile auf der concaven

Seite zusammengedrückt werden, so ziehen sich die ersteren in den Richtungen der y- und z-Axe zusammen, die letzteren dehnen sich aus. Ist z. B. der Querschnitt ein Rechteck $ABCD$ wie in Fig. 45, so nimmt dasselbe die Gestalt $A'B'C'D'$ an. Die beiden ursprünglich ebenen Flächen, deren Projectionen in der Figur durch AB und CD dargestellt sind, gehen in doppeltgekrümmte Flächen über. $A'B'$ und $C'D'$ können als Kreisbogen mit dem Mittelpunkt E betrachtet werden, während $A'D'$ und $B'C'$ gerade Linien bleiben, die sich in E schneiden. $A'D'$ und $B'C'$ behalten ihre Länge, während AB verkürzt und CD verlängert wird. Ist $z = \frac{1}{2} BC$, so ergiebt sich aus der Bedeutung von k (vergl. § 29), dass

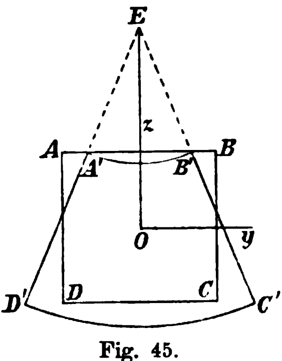


Fig. 45.

$$A'B' = AB(1 - kz/\varrho), \quad C'D' = CD(1 + kz/\varrho).$$

Ist $OE = \varrho'$, so wird

$$A'B'/C'D' = (\varrho' - z)/(\varrho' + z) = (1 - kz/\varrho)/(1 + kz/\varrho),$$

woraus $\varrho = k\varrho'$ folgt.

Diese Beziehung hat man zur Bestimmung von k für Glasprismen angewandt.

§ 34. Die Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers.

Die Resultante, mit welcher die elastischen Kräfte auf ein unendlich kleines Volumenelement dv eines elastischen Körpers in der Richtung der x-Axe wirken, ist nach § 25

$$(\partial X_x/\partial x + \partial X_y/\partial y + \partial X_z/\partial z)\,dv.$$

Wirken ausserdem anziehende oder abstossende Kräfte, deren Componente in der Richtung der x-Axe X ist, so wirkt auf das Element dv in derselben Richtung noch die Kraft $X.dv.\varrho$, wenn ϱ die Dichte des Körpers ist. Die x-Componente der wirkenden Kräfte ist demnach

$$(\partial X_x/\partial x + \partial X_y/\partial y + \partial X_z/\partial z + \varrho X)\,dv.$$

Ist diese Resultante nicht Null, so findet in der Richtung

der x-Axe Bewegung statt, und die dem betrachteten Theilchen des Körpers in der Zeiteinheit mitgetheilte Bewegungsmenge ist

$$\varrho\, dv\, d^2(x+\xi)\,/\,dt^2 = \varrho\, dv\, d^2\xi\,/\,dt^2,$$

wo t die Zeit bedeutet. Demnach ist

$$\varrho\, d^2\xi\,/\,dt^2 = \partial X_x\,/\,\partial x + \partial X_y\,/\,\partial y + \partial X_z\,/\,\partial z + \varrho X.$$

Werden die Spannungscomponenten durch ξ, η und ζ nach § 30 (b) ausgedrückt, so ergeben sich die Gleichungen

(a) $$\varrho\,\ddot{\xi} = (\lambda+\mu)\,.\,\partial\Theta\,/\,\partial x + \mu\,\nabla^2\xi + \varrho X.$$

Die Gleichungen für $\ddot{\eta}$ und $\ddot{\zeta}$ lauten ganz ebenso.

Entsprechend § 30 (e) nehmen die Gleichungen (a) die Form an:

(b) $$\varrho\,\ddot{\xi} = (\lambda+2\mu).\partial\Theta\,/\,\partial x + 2\mu(\partial h_y\,/\,\partial z - \partial h_z\,/\,\partial y) + \varrho X.$$

Hat die Kraft, deren Componenten X, Y und Z sind, ein Potential, ist also

$$X = -\partial\Psi\,/\,\partial x,\quad Y = -\partial\Psi\,/\,\partial y,\quad Z = -\partial\Psi\,/\,\partial z,$$

so ergiebt sich durch Differentiation der Gleichungen (b) bezw. nach x, y, z und durch Addition

(c) $$\varrho\,\ddot{\Theta} = (\lambda+2\mu)\,\nabla^2\Theta - \varrho\,\nabla^2\Psi.$$

Im Folgenden setzen wir voraus, dass keine äusseren Kräfte wirken; dann sind die Componenten X, Y, Z Null. Dadurch fällt $\nabla^2\Psi$ aus der Gleichung (c) heraus.

§ 35. Ebene Wellen in einem unbegrenzten Körper.

Diese Bewegung hat Lamé[1]) in folgender Weise behandelt. Eine ebene Welle pflanze sich in einer Richtung fort, welche mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei V. Die Schwingungsrichtung bilde mit den Axen die Winkel a, b, c. Ist u der Abstand eines Punktes von seiner Gleichgewichtslage, U die *Amplitude* und T die *Schwingungsdauer*, so kann der Schwingungszustand im Anfangspunkte ausgedrückt werden durch

$$u = U\cos(2\pi t\,/\,T).$$

---

[1]) Lamé, Théorie de l'élasticité. p. 188. Paris 1866.

In einem willkürlichen Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, ist

$$\text{(a)} \qquad u = U\cos\left\{2\pi / T.\left(t - \frac{(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{V}\right)\right\}.$$

Wir haben ferner

$$\text{(b)} \qquad \xi = u\cos a, \quad \eta = u\cos b, \quad \zeta = u\cos c.$$

Wird der Winkel zwischen der Schwingungs- und Fortpflanzungsrichtung mit φ bezeichnet, so ist

$$\cos\varphi = \cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma.$$

Wir setzen der Kürze wegen

$$s = U\sin\left\{2\pi / T.\left(t - \frac{(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{V}\right)\right\}$$

und erhalten

$$\theta = 2\pi s / TV.\cos\varphi, \quad \partial\Theta / \partial x = -4\pi^2 u / T^2 V^2.\cos\alpha\cos\varphi,$$
$$\nabla^2\xi = -4\pi^2 u / T^2 V^2.\cos a, \quad \xi = -4\pi^2 u / T^2.\cos a.$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen und der entsprechenden für η und ζ erhalten wir aus § 34 (a)

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} (\lambda + \mu)\cos\alpha\cos\varphi + (\mu - \varrho V^2)\cos a = 0, \\ (\lambda + \mu)\cos\beta\cos\varphi + (\mu - \varrho V^2)\cos b = 0, \\ (\lambda + \mu)\cos\gamma\cos\varphi + (\mu - \varrho V^2)\cos c = 0. \end{cases}$$

Werden diese Gleichungen bezw. mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multiplicirt und dann addirt, so ergiebt sich

$$(\lambda + 2\mu - \varrho V^2)\cos\varphi = 0.$$

Wir haben also entweder

$$\text{(d) (e)} \qquad \varrho V^2 = \lambda + 2\mu \quad \text{oder} \quad \cos\varphi = 0.$$

Im ersten Falle lauten die Gleichungen (c)

$$\cos a = \cos\alpha\cos\varphi, \quad \cos b = \cos\beta\cos\varphi, \quad \cos c = \cos\gamma\cos\varphi.$$

Werden die rechten und linken Seiten dieser Gleichungen quadrirt und addirt, so ergiebt sich

$$\text{(f)} \qquad \cos^2\varphi = 1,$$

woraus folgt, dass entweder $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ ist. Die Schwingungen erfolgen also in der Fortpflanzungsrichtung, oder sie sind *Longitudinalschwingungen*. Im zweiten Falle ist da-

gegen $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, d. h. die Schwingungen erfolgen senkrecht zu der Fortpflanzungsrichtung und heissen *Transversalschwingungen.*

Longitudinalschwingungen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Ω für diese Schwingungen ist durch (d) bestimmt

$$\text{(g)} \qquad \Omega = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \varrho}.$$

Demnach findet Verdichtung und Verdünnung statt, da

$$\Theta = 2\pi / T\Omega . U \sin \left\{ 2\pi / T . \left(t - \frac{(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)}{\Omega} \right) \right\} \text{ ist.}$$

Zur Bestimmung der Spannungen nehmen wir an, dass die Welle sich in der Richtung einer der Coordinatenaxen, etwa der z-Axe, fortpflanzt. In diesem Falle ist

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = U \cos\{2\pi / T . (t - z / \Omega)\}.$$

Nach § 30 (b) sind sämmtliche Tangentialkräfte Null, die Normalkräfte sind

$$\text{(h)} \qquad X_x = Y_y = 2\pi\lambda / T\Omega . U \sin\{2\pi / T . (t - z / \Omega)\},$$

$$\text{(i)} \qquad Z_z = 2\pi(\lambda + 2\mu) / T\Omega . U \sin\{2\pi / T . (t - z / \Omega)\}.$$

Transversalschwingungen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω ergiebt sich aus (c)

$$\text{(k)} \qquad \omega = \sqrt{\mu / \varrho}.$$

Da für diese Schwingungen $\cos\varphi = 0$ ist, so wird auch $\Theta = 0$, d. h. es finden weder Verdichtungen noch Verdünnungen statt. Bewegt sich die Welle in der Richtung der z-Axe und sind zugleich die Schwingungen mit der x-Axe parallel, so ist

$$\xi = U \cos\{2\pi / T . (t - z / \omega)\}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Alle Spannungscomponenten verschwinden mit Ausnahme der Tangentialkraft Z_x.

$$\text{(l)} \qquad Z_x = 2\pi\mu / T\omega . U \sin\{2\pi / T . (t - z / \omega)\}.$$

In einem festen Körper können also zwei verschiedene Wellenbewegungen auftreten, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten Ω und ω fortpflanzen. Nach den Formeln (g) und (k) ist die Geschwindigkeit Ω der Longitudinalschwingungen immer grösser als die Geschwindigkeit ω der Transversalschwingungen. In den Flüssigkeiten und Gasen treten nur Longitudinalschwingungen auf, da für diese Körper $\mu = 0$ ist.

Für die Gase ist nach § 29 (g) $\lambda = P$, und demnach ist die Schallgeschwindigkeit Ω in der Luft

(m) $$\Omega = \sqrt{P / \varrho}.$$

Hier muss P in absoluten Einheiten ausgedrückt werden. Nach Regnault ist die Dichte der atmosphärischen Luft in Paris bei einem Drucke von 76 cm Quecksilber und bei einer Temperatur von 0° C. gleich 0,0012932. Da die Beschleunigung der Schwerkraft in Paris 980,94 beträgt, so ist der Luftdruck auf ein Quadratcentimeter gleich 76.13,596.980,94 in absoluten Einheiten. Demnach ist die Dichte ϱ der Luft bei einem Drucke P in absoluten Einheiten auf ein Quadratcentimeter

(n) $$\varrho = 0{,}001\,293\, P / 76 \,.\, 13{,}596 \,.\, 980{,}94 = P \,.\, 1{,}2759 \,.\, 10^{-9}.$$

Mit Berücksichtigung dieses Werthes wird

$$\Omega = 27\,996 \text{ cm}$$

oder nahezu 280 Meter in der Secunde bei 0° C. Lufttemperatur. Da die Dichte der Luft bei t^0 C.

$$\varrho = P \,.\, 1{,}2759 \,.\, 10^{-9} / (1 + \alpha t)$$

ist, so wird die Schallgeschwindigkeit bei t^0

$$\Omega = 27\,996 / \sqrt{1 + \alpha t},$$

wo α der Ausdehnungscoefficient 0,00366 der Luft ist. Die aus der Theorie sich ergebenden Resultate stimmen nicht mit den durch die Versuche gefundenen. Die Beobachtungen zeigen, dass Ω etwa 330 ist. Der Grund, warum Theorie und Beobachtungen nicht übereinstimmen, wird später in der Wärmelehre besprochen werden.

Die Schallgeschwindigkeit im Wasser ergiebt sich in gleicher Weise. Zunächst ist für Wasser bei 15° C. $\lambda = 2{,}22 \,.\, 10^{10}$. Bei derselben Temperatur ist $\varrho = 0{,}999\,173$, und also wird

$$\Omega = 149\,060 \text{ cm}.$$

Colladon und Sturm fanden bei ihren Versuchen über die Schallgeschwindigkeit im Genfersee bei 8,1° C. $\Omega = 143\,500$ Centimeter; der Unterschied zwischen dem beobachteten und berechneten Werth erklärt sich durch den Temperaturunter-

schied, da λ für Wasser rasch wächst mit steigender Temperatur.[1])

Ueber die Wellenbewegung in grossen Metallmassen sind keine Versuche angestellt, dagegen ist die Schallgeschwindigkeit in einem Metalldrahte bestimmt worden. In einem solchen Körper pflanzt sich jedoch der Schall mit einer anderen Geschwindigkeit fort wie in einer unbegrenzten Masse. Ist der Draht parallel der z-Axe und wird nur die Bewegung der Theilchen in der Richtung dieser Axe berücksichtigt, so ist nach der üblichen Bezeichnungsweise die Spannung Z_z im Abstande z von der xy-Ebene

$$Z_z = E \partial \zeta / \partial z.$$

Im Abstande $(z + dz)$ ist die Spannung

$$Z_z + \partial Z_z / \partial z . dz = E(\partial \zeta / \partial z + \partial^2 \zeta / \partial z^2 . dz).$$

Auf ein Stück des Drahtes von der Länge dz und dem Querschnitte A wirkt demnach eine Kraft

$$A E \partial^2 \zeta / \partial z^2 . dz.$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\varrho A . dz . \dot{\zeta} = A E \partial^2 \zeta / \partial z^2 . dz$$

oder

(o) $$\zeta = V^2 \partial^2 \zeta / \partial z^2,$$

wo $V = \sqrt{E / \varrho}$ ist. Das Integral der Differentialgleichung (o) lautet

(p) $$\zeta = \cos\{2\pi / \lambda . (t - z / V)\};$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V ergiebt sich aus der Gleichung (p).

Nach den Untersuchungen von Wertheim stimmt die nach (p) berechnete Geschwindigkeit hinreichend genau mit der beobachteten überein.

§ 36. Andere Wellenbewegungen.

Kugelförmige Wellen. Wir untersuchen die Verhältnisse, unter welchen sich kugelförmige Wellen in einem unbegrenzten elastischen Körper ausbreiten, wenn die Schwingungsrichtung

---

[1]) Fogliani und Vicentini, Wied. Beibl. Bd. 8. S. 794.

für alle Theilchen durch denselben Punkt geht, welcher der Coordinatenanfangspunkt sein soll. Gleichwie in § 31 (b) setzen wir

(a) $$\xi = \partial\varphi / \partial x, \quad \eta = \partial\varphi / \partial y, \quad \zeta = \partial\varphi / \partial z,$$

wo φ eine unbekannte Function von t und vom Abstande r des betrachteten Punktes vom Coordinatenanfangspunkte ist. Die Bewegungsgleichungen § 34 (b) ergeben

(b) $$\ddot{\varphi} = \Omega^2 \nabla^2 \varphi.$$

Im vorliegenden Falle können wir nach § 15 (l)

$$\nabla^2 \varphi = 1 / r \, . \, \partial^2 (r\varphi) / \partial r^2$$

setzen, und demnach ist

(c) $$\partial^2 (r\varphi) / \partial t^2 = \Omega^2 \partial^2 (r\varphi) / \partial r^2.$$

Dieser Gleichung genügt

(d) $$\varphi = a / r \, . \cos\{2\pi / T \, . (t - r / \Omega)\},$$

wo a eine Constante ist und T die Schwingungsdauer bedeutet. Der Abstand u eines Punktes von seiner Gleichgewichtslage ist

$$u = \partial\varphi / \partial r = - a / r^2 \, . \cos\{2\pi / T \, . (t - r / \Omega)\}$$
$$+ 2\pi a / B r \, . \sin\{2\pi / T \, . (t - r / \Omega)\},$$

wo $B = \Omega T$. Ist r sehr viel grösser als die Wellenlänge, so kann man das erste Glied auf der rechten Seite fortlassen und hat

$$u = A / r \, . \sin\{2\pi / T \, . (t - r / \Omega)\}.$$

Wir erhalten also eine Wellenbewegung mit kugelförmigen Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit Ω fortpflanzen.

Da die Ausdrücke (a) den Bewegungsgleichungen genügen, wenn φ den in (d) angegebenen Werth hat, so werden diese Gleichungen auch erfüllt, wenn φ durch $\partial\varphi / \partial x$ oder durch einen anderen in Bezug auf eine oder mehrere Coordinaten genommenen Differentialquotienten ersetzt wird.

Torsionsschwingungen. Die Axe eines Kreiscylinders falle mit der z-Axe zusammen und die Theile desselben schwingen in Kreisbogen um dieselbe Axe. Die Componenten der Verrückung eines Theilchens aus der Gleichgewichtsstellung können, wie in § 32 (a), ausgedrückt werden durch:

(e) $$\xi = - \varphi y, \quad \eta = \varphi x, \quad \zeta = 0,$$

wo φ eine Function von z und der Zeit t ist.

Nach § 28 (e) ist $\Theta = 0$; Verdichtung und Verdünnung finden also nicht statt. Die Bewegungsgleichungen lauten nach § 34 (a) und 35 (k)

$$\ddot{\xi} = \omega^2 \nabla^2 \xi, \quad \ddot{\eta} = \omega^2 \nabla^2 \eta,$$

woraus sich wiederum ergiebt, dass

(f) $$\ddot{\varphi} = \omega^2 \partial^2 \varphi / \partial z^2.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch

(g) $$\varphi = a \sin \{2 \pi / T . (t - z / \omega)\},$$

woraus folgt, dass

$$\omega = \sqrt{\mu / \varrho}$$

die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich eine Wellenbewegung in der Richtung der Cylinderaxe fortpflanzt. Die Spannungscomponenten sind nach § 30 (b)

$$Z_y = - A \mu x, \quad X_z = + A \mu y,$$

wo

$$A = 2 \pi a / T \omega . \cos \{2 \pi / T . (t - z / \omega)\}$$

ist. Alle übrigen Spannungscomponenten sind Null.

Ist der Cylinder begrenzt, so können stehende Schwingungen in demselben auftreten, d. h. solche, bei denen bestimmte Stellen, *Knoten*, in Ruhe sind, während auf beiden Seiten eines Knotens die Schwingungsphasen entgegengesetzt sind. Die Schwingungsweite ist in der Mitte zwischen zwei Knoten, an den Bäuchen, am grössten. Die stehenden Wellen bilden sich, wenn fortgesetzt Wellen an einer Stelle in der ursprünglichen Richtung zurückkehren. Um die Schwingungsdauer T für diese Schwingungen zu finden, bemerken wir, dass die Gleichung (f) nicht allein erfüllt wird durch den Ausdruck (g), sondern auch durch

$$\varphi = b \sin \{2 \pi / T . (t + z / \omega)\}$$

und allgemein durch

$$\varphi = B \sin 2 \pi t / T . \cos (2 \pi z / T \omega) + C \cos (2 \pi t / T) . \sin (2 \pi z / T \omega),$$

wo B, C und T Constante sind. Sind die Punkte fest, für welche $z = 0$ ist, so muss

(i) $$\varphi = C \cos (2 \pi t / T) . \sin (2 \pi z / T \omega)$$

sein. Ist l die Länge des Cylinders und sind auch die Punkte

fest, für welche $z = l$ ist, so muss $\varphi = 0$ für $z = l$ sein, und also

$$2\pi l / T\omega = p\pi,$$

wo p eine ganze Zahl ist. Demnach wird

$$T = 2l / p\omega = 2l / p . \sqrt{\varrho / \mu}.$$

Ist dagegen das eine Ende der Stange frei, so ist

$$Y_z = X_z = 0 \quad \text{für} \quad z = l.$$

Da

$$X_z = -\mu y . \partial\varphi / \partial z, \quad Y_z = +\mu x . \partial\varphi / \partial z$$

ist, so muss also $\partial\varphi / \partial z = 0$ sein.

In diesem Falle ist nach der Gleichung (i)

$$2\pi l / T\omega = \tfrac{1}{2}(2p + 1) . \pi,$$

wo p eine ganze Zahl ist. Daraus ergiebt sich, dass

$$T = 4l / (2p + 1) . \sqrt{\varrho / \mu}$$

ist. Sind beide Enden der Stange frei, so ist

$$T = 2l / p . \sqrt{\varrho / \mu}.$$

§ 37. Schwingende Saiten.

Obgleich das Problem der Bewegung schwingender Saiten nur in einem losen Zusammenhange mit der Elasticitätslehre steht, so soll doch ein einfaches Beispiel dieser Bewegungen hier behandelt werden. Zwischen zwei festen Punkten A und B ist eine vollkommen biegsame Saite ausgespannt. Ist P die Spannung in der Saite, l_0 die Länge der Saite vor der Spannung, l die Länge derselben während der Spannung, so ist

$$l - l_0 = P l_0 / FE,$$

wenn mit F der Querschnitt der Saite und mit E der Elasticitätscoefficient bezeichnet wird. Die Saite sei nur wenig aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt, d. h. der geraden Linie, die A und B verbindet; die neue Form der Saite sei mit $ACDB$ bezeichnet. Bei dieser Deformation hat die Länge der Saite die Vergrösserung

$$dl = dP . l_0 / FE$$

erhalten. Dabei wird vorausgesetzt, dass dP unendlich klein

ist im Vergleich zu P, sodass man die Spannung überall in der Saite gleich P setzen kann.

Der Einfachheit wegen möge sich die Saite beständig in derselben Ebene, etwa der xy-Ebene bewegen. A sei der Coordinatenanfangspunkt, B liege auf der x-Axe im Abstande l von A entfernt. In einer beliebigen Lage der Saite befinde sich C von A entfernt in dem Abstande s, welcher längs der Saite selbst gemessen wird. D befindet sich von A im Abstande $s + ds$. Die Spannungscomponenten in C sind bezw. in der Richtung der x- und y-Axe $P\partial x / \partial s$ und $P\partial y / \partial s$. Für den Punkt D sind dieselben Componenten

$$P(\partial x / \partial s + \partial^2 x / \partial s^2 . ds) \text{ und } P(\partial y / \partial s + \partial^2 y / \partial s^2 . ds).$$

Auf das unendlich kurze Stück CD der Saite wirkt also in der Richtung der x-Axe die Kraft $P\partial^2 x / \partial s^2 . ds$ und in der Richtung der y-Axe die Kraft $P\partial^2 y / \partial s^2 . ds$. Entfernt sich die Saite nur sehr wenig aus ihrer Gleichgewichtslage, so können wir $s = x$ setzen; die x-Componente fällt dann fort und die einzelnen Theilchen der Saite schwingen senkrecht zur x-Axe. Ist m die Masse der Längeneinheit der Saite, so lautet die Bewegungsgleichung

$$m . ds . \ddot{y} = P . \partial^2 y / \partial x^2 . ds$$

oder, wenn $m a^2 = P$ gesetzt wird,

$$\text{(a)} \qquad \ddot{y} = a^2 \partial^2 y / \partial x^2.$$

Zur Integration dieser Differentialgleichung setzen wir

$$\text{(b)} \qquad y = A_n \cos(n \pi a t / l) . \sin(n \pi x / l),$$

wo n eine ganze Zahl ist. Für $x = 0$ und $x = l$ wird $y = 0$. Für $t = 0$ ist ausserdem

$$y = A_n \sin(n \pi x / l);$$

die Saite hat also ursprünglich die Gestalt einer Sinuslinie.

Ist im allgemeinen Falle die ursprüngliche Gestalt der Saite durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegeben, so muss

$$f(x) = A_1 \sin(\pi x / l) + A_2 \sin(2 \pi x / l) + A_3 \sin(3 \pi x / l) + \cdots$$

sein. Die Coefficienten A_1, A_2, $A_3 \ldots$ werden in folgender Weise bestimmt. Das allgemeine Glied der Reihe sei $A_n \sin n\varphi$,

wo $\varphi = \pi x / l$ ist. Werden beide Seiten der letzten Gleichung mit $\sin n\varphi$ multiplicirt, so ergiebt sich

$$f(l\varphi / \pi) \sin n\varphi = A_1 \sin\varphi \sin n\varphi + A_2 \sin 2\varphi \sin n\varphi + \dots \\ + A_n \sin^2 n\varphi + \dots$$

Wird ferner mit $d\varphi$ multiplicirt und integrirt zwischen den Grenzen 0 und π, so ist

$$\int_0^\pi f(l\varphi / \pi) \sin n\varphi \,.\, d\varphi = A_n \int_0^\pi \sin^2 n\varphi \, d\varphi.$$

Sind nämlich m und n von einander verschieden, so ist

$$\int_0^\pi \sin m\varphi \sin n\varphi \, d\varphi = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi \left(\cos(m-n)\varphi - \cos(m+n)\varphi\right) d\varphi = 0.$$

Da aber

$$\int_0^\pi \sin^2 n\varphi \, d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi$$

ist, so wird

$$\text{(c)} \quad A_n = 2/\pi \,.\int_0^\pi f(l\varphi/\pi) \sin n\varphi \, d\varphi = 2/l \,.\int_0^l f(x) \sin(n\pi x/l) \,.\, dx.$$

Wurde z. B. die Saite ursprünglich aus ihrer Gleichgewichtslage dadurch entfernt, dass ein Punkt derselben im Abstande p von dem einen Ende A um die Strecke h in der Richtung der y-Axe fortbewegt wird, so ist

$$f(x) = hx/p \quad \text{für} \quad 0 < x < p,$$

aber

$$f(x) = h(l-x)/(l-p) \quad \text{für} \quad p < x < l.$$

Demnach ist

$$A_n = 2/l \,.\int_0^p \frac{hx}{p} \,.\, \sin\frac{n\pi x}{l} \,.\, dx + 2/l \,.\int_p^l \frac{h(l-x)}{l-p} \,.\, \sin\frac{n\pi x}{l} \,.\, dx$$

und also

$$A_n = 2hl^2/p(l-p) \,.\, \left(\sin\frac{n\pi p}{l}\right) \Big/ n^2\pi^2.$$

Wir erhalten für y

$$y = 2\alpha^2 h / (\alpha - 1)\pi^2 \,.\, \Big[1/1^2 \,.\, \sin\frac{\pi}{\alpha} \,.\, \sin\frac{\pi x}{l} \,.\, \cos\frac{\pi a t}{l} \\ + 1/2^2 \,.\, \sin\frac{2\pi}{\alpha} \,.\, \sin\frac{2\pi x}{l} \,.\, \cos\frac{2\pi a t}{l} + \dots\Big],$$

wo $\alpha = l/p$ ist. Wird die Saite in der Mitte angeschlagen, so ist $\alpha = 2$ und

$$y = 8h/\pi^2 \left\{\sin\frac{\pi x}{l}.\cos\frac{\pi a t}{l} - 1/3^2.\sin\frac{3\pi x}{l}.\cos\frac{3\pi a t}{l} + \ldots\right\}.$$

§ 38. Potentielle Energie der elastischen Körper.

Bei der Veränderung der Gestalt eines elastischen Körpers wird Arbeit verbraucht, und diese ist im Körper zunächst als potentielle Energie aufgespeichert, falls derselbe vollkommen elastisch ist, was vorausgesetzt werden soll. Die zur Herstellung einer bestimmten Formveränderung erforderliche Arbeit ist gleich der potentiellen Energie des Körpers und kann in folgender Weise bestimmt werden. In einem Punkte des Körpers mögen die Hauptspannungen A', B' und C' sein; um den betrachteten Punkt herum wird ein Parallelepipedon construirt, dessen Kanten u, v und w den Hauptspannungen parallel sind. u, v, w sollen unendlich klein sein. Infolge der Spannungen werden die Kanten des Parallelepipedon verlängert, und es wächst u zu $u(1+a')$, v zu $v(1+b')$ und w zu $w(1+c')$ an. Nach § 29 (e) ist

$$A' = \lambda\Theta' + 2\mu a', \quad B' = \lambda\Theta' + 2\mu b', \quad C' = \lambda\Theta' + 2\mu c'.$$

Erfährt das Parallelepipedon eine unendlich kleine Formveränderung, indem a', b' und c' bezw. die Vergrösserungen da', db' und dc' erfahren, so werden die Kanten verlängert um $u\,da'$, $v\,db'$, $w\,dc'$. In den Richtungen der Kanten wirken die Kräfte vwA', uwB', uvC'. Die von den Spannungen bei der Formveränderung geleistete Arbeit ist demnach

$$\begin{aligned}&(A'da' + B'db' + C'dc')uvw \\ &= \big(\lambda\Theta'd\Theta' + 2\mu(a'da' + b'db' + c'dc')\big)uvw,\end{aligned}$$

da $\Theta' = a' + b' + c'$ ist.

Um dem Parallelepipedon eine Formveränderung zu ertheilen, die durch die Dehnungen a, b, c bestimmt wird, ist die Arbeit

$$\tfrac{1}{2}\big(\lambda\Theta^2 + 2\mu(a^2 + b^2 + c^2)\big)uvw$$

nöthig. Setzen wir dv für den Inhalt uvw des Parallelepipedon, so ergiebt sich für die potentielle Energie E_p des ganzen Körpers

$$\text{(a)} \qquad E_p = \tfrac{1}{2}\int\big(\lambda\Theta^2 + 2\mu(a^2 + b^2 + c^2)\big)\,dv.$$

Führen wir nach § 29 (e) die Hauptspannungen A, B und C ein, so wird

(b) $E_p = \frac{1}{2}\int\{(A+B+C)^2/E - (AB+BC+CA)/\mu\}dv.$

Mit Hülfe dieser Gleichung (b) kann man auch die potentielle Energie bestimmen durch die Spannungs- und Dehnungscomponenten. Wir beschränken uns darauf, folgende Beziehung anzuführen

(c) $E_p = \frac{1}{2}\int(X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + 2Z_y z_y + 2X_z x_z + 2Y_x y_x)\,dv,$

aus welcher die übrigen leicht abgeleitet werden können.

Galilei hat zuerst Betrachtungen über die elastischen Eigenschaften der Körper angestellt; seine Resultate sind jedoch nicht richtig. Die physikalische Grundlage für die Elasticitätslehre gab Robert Hooke, welcher 1678 ein Buch: De potentia restitutiva mittheilte, in dem er durch Versuche zeigte, dass die Formveränderungen sich wie die Kräfte verhalten. Von anderen älteren Untersuchungen müssen besonders Mariotte's und Coulomb's Arbeiten hervorgehoben werden. Im übrigen ist die Elasticitätstheorie hauptsächlich von den französischen Mathematikern Cauchy, Poisson, Lamé, Barré de Saint-Vénant u. a. m. entwickelt worden. Die Theorie der Spannungscomponenten in der hier mitgetheilten Form verdanken wir Cauchy. Von den ausführlicheren Darstellungen der Elasticitätstheorie sind zu nennen: Lamé, Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris 1866. Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862.

Von den wichtigeren neueren Abhandlungen über die Elasticitätstheorie heben wir hervor: Boussinesq, Application des Potentiel à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris 1885. Barré de Saint-Vénant, Mémoire sur la torsion des prismes. Mém. d. sav. étr. T. XIV. Paris 1856; Mémoire sur la flexion des prismes. Liouville I. 1856. William Thomson, Elements of a mathem. theory of Elasticity. Phil. Tr. London 1856; Dynamical problems on elastic spheroids. Phil. Tr. London 1864.

Weitere Untersuchungen über die Theorie der Elasticität sind in späteren Jahren von W. Voigt angestellt worden.

Dritter Abschnitt.

Gleichgewicht der flüssigen Körper.

§ 39. Gleichgewichtsbedingungen.

Der Hauptunterschied zwischen den festen Körpern einerseits und den tropfbar flüssigen und gasförmigen Körpern andererseits besteht darin, dass die letzteren nicht wie die ersteren einen grossen Widerstand gegen Formveränderungen leisten, wenn sie auch einen Widerstand den Volumenveränderungen entgegensetzen. Es ist freilich eine Kraft erforderlich, um die Gestalt einer Flüssigkeitsmasse zu verändern, aber der von der Flüssigkeit geleistete Widerstand richtet sich nach der Geschwindigkeit, mit der die Formveränderung vor sich geht, und wird unendlich klein, wenn die Formveränderung sehr langsam vollzogen wird. Wir setzen voraus, dass die Bewegung, durch welche der Gleichgewichtszustand erreicht wird, sehr langsam vor sich geht und dürfen daher in der Hydrostatik annehmen, dass die Flüssigkeit gar keinen Widerstand gegen Gestaltsänderungen bietet, wofern diese nicht von Volumenänderungen begleitet sind.

Jede unendlich kleine Gestaltsänderung eines unendlich kleinen Theiles des Körpers kann nach § 28 betrachtet werden als hervorgebracht durch die Dilatationen a, b, c der Längeneinheit in drei zu einander senkrechten Richtungen. Die Strecken u, v, w in diesen drei Richtungen werden $u(1+a)$, $v(1+b)$ und $w(1+c)$. Sind A, B und C die entsprechenden Normalkräfte pro Flächeneinheit, von denen A auf die Fläche vw wirkt, während B und C bezw. auf die Flächen uw und uv wirken, so ist die von den Normalkräften bei der erwähnten Gestaltsänderung geleistete Arbeit

$$Avwua + Buwvb + Cuvwc$$

oder

$$(Aa + Bb + Cc)u.v.w.$$

Die betrachtete Gestaltsänderung wird im allgemeinen eine Vergrösserung des Volumens zur Folge haben, welche

$$uvw(1+a)(1+b)(1+c) - uvw$$

ist. Da a, b und c unendlich klein sind, so wird die Vergrösserung des Volumens bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung gleich

$$(a+b+c)u\,.\,v\,.\,w\,.$$

Gehen wir von der Annahme aus, dass die von den Kräften geleistete Arbeit Null ist, wenn das Volumen nicht geändert wird, so haben wir gleichzeitig

$$Aa + Bb + Cc = 0 \quad \text{und} \quad a + b + c = 0.$$

Diese Gleichungen können nur zusammen bestehen, wenn

$$A = B = C \quad \text{ist.}$$

Die für die Spannungscomponenten in § 26 (i) aufgestellten Formeln ergeben

$$X_x = Y_y = Z_z \quad \text{und} \quad Z_y = 0, \quad X_z = 0, \quad Y_x = 0.$$

Im flüssigen Körper sind also keine Tangentialkräfte vorhanden.

Gehen wir davon aus, dass die flüssigen Körper nur im Gleichgewicht unter der Wirkung von Kräften sind, die senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet sind, so gelangen wir zu demselben Resultat, dass die Normalspannungen gleich gross sein müssen. Wir setzen also

$$Z_y = 0, \quad X_z = 0, \quad Y_x = 0$$

und erhalten aus § 26 (a)

$$P = X_x \cos\alpha, \quad Q = Y_y \cos\beta, \quad R = Z_z \cos\gamma.$$

P, Q und R sind die Componenten der Spannung für eine Fläche, deren Normale mit den Axen die Winkel α, β und γ bildet. Die ganze in dieser Fläche wirkende Spannung ist

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2},$$

die Normalkraft N ist bestimmt durch

$$N = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma.$$

Die Tangentialkraft T ist

$$T^2 = (P^2 + Q^2 + R^2) - (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)^2.$$

Durch Einführung der Werthe von P, Q und R ergiebt sich

$$(X_x - Y_y)^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta + (Y_y - Z_z)^2 \cos^2\beta \cos^2\gamma$$
$$+ (Z_z - X_x)^2 \cos^2\alpha \cos^2\gamma = 0,$$

woraus folgt, dass

$$X_x = Y_y = Z_z.$$

Aus dem oben angegebenen Ausdruck für N ergiebt sich, dass $N = X_x$ ist, d. h. *die auf ein innerhalb der Flüssigkeit liegendes Flächenelement wirkende Normalkraft ist unabhängig von der Stellung des Elementes.*

Berücksichtigen wir nicht die später behandelte Cohäsionskraft der Flüssigkeit, so muss die Normalkraft ein Druck sein; wird dieser mit p bezeichnet, so ist für eine Flüssigkeit

(a) $$X_x = Y_y = Z_z = -p; \quad Z_y = 0, \quad X_z = 0, \quad Y_x = 0.$$

Ist ϱ die Dichte der Flüssigkeit, so lauten nach § 25 (c) die Gleichgewichtsbedingungen

(b) $$\partial p / \partial x = \varrho X, \quad \partial p / \partial y = \varrho Y, \quad \partial p / \partial z = \varrho Z.$$

X, Y, Z sind die Componenten der auf die Masseneinheit wirkenden Kraft; ϱ kann als constant in der Flüssigkeit betrachtet werden; bei den Gasen ist ϱ eine Function des Druckes.

Die Gleichungen (b) können auch in folgender Weise entwickelt werden. Das Parallelepipedon OO' (Fig. 46) hat die Seiten

$$OA = dx, \quad OB = dy, \quad OC = dz.$$

Fig. 46.

Der Druck auf OA' ist $p\,dy\,dz$, dagegen auf $O'A$ gleich

$$(p + \partial p / \partial x \,.\, dx)\, dy\, dz.$$

Die Resultirende der beiden Druckkräfte ist der Druck

$$- \partial p / \partial x \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$$

in der Richtung der x-Axe. Ausserdem wirkt auf das Parallelepiped in derselben Richtung die Kraft $\varrho X\, dx\, dy\, dz$. Wir erhalten als Gleichgewichtsbedingung

$$(- \partial p / \partial x + \varrho X)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

woraus sich die erste der Gleichungen (b) ergiebt. Die beiden übrigen werden in ähnlicher Weise abgeleitet.

Soll Gleichgewicht vorhanden sein, so muss p den Gleichungen (b) genügen; damit das Letztere eintreten kann, müssen wir haben

$$\text{(c)} \left\{ \begin{aligned} &\partial(\varrho X)/\partial y = \partial(\varrho Y)/\partial x, \quad \partial(\varrho Y)/\partial z = \partial(\varrho Z)/\partial y, \\ &\partial(\varrho Z)/\partial x = \partial(\varrho X)/\partial z. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen bestehen, wenn eine Function Φ von solcher Beschaffenheit existirt, dass

$$\text{(d)} \quad \partial\Phi/\partial x = \varrho X, \quad \partial\Phi/\partial y = \varrho Y, \quad \partial\Phi/\partial z = \varrho Z \quad \text{ist.}$$

Die Gleichungen (c) sind die eigentlichen Gleichgewichtsbedingungen; sind dieselben erfüllt, so kann p bestimmt werden. Wir haben dann

$$dp = \varrho(X dx + Y dy + Z dz).$$

Haben die Kräfte ein Potential ψ, sodass

$$X = -\partial\psi/\partial x, \quad Y = -\partial\psi/\partial y, \quad Z = -\partial\psi/\partial z$$

ist, so ergiebt sich

$$\text{(e)} \qquad dp = -\varrho\, d\psi.$$

Bei den Gasen ist ϱ eine Function von p; bei den Flüssigkeiten wird ϱ als constant betrachtet. Im letzteren Falle erhalten wir dann

$$\text{(f)} \qquad p = c - \varrho\psi,$$

wo c eine Constante ist.

§ 40. Beispiel des Gleichgewichtes flüssiger Körper.

Das Gleichgewicht einer Flüssigkeitsmasse, die in einem Gefäss enthalten ist und auf die nur die Schwere einwirkt, deren Beschleunigung g ist, kann in folgender Weise bestimmt werden. Die Lage der Flüssigkeitstheile sei auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen z-Axe senkrecht nach oben gerichtet ist; wir haben dann nach der Bezeichnung im vorigen Paragraphen

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Also ist

$$\psi = g z.$$

Da die Dichte ϱ als constant betrachtet wird, so kann das Gleichgewicht unter dem Einfluss der Schwerkraft eintreten. Nach § 39 (f) ist

$$p = c - g\varrho z.$$

Demnach ist der Druck überall in derselben Niveaufläche derselbe.

Wir bestimmen jetzt den Druck in einer Flüssigkeit, welche sich in einem Gefäss befindet, das sich um eine senkrechte Axe A mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Die Flüssigkeit möge sich wie ein fester Körper um die Axe A drehen mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie das Gefäss.

Auf ein Flüssigkeitstheilchen im Abstande r von der Axe A wirkt die Schwere und eine Centrifugalkraft, deren Beschleunigung $\omega^2 r$ ist. Die z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems sei senkrecht nach oben gerichtet und falle mit der Drehungsaxe zusammen. Wir haben dann

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g,$$

und das Potential ψ ist

$$\psi = -\tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 + gz.$$

Nach § 39 (f) ist der Druck

$$p = c + \varrho(\tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz).$$

Die Flächen constanten Druckes sind Rotationsparaboloide mit der gemeinsamen Axe A.

Eine dritte Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen machen wir bei der *Bestimmung des Druckes in der Atmosphäre.* Die Schwere sei nach dem Erdmittelpunkte gerichtet; ihre Beschleunigung γ kann ausgedrückt werden durch

$$\gamma = -g a^2 / r^2,$$

wo g die Beschleunigung an der Erdoberfläche, a der Erdradius und r der Abstand des betrachteten Punktes vom Erdmittelpunkte ist. Wir haben dann

$$\psi = -g a^2 / r.$$

Ist die Temperatur constant, so ist

$$\varrho = k . p,$$

wo k eine Constante ist. Nach § 39 (e) ist dann

$$dp = -k . p\, d\psi \quad \text{oder} \quad \log p = c - k\psi.$$

Ist der Druck an der Erdoberfläche p_0 und das Potential daselbst ψ_0, so ist

$$\log p_0 = c - k\psi_0$$

und ferner

$$\log(p_0/p) = k(\psi - \psi_0) = kg(ar - a^2)/r.$$

Ist die Differenz $r - a$ sehr klein im Vergleich zu a, so können wir setzen

$$\log(p_0/p) = kgh,$$

wo $h = r - a$ die Höhe des betrachteten Punktes über der Erdoberfläche und k für trockene Luft bei 0° C. gleich $1{,}2759 . 10^{-9}$ ist.

Vierter Abschnitt.

Die Bewegung flüssiger Körper.

§ 41. Euler's Bewegungsgleichungen.

Die Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeiten sind sehr schwierig, und es giebt nur sehr wenige Probleme, welche bisher vollkommen gelöst wurden. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir nur die sogenannten idealen Flüssigkeiten betrachten, dabei sehen wir ab von der Reibung zwischen den bewegten Flüssigkeitstheilchen und ferner von den Cohäsions- und Adhäsionskräften, die später behandelt werden sollen. Wir fügen die weitere Annahme hinzu, dass die Flüssigkeiten incompressibel sind. Die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten ist eben sehr gering. Unter diesen Voraussetzungen können mehrere Eigenschaften der Bewegung der Flüssigkeiten hergeleitet werden; dagegen ist die Behandlung der Bewegung luftförmiger Körper äusserst schwierig und hat noch so wenige Resultate ergeben, dass wir auf dieselben nicht weiter eingehen wollen.

Zur vollständigen Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung muss sowohl die Bahn eines jeden einzelnen Flüssigkeits-

theilchens als auch der Ort des Theilchens in der Bahn zu jeder Zeit gegeben sein. Die Coordinaten x, y und z des Flüssigkeitstheilchens M müssen als Functionen der Zeit t gegeben sein.

Leichter ist es von den Geschwindigkeitscomponenten auszugehen, die je nach den Umständen mit U, V, W oder mit u, v, w bezeichnet werden sollen. U, V, W sind die Componenten der Geschwindigkeit eines bestimmten Flüssigkeitstheilchens; befindet sich das Theilchen zur Zeit t in P, und zur Zeit $t + dt$ in P', so sind U, V, W die Componenten der Geschwindigkeit im Punkte P, dagegen sind

$$U + \frac{dU}{dt}dt, \quad V + \frac{dV}{dt}dt, \quad W + \frac{dW}{dt}dt$$

die Componenten der Geschwindigkeit in P'. Der Buchstabe d giebt hier den Zuwachs, welchen bezw. U, V, W erfahren in Bezug auf *dasselbe* Flüssigkeitstheilchen während der Zeit dt. u, v, w sind jedoch die Geschwindigkeitscomponenten an einem bestimmten Punkte des Raumes, wo ein Flüssigkeitstheilchen das andere bei der Bewegung ablöst. Sind x, y, z die Coordinaten des betrachteten Punktes, so sind u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens, das sich zur Zeit t im Punkte x, y, z befindet. Nach Verlauf des Zeitelementes dt befindet sich an derselben Stelle ein anderes Flüssigkeitstheilchen, dessen Geschwindigkeitscomponenten

$$u + \partial u / \partial t . dt, \quad v + \partial v / \partial t . dt, \quad w + \partial w / \partial t . dt$$

sind. Ein Flüssigkeitstheilchen, welches zur Zeit t sich in einem Punkte befindet, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, hat eine Geschwindigkeit, deren Projection auf die x-Axe ist

$$u + \partial u / \partial x . dx + \partial u / \partial y . dy + \partial u / \partial z . dz.$$

Ueberhaupt sind u, v, w Functionen von x, y, z und t. Sind demgemäss u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit im Punkte P mit den Coordinaten x, y, z zur Zeit t, so sind zur Zeit $t + dt$ die Componenten in einem anderen Punkte P' mit den Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$,

$$u + \partial u / \partial t . dt + \partial u / \partial x . dx + \partial u / \partial y . dy + \partial u / \partial z . dz \text{ u. s. w.}$$

Das Flüssigkeitstheilchen befinde sich zur Zeit t in P und zur Zeit $t + dt$ in P', so ist $U = u$ und

$$U + dU/dt . dt = u + \partial u/\partial t . dt + \partial u/\partial x . dx + \partial u/\partial y . dy + \partial u/\partial z . dz$$

oder

$$\text{(a)}\quad dU/dt = \partial u/\partial t + \partial u/\partial x . dx/dt + \partial u/\partial y . dy/dt + \partial u/\partial z . dz/dt.$$

Das betrachtete Flüssigkeitstheilchen hat in dem Zeitelement dt die Strecke PP' zurückgelegt; seine Geschwindigkeit ist demnach PP'/dt, deren Projectionen auf die Coordinatenaxe offenbar

$$dx/dt = u, \quad dy/dt = v, \quad dz/dt = w$$

sind. Dadurch erhalten wir

$$dU/dt = \partial u/\partial t + u . \partial u/\partial x + v . \partial u/\partial y + w . \partial u/\partial z.$$

Aehnlich lauten die Gleichungen für dV/dt und dW/dt.

Zur Auffindung der Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit sei aus derselben ein Parallelepipedon $d\omega$ ausgeschnitten, dessen Kanten dx, dy und dz sind und auf welches eine Kraft mit den Componenten X, Y und Z wirkt. Im Zeitelement dt erhält das Parallelepipedon eine Bewegungsmenge, deren Componenten

$$\varrho X d\omega\, dt, \quad \varrho Y d\omega\, dt, \quad \varrho Z d\omega\, dt$$

sind, wo ϱ die Dichte bedeutet.

Der im Punkte x, y, z wirkende Druck p ertheilt, wie im vorigen Abschnitt gezeigt ist, $d\omega$ die Bewegungsmengen

$$-\partial p/\partial x . d\omega\, dt, \quad -\partial p/\partial y . d\omega\, dt, \quad -\partial p/\partial z . d\omega\, dt.$$

Unter dem Einfluss dieser Kräfte erhält der Körper in der Zeiteinheit einen Zuwachs an Geschwindigkeit, dessen Componenten dU/dt, dV/dt, dW/dt sind, und wir erhalten

$$\text{(b)}\quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho\, dU/dt = \varrho X - \partial p/\partial x; \quad \varrho\, dV/dt = \varrho Y - \partial p/\partial y; \\ \qquad \varrho\, dW/dt = \varrho Z - \partial p/\partial z. \end{array} \right.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (a) ergiebt sich dann

$$\text{(c)}\quad \left\{ \begin{array}{l} \partial u/\partial t + u \partial u/\partial x + v \partial u/\partial y + w \partial u/\partial z = X - 1/\varrho . \partial p/\partial x, \\ \partial v/\partial t + u \partial v/\partial x + v \partial v/\partial y + w \partial v/\partial z = Y - 1/\varrho . \partial p/\partial y, \\ \partial w/\partial t + u \partial w/\partial x + v \partial w/\partial y + w \partial w/\partial z = Z - 1/\varrho . \partial p/\partial z. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen rühren von Euler her und heissen die *Euler'schen Bewegungsgleichungen.* Wir fügen noch die soge-

nannte *Continuitätsgleichung* hinzu, welche in folgender Weise gefunden wird. In das Parallelepipedon strömt während des Zeitelementes dt durch die eine Fläche $dy\,dz$ die Flüssigkeitsmenge $\varrho\, u\, dy\, dz\, dt$; durch die gegenüber liegende Fläche strömt die Menge

$$\varrho u + \partial(\varrho u) / \partial x \,.\, dx\, dy\, dz\, dt$$

aus. Die Differenz der Flüssigkeitsmengen, welche durch die zwei Flächenelemente strömt und welche in einem Verlust besteht, wenn $\partial(\varrho u) / \partial x \,.\, dx$ positiv ist, wird demnach

$$\partial(\varrho u) / \partial x \,.\, d\omega \,.\, dt.$$

Mit Rücksicht auf die beiden übrigen Flächenpaare ergiebt sich als gesammte Differenz zwischen den in das Parallelepiped austretenden und eintretenden Flüssigkeitsmengen

$$\big(\partial(\varrho u) / \partial x + \partial(\varrho v) / \partial y + \partial(\varrho w) / \partial z\big)\, d\omega \,.\, dt.$$

Ursprünglich enthielt das Parallelepipedon die Menge $\varrho \,.\, d\omega$, nach dem Zeitelement dt enthält es die Menge

$$(\varrho + \partial\varrho / \partial t \,.\, dt)\, d\omega;$$

die Differenz der Flüssigkeitsmengen ist also

$$-\, \partial\varrho / \partial t \,.\, d\omega \,.\, dt.$$

Hieraus folgt die *Continuitätsgleichung*

$$\text{(d)} \qquad \partial\varrho / \partial t + \partial(\varrho u) / \partial x + \partial(\varrho v) / \partial y + \partial(\varrho w) / \partial z = 0.$$

Ist die Dichte ϱ der Flüssigkeit constant, so lautet die Continuitätsgleichung

$$\text{(e)} \qquad \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0.$$

Die Euler'schen Gleichungen eignen sich besonders zur Untersuchung der Bewegung in Flüssigkeitsmassen mit unveränderlicher Begrenzung. Aendert sich die Flüssigkeitsoberfläche, so giebt es Punkte, die bald innerhalb, bald ausserhalb der Flüssigkeit liegen; in diesen Punkten kann die Geschwindigkeit nicht in der angegebenen Weise bestimmt werden. sondern wir benutzen dann eine Methode von Lagrange, auf welche wir später zurückkommen.

In den Gleichungen (c) und (e) sind vier unbekannte Grössen u, v, w und p enthalten, zu deren Bestimmung vier Gleichungen vorhanden sind. Zur Bestimmung der bei der Integration auftretenden Constanten muss der Bewegungszustand der

Flüssigkeit für einen bestimmten Zeitpunkt gegeben sein. Ist die Flüssigkeit von einer unbeweglichen Fläche begrenzt, so sind die Componenten der Geschwindigkeit in der Richtung der Normalen der Grenzfläche Null. Sind $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ die Geschwindigkeitscomponenten eines Theilchens an der Grenze der Flüssigkeit, und bildet daselbst die Normale der Grenzfläche mit den Axen die Winkel α, β, γ, so ist

$$\bar{u}\cos\alpha + \bar{v}\cos\beta + \bar{w}\cos\gamma = 0. \tag{f}$$

§ 42. Transformationen der Euler'schen Gleichungen.

Bei der Bewegung ändert das Parallelepiped mit den ursprünglichen Kanten dx, dy, dz in der Flüssigkeit im allgemeinen nicht nur seinen Ort im Raume, sondern es rotirt auch und ändert zugleich seine Gestalt. Die augenblickliche Bewegung ist durch die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w bestimmt; die Rotationen und Formveränderungen werden folgendermaassen bestimmt. In der Elasticitätslehre ist für die Rotationscomponente h_x eines solchen Elementes der Ausdruck gegeben

$$h_x = \tfrac{1}{2}(\partial\zeta' / \partial y - \partial\eta' / \partial z),$$

wenn ζ' und η' die unendlich kleinen Aenderungen der Coordinaten z und y bei der Bewegung sind. Wir können $\zeta' = w.dt$ und $\eta' = v.dt$ setzen und erhalten

$$h_x = \tfrac{1}{2}(\partial w / \partial y - \partial v / \partial z).dt.$$

Ist ξ die entsprechende Winkelgeschwindigkeit, so wird $h_x = \xi.dt$ und ferner

$$\text{(a)}\quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \tfrac{1}{2}(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z);\quad \eta = \tfrac{1}{2}(\partial u/\partial z - \partial w/\partial x);\\ \zeta &= \tfrac{1}{2}(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y). \end{aligned} \right.$$

Die beiden letzten Gleichungen werden in derselben Weise wie die erste hergeleitet; ξ, η, ζ sind die Componenten der Winkelgeschwindigkeit bei der Rotation um die drei Coordinatenaxen.

Findet keine Rotation in der Flüssigkeit statt, so ist

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

oder

$$\partial w/\partial y = \partial v/\partial z,\quad \partial u/\partial z = \partial w/\partial x,\quad \partial v/\partial x = \partial u/\partial y.$$

Diese Gleichungen sind die Bedingungen für die Existenz einer Function φ von x, y, z und t, welche die Eigenschaft hat, dass

$$u = -\partial\varphi/\partial x, \quad v = -\partial\varphi/\partial y, \quad w = -\partial\varphi/\partial z.$$

Diese Function φ ist von v. Helmholtz als *Geschwindigkeitspotential* bezeichnet, denn es verhalten sich in diesem Falle die Componenten u, v und w der Geschwindigkeit wie die Componenten einer Kraft, wenn dieselbe ein Potential hat.

Die Continuitätsgleichung § 41 (e) lautet bei Voraussetzung eines Geschwindigkeitspotentials bei der Bewegung einer *incompressiblen* Flüssigkeit

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = \nabla^2\varphi = 0.$$

Die Geschwindigkeit h eines Flüssigkeitstheilchens ist

$$h^2 = u^2 + v^2 + w^2 = (\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 + (\partial\varphi/\partial z)^2.$$

Aus den Gleichungen (a) folgt, dass

$$\partial u/\partial y = \partial v/\partial x - 2\zeta, \quad \partial u/\partial z = \partial w/\partial x + 2\eta.$$

Die erste der Gleichungen § 41 (c) lautet dann

$$\partial u/\partial t + 2(w\eta - v\zeta) + u\,.\,\partial u/\partial x + v\,.\,\partial v/\partial x + w\,.\,\partial w/\partial x$$
$$= X - 1/\varrho\,.\,\partial p/\partial x.$$

Die oben angegebene Gleichung erhält die Form

$$\text{(b)}\left\{\begin{array}{l} \partial u/\partial t + 2(w\eta - v\zeta) = X - 1/\varrho\,.\,\partial p/\partial x - \tfrac{1}{2}\partial h^2/\partial x. \\ \text{Ebenso ergiebt sich, dass} \\ \partial v/\partial t + 2(u\zeta - w\xi) = Y - 1/\varrho\,.\,\partial p/\partial y - \tfrac{1}{2}\partial h^2/\partial y, \\ \partial w/\partial t + 2(v\xi - u\eta) = Z - 1/\varrho\,.\,\partial p/\partial z - \tfrac{1}{2}\partial h^2/\partial z, \end{array}\right.$$

wo h die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens ist. p kann aus den Gleichungen (b) eliminirt werden. Wird die zweite der Gleichungen (b) nach z differenziirt, die dritte nach y, so ergiebt sich durch Subtraction

$$\partial\xi/\partial t + \partial(v\xi - u\eta)/\partial y - \partial(u\zeta - w\xi)/\partial z = \tfrac{1}{2}(\partial Z/\partial y - \partial Y/\partial z).$$

Mit Rücksicht auf die Continuitätsgleichung

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$$

und auf die aus (a) folgende Beziehung

$$\partial\xi/\partial x + \partial\eta/\partial y + \partial\zeta/\partial z = 0$$

erhalten wir

$$\partial\xi/\partial t + u.\partial\xi/\partial x + v.\partial\xi/\partial y + w.\partial\xi/\partial z - \xi.\partial u/\partial x - \eta.\partial u/\partial y - \zeta.\partial u/\partial z = \tfrac{1}{2}(\partial Z/\partial y - \partial Y/\partial z).$$

Während ξ, η, ζ die Rotationscomponenten in einem Punkte des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes zur Zeit t darstellen, so sind Ξ, H, Z dieselben Componenten für ein Flüssigkeitstheilchen zur Zeit $t + dt$, welches zur Zeit t die Componenten ξ, η, ζ besass.

In derselben Weise, wie wir früher das Verhältniss zwischen der Geschwindigkeit in einem Punkte des Raumes und der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens gefunden haben, können wir nun den Zusammenhang zwischen den Componenten ξ, η, ζ und Ξ, H, Z feststellen. Wir haben

$$\xi = \Xi,\quad d\Xi/dt = \partial\xi/\partial t + u.\partial\xi/\partial x + v.\partial\xi/\partial y + w.\partial\xi/\partial z.$$

Mit Benutzung dieser Gleichung ergiebt sich

$$\text{(c)}\quad d\Xi/dt = \xi.\partial u/\partial x + \eta.\partial u/\partial y + \zeta.\partial u/\partial z + \tfrac{1}{2}(\partial Z/\partial y - \partial Y/\partial z).$$

Wenn zu irgend einer Zeit keine Rotation in der Flüssigkeit stattfindet, also $\xi = \eta = \zeta = 0$ *sind in jedem Punkte der Flüssigkeit, so kann doch eine Rotation eintreten, wenn* Z *und* Y *kein Potential haben.* Haben dagegen Z und Y ein Potential, sodass

$$Z = -\partial\Psi/\partial z \quad \text{und} \quad Y = -\partial\Psi/\partial y,$$

so wird

$$d\Xi/dt = 0.$$

Ist ausserdem

$$X = -\partial\Psi/\partial x,$$

so ist

$$dH/dt = 0 \quad \text{und} \quad dZ/dt = 0.$$

Demnach kann in einer idealen Flüssigkeit keine Rotation entstehen, wenn die Kräfte ein Potential haben. In diesem Falle werden die Flüssigkeitstheilchen, welche bereits rotiren, auch fernerhin in Rotation bleiben; aber die Theilchen, welche nicht von Anfang an rotiren, werden niemals in Rotation gerathen. Dieser Satz ist zuerst von v. Helmholtz ausgesprochen.

§ 43. Wirbel- und Strömungsbewegungen in einer Flüssigkeit.

Bei den Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeit ist es wichtig zu erfahren, ob eine Rotation der einzelnen Flüssigkeitstheilchen stattfindet oder nicht. Findet eine Ro-

tation statt, so wird dieselbe als *Wirbelbewegung* bezeichnet. Wir haben dann

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}(\partial w / \partial y - \partial v / \partial z), \quad \eta = \frac{1}{2}(\partial u / \partial z - \partial w / \partial x), \\ \zeta = \frac{1}{2}(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y). \end{cases}$$

Hieraus folgt sogleich

$$\text{(b)} \qquad \partial \xi / \partial x + \partial \eta / \partial y + \partial \zeta / \partial z = 0.$$

Die Continuitätsgleichung ergiebt

$$\text{(c)} \qquad \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0.$$

Haben die Kräfte ein Potential, so folgt aus den Gleichungen § 42 (c), dass

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} d\Xi / \partial t = \xi . \partial u / \partial x + \eta . \partial u / \partial y + \zeta . \partial u / \partial z, \\ dH / \partial t = \xi . \partial v / \partial x + \eta . \partial v / \partial y + \zeta . \partial v / \partial z, \\ dZ / \partial t = \xi . \partial w / \partial x + \eta . \partial w / \partial y + \zeta . \partial w / \partial z. \end{cases}$$

Hier sind ξ, η, ζ die Rotationscomponenten im Punkte x, y, z der Flüssigkeit; Ξ, H, Z sind dieselben Componenten für ein Flüssigkeitstheilchen, welches zur Zeit t sich im betrachteten Punkte, zur Zeit $t + dt$ sich aber im Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ befindet.

Sind die Componenten ξ, η, ζ dagegen überall in der Flüssigkeit in einem bestimmten Augenblick Null, so sind sie zu jeder Zeit Null nach den Gleichungen (d). In diesem Falle bezeichnen wir die Bewegung als *Strömung* und dieselbe ist charakterisirt durch die Gleichungen

$$\text{(e)} \quad \partial w / \partial y = \partial v / \partial z, \quad \partial u / \partial z = \partial w / \partial x, \quad \partial v / \partial x = \partial u / \partial y.$$

u, v und w besitzen dann nach § 42 ein *Geschwindigkeitspotential* φ, welches im allgemeinen von x, y, z und t abhängt. Die Continuitätsgleichung lautet

$$\text{(g)} \qquad \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 + \partial^2 \varphi / \partial z^2 = \nabla^2 \varphi = 0.$$

Die Euler'schen Gleichungen § 41 (c) erhalten die Form

$$\text{(h)} \quad \begin{cases} X = - \partial^2 \varphi / \partial t \partial x + \frac{1}{2} \partial h^2 / \partial x + 1 / \varrho . \partial p / \partial x; \\ Y = - \partial^2 \varphi / \partial t \partial y + \frac{1}{2} \partial h^2 / \partial y + 1 / \varrho . \partial p / \partial y; \\ Z = - \partial^2 \varphi / \partial t \partial z + \frac{1}{2} \partial h^2 / \partial z + 1 / \varrho . \partial p / \partial z. \end{cases}$$

Demnach kann eine solche Bewegung nur dann existiren,

wenn die Kräfte ein Potential Ψ haben. In diesem Falle erhalten wir aus (h) durch Integration

(i) $$\Psi + T = \partial\varphi / \partial t - \tfrac{1}{2} h^2 - p / \varrho,$$

wo T nur eine Function der Zeit ist.

Um ein einfaches Beispiel für die zwei Arten der besprochenen Bewegungen zu erhalten, nehmen wir an, dass alle Theilchen einer unendlichen Flüssigkeitsmasse sich in Kreisen bewegen, die der xy-Ebene parallel sind und deren Mittelpunkte auf der z-Axe liegen. Alle Theilchen, welche sich in demselben Abstande von der z-Axe befinden, bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit und nach derselben Richtung. Dann ist nach § 36 (e)

$$u = -\omega y, \quad v = +\omega x, \quad w = 0.$$

ω soll nur vom Abstand r des Theilchens von der z-Axe abhängig sein. Da

$$\partial u / \partial x = -xy / r . d\omega / dr \text{ und } \partial v / \partial y = +xy / r . d\omega / dr$$

ist, so wird die Continuitätsgleichung befriedigt, weil

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \quad \text{ist.}$$

Im allgemeinen findet Rotation der einzelnen Theilchen statt, da

$$\partial u / \partial y = -\omega - y^2 / r . d\omega / dr; \quad \partial v / \partial x = \omega + x^2 / r . d\omega / dr.$$

Also ist

$$\zeta = \omega + \tfrac{1}{2} r . d\omega / dr.$$

Da $\xi = 0$, $\eta = 0$ und ferner u, v und w von z unabhängig sind, so sind die Bewegungsgleichungen (d) erfüllt.

Wir setzen fest, dass

$$\zeta = \zeta_0 \text{ für } r < r_0 \text{ und } \zeta = 0 \text{ für } r > r_0$$

ist, wo ζ_0 eine Constante sein soll. Im ersten Falle ist

$$\omega = \zeta_0 + C / r^2,$$

wo C eine neue Constante ist. C muss verschwinden, weil sonst die Theilchen in der Axe eine unendlich grosse Geschwindigkeit haben würden. Für den Theil der Flüssigkeit, welcher im Inneren eines Kreiscylinders liegt, dessen Radius r_0 ist, und dessen Axe mit der z-Axe zusammenfällt, ist demnach $\omega = \zeta_0$. Diese Theilchen der Flüssigkeit rotiren also

um die z-Axe, gleichsam wie wenn sie einen festen Körper bildeten. Ist dagegen $r > r_0$ und demnach $\zeta = 0$, so ist die Winkelgeschwindigkeit ω'

$$\omega' = C' / r^2.$$

Die lineare Geschwindigkeit ist $r\omega'$ oder C / r, also umgekehrt proportional dem Abstande des Theilchens von der Axe. Da keine Unstetigkeit in der Bewegung der Flüssigkeitsmasse stattfinden soll, so muss für $r = r_0$

$$\zeta_0 = C' / r_0^2$$

sein. Demnach ist für $r > r_0$

$$r\,\omega' = r_0^2 \zeta_0 / r.$$

Wird r_0 unendlich klein, dagegen ζ_0 unendlich gross, so erhalten wir einen sogenannten *Wirbelfaden*.

Die Wirkung des Wirbelfadens auf die umgebende Flüssigkeit hängt von dem Producte aus seinem Querschnitt und seiner Winkelgeschwindigkeit ab. Setzen wir $m = \pi r_0^2 \zeta_0$, so ist die Geschwindigkeit h eines Flüssigkeitstheilchens, welches nicht dem Wirbel angehört,

$$h = r\,\omega' = m / \pi r.$$

Die Wirbelfäden können auch eine andere Gestalt haben; sie sind zuerst von v. Helmholtz[1]) untersucht, später von William Thomson und mehreren anderen. Man sieht aus diesem Beispiel, dass die einzelnen Theile der Flüssigkeit nicht sich um sich selbst zu drehen brauchen, wenn ihre Schwerpunkte Kreise beschreiben; obschon die Flüssigkeitsmenge, welche den Wirbelfaden umgiebt, sich um die z-Axe dreht, rotiren die einzelnen Tropfen, in welche die Masse zerlegt gedacht werden kann, doch nicht um sich selbst.

§ 44. Stationäre Bewegung mit Geschwindigkeitspotential.

Sind die Geschwindigkeitscomponenten von der Zeit unabhängig oder ändert sich an demselben Punkte in der Flüssigkeit der Bewegungszustand nicht, so ist die Bewegung *stationär*. Ist ein Geschwindigkeitspotential φ vorhanden, so hat man

$$\text{(a)} \qquad u = -\partial\varphi / \partial x, \quad v = -\partial\varphi / \partial y, \quad w = -\partial\varphi / \partial z,$$

---

[1]) Helmholtz, Crelle's Journal, Bd. 55. S. 25. 1858.

wo φ eine Function von x, y, z allein ist. Dasselbe gilt für das Potential Ψ der Kräfte; demnach muss die Function T in § 43 (i) constant sein. Setzen wir $T = -C$, so wird

(b) $$\Psi + p / \varrho + \tfrac{1}{2} h^2 = C.$$

Wirken keine anderen Kräfte als Druckkräfte im Inneren der Flüssigkeit, so kann man $\Psi = 0$ setzen und erkennt dann, dass die Geschwindigkeit wächst bei der Bewegung des Flüssigkeitstheilchens von Stellen höheren Druckes zu solchen niederen Druckes und umgekehrt.

Für eine Bewegung, bei welcher ein Geschwindigkeitspotential existirt, hat man als Continuitätsgleichung

(c) $$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Als Beispiel einer solchen Bewegung betrachten wir eine in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeitsmasse ruhende Kugel. Die Theilchen der Flüssigkeit, welche vom Kugelmittelpunkt weit entfernt sind, bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit in derselben Richtung.

Der Kugelmittelpunkt liege im Coordinatenanfangspunkt O; der Radius der Kugel sei R. Die Flüssigkeitstheilchen, deren Abstand r von O unendlich ist, mögen sich mit der Geschwindigkeit w_0 in der mit der positiven z-Axe parallelen Richtung bewegen. Wir setzen das Geschwindigkeitspotential φ

(d) $$\varphi = V - w_0 z,$$

wo $V = 0$ für $r = \infty$ sein möge. Dann ist

(e) $$u = -\partial V / \partial x, \quad v = -\partial V / \partial y, \quad w = -\partial V / \partial z + w_0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (c) ist

(f) $$\nabla^2 V = 0.$$

Setzen wir $V = 1 / r$ oder gleich einem in Bezug auf x, y oder z genommenen Differentialquotienten von $1 / r$, so wird die Gleichung (f) befriedigt. Da die Erscheinung rings um die z-Axe herum symmetrisch ist, so wollen wir versuchen, ob durch die Annahme

(g) $$V = C . \partial (1 / r) / \partial z = -C z / r^3$$

die Bedingungen erfüllt werden.

An der Kugeloberfläche bewegen sich die Flüssigkeits-

theilchen längs der Oberfläche und die Componente der Geschwindigkeit in der Richtung des Radius ist Null, d. h.

$$(\partial \varphi / \partial r)_{r=R} = 0.$$

Setzen wir $z/r = \cos\gamma$, so wird

$$\varphi = -C\cos\gamma / r^2 - r w_0 \cos\gamma$$

und

$$d\varphi / dr = 2C\cos\gamma / r^3 - w_0 \cos\gamma.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

(h) $$C = \tfrac{1}{2} w_0 R^3 \quad \text{ist.}$$

Aus den Gleichungen (d), (g) und (h) folgt, dass

(i) $$\varphi = -\tfrac{1}{2} w_0 R^3 z / r^3 - w_0 z = -w_0 z (1 + \tfrac{1}{2} R^3 / r^3).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (e) erhalten wir

$$u = -\tfrac{3}{2} w_0 R^3 z x / r^5, \quad v = -\tfrac{3}{2} w_0 R^3 z y / r^5,$$
$$w = -\tfrac{1}{2} w_0 R^3 (3z^2 / r^5 - 1 / r^3) + w_0.$$

Wird $u^2 + v^2 = s^2$ und $x^2 + y^2 = q^2$ gesetzt, so ist

$$s = -\tfrac{3}{2} w_0 R^3 q z / r^5.$$

Sind q und z die Coordinaten der Bahn eines Flüssigkeitstheilchens, so lautet die Bahngleichung

(k) $$dq / dz = s / w.$$

Bedenkt man, dass $r^2 = q^2 + z^2$ ist, so ergiebt sich durch Integration der Gleichung (k)

$$q^2 (1 - R^3 / r^3) = c.$$

Dieses ist die Gleichung der Stromlinie, wenn c eine Constante bedeutet. Ist $c = 0$, so wird entweder $r = R$ oder $q = 0$, im ersten Falle erhält man die Gleichung eines grössten Kreises, im zweiten die Gleichung der z-Axe.

Der Druck p wird mit Hülfe der Gleichung (b) bestimmt. Da $\Psi = 0$ ist, so wird

$$p = \varrho (C - \tfrac{1}{2} h^2).$$

Es ist jedoch $h^2 = u^2 + v^2 + w^2$; für einen Punkt an der Kugeloberfläche wird also

$$h = \tfrac{3}{2} w_0 q / R.$$

Der Druck p ist demnach auf dem Theile der Kugel, welcher nach der positiven Seite der z-Axe liegt, ebenso gross

wie auf dem nach der negativen Seite der z-Axe gelegenen Theile der Kugel; die bewegte Flüssigkeitsmasse wird daher die Kugel nicht von ihrer Stelle entfernen können. Andererseits erfährt eine Kugel, die sich mit constanter Geschwindigkeit in unveränderlicher Richtung in einer unendlichen Flüssigkeitsmasse bewegt, keinen Widerstand bei der Bewegung. Dieses scheinbar überraschende Resultat erklärt sich dadurch, dass der Reibungswiderstand nicht berücksichtigt ist.

§ 45. Die Bewegungsgleichungen von Lagrange.

Ein Flüssigkeitstheilchen P befinde sich ursprünglich im Punkte, dessen Coordinaten a, b, c sind, nach Verlauf des Zeitelementes dt sei dasselbe im Punkte x, y, z. x, y, z sind Functionen von t, a, b und c; ändert sich t allein in diesen Functionen, so erhalten wir die Bahn eines bestimmten Theilchens. Ertheilen wir dagegen den Coordinaten a, b und c alle möglichen Werthe und lassen t constant, so ergeben sich die Oerter der verschiedenen Flüssigkeitstheilchen zu derselben Zeit. Wird der Druck mit p und die Dichte der Flüssigkeit mit ϱ bezeichnet, so erhalten wir aus § 41 (b), wenn

$$U = \dot{x}, \quad V = \dot{y}, \quad W = \dot{z}$$

gesetzt wird,

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \ddot{x} = X - 1/\varrho . \partial p/\partial x, \quad \ddot{y} = Y - 1/\varrho . \partial p/\partial y, \\ \ddot{z} = Z - 1/\varrho . \partial p/\partial z. \end{cases}$$

Um die in Bezug auf x, y, z genommenen Differentialquotienten fortzuschaffen, werden diese Gleichungen bezw. mit $\partial x/\partial a$, $\partial y/\partial a$, $\partial z/\partial a$, mit $\partial x/\partial b$, $\partial y/\partial b$, $\partial z/\partial b$ und endlich mit $\partial x/\partial c$, $\partial y/\partial c$, $\partial z/\partial c$ multiplicirt.

Durch Addition ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} (\ddot{x}-X).\partial x/\partial a+(\ddot{y}-Y).\partial y/\partial a+(\ddot{z}-Z).\partial z/\partial a+1/\varrho.\partial p/\partial a=0, \\ (\ddot{x}-X).\partial x/\partial b+(\ddot{y}-Y).\partial y/\partial b+(\ddot{z}-Z).\partial z/\partial b+1/\varrho.\partial p/\partial b=0, \\ (\ddot{x}-X).\partial x/\partial c+(\ddot{y}-Y).\partial y/\partial c+(\ddot{z}-Z).\partial z/\partial c+1/\varrho.\partial p/\partial c=0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen rühren von Lagrange her.

Zu den Gleichungen (b) tritt noch eine Beziehung, welche ausdrückt, dass das Volumen der Flüssigkeit nicht geändert wird. Die Flüssigkeitstheilchen, welche ursprünglich sich in

einem rechtwinkligen Parallelepipedon mit den Kanten da, db und dc befanden, sind zur Zeit t in einem Parallelepiped enthalten, dessen Kanten die Projectionen

$$\begin{array}{lll} \partial x / \partial a . da, & \partial y / \partial a . da, & \partial z / \partial a . da; \\ \partial x / \partial b . db, & \partial y / \partial b . db, & \partial z / \partial b . db; \\ \partial x / \partial c . dc, & \partial y / \partial c . dc, & \partial z / \partial c . dc \end{array}$$

haben.

Der Inhalt des Parallelepipeds zur Zeit t wird also

$$\begin{vmatrix} \partial x / \partial a, & \partial y / \partial a, & \partial z / \partial a \\ \partial x / \partial b, & \partial y / \partial b, & \partial z / \partial b \\ \partial x / \partial c, & \partial y / \partial c, & \partial z / \partial c \end{vmatrix} . da\, db\, dc.$$

Da die Flüssigkeit incompressibel sein soll, so lautet die *Continuitätsgleichung*

$$\text{(c)} \qquad \begin{vmatrix} \partial x / \partial a, & \partial y / \partial a, & \partial z / \partial a \\ \partial x / \partial b, & \partial y / \partial b, & \partial z / \partial b \\ \partial x / \partial c, & \partial y / \partial c, & \partial z / \partial c \end{vmatrix} = 1.$$

Zur Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen betrachten wir eine Flüssigkeitsmasse, die sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Axe dreht, welche senkrecht nach unten gerichtet ist. Wir haben dann

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g$$

und setzen

$$z = c, \quad a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

ferner

$$x = r \cos(\varphi + \omega t) = a \cos \omega t - b \sin \omega t,$$

$$y = r \sin(\varphi + \omega t) = b \cos \omega t + a \sin \omega t.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$\partial x / \partial a = \cos \omega t, \quad \partial x / \partial b = -\sin \omega t, \quad \partial x / \partial c = 0,$$

$$\partial y / \partial a = \sin \omega t, \quad \partial y / \partial b = \cos \omega t, \quad \partial y / \partial c = 0;$$

$$\partial z / \partial a = 0, \quad \partial z / \partial b = 0, \quad \partial z / \partial c = 1.$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y, \quad \ddot{z} = 0.$$

Die Continuitätsgleichung (c) ist erfüllt und die Bewegungsgleichungen (b) lauten:

$$\partial p / \partial a = \varrho\, \omega^2 a, \quad \partial p / \partial b = \varrho\, \omega^2 b, \quad \partial p / \partial c = g \varrho.$$

Demnach ergiebt sich durch Integration

$$p = C + \varrho\left(\tfrac{1}{2}\,\omega^2(a^2 + b^2) + gc\right).$$

Diese Lösung der Aufgabe stimmt mit der in § 40 gegebenen überein.

§ 46. Wellenbewegungen.

Die Lagrange'schen Gleichungen können mit Vortheil benutzt werden zur Untersuchung der unter dem Einflusse der Schwerkraft in einer Flüssigkeit stattfindenden Wellenbewegung. Alle Flüssigkeitstheilchen mögen sich in ebenen Curven, die der xz-Ebene parallel sind, bewegen; die x-Axe sei horizontal, die z-Axe sei senkrecht nach unten gerichtet. Wird also $y = b$ gesetzt, so erhalten wir

$$\partial x/\partial b = 0,\quad \partial y/\partial a = 0,\quad \partial y/\partial b = 1,\quad \partial y/\partial c = 0,\quad \partial z/\partial b = 0$$

und

$$\ddot{y} = 0.$$

Setzen wir noch $p = \varrho P$, so lauten die Bewegungsgleichungen § 45 (b)

$$\text{(a)}\qquad \begin{cases} \ddot{x}\,.\,\partial x/\partial a + (\ddot{z} - g)\,.\,\partial z/\partial a + \partial P/\partial a = 0,\\ \ddot{x}\,.\,\partial x/\partial c + (\ddot{z} - g)\,.\,\partial z/\partial c + \partial P/\partial c = 0,\end{cases}$$

und die Continuitätsgleichung § 45 (c) hat die Form

$$\text{(b)}\begin{cases} \partial x/\partial a\,.\,\partial z/\partial c\\ -\,\partial z/\partial a\,.\,\partial x/\partial c = 1.\end{cases}$$

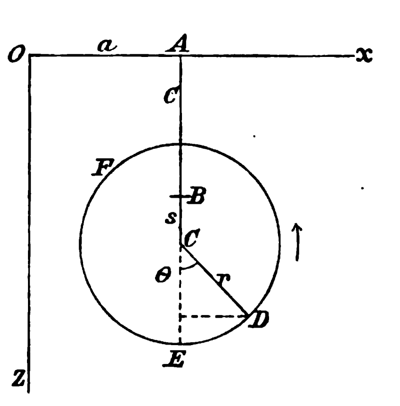


Fig. 47.

Ein Flüssigkeitstheilchen B (Fig. 47), welches in der Ruhelage die Coordinaten $OA = a$ und $AB = c$ haben möge, bewege sich in einem Kreise DFE, dessen Centrum in C liegt. Das Theilchen befinde sich in D. Der Winkel zwischen CD und der lothrechten Linie CE sei Θ und ferner $BC = s$ und $CD = r$. Dann ist

$$\text{(c)}\qquad x = a + r\sin\Theta,\quad z = c + s + r\cos\Theta,\quad \Theta = mt + na.$$

Hier bedeuten m und n Constante; r und s sind Functionen von c. Wir erhalten also

$$\partial x/\partial a = 1 + nr\cos\Theta;\ \partial z/\partial a = -nr\sin\Theta,\ \partial x/\partial c = \partial r/\partial c.\sin\Theta,$$
$$\partial z/\partial c = 1 + \partial s/\partial c + \partial r/\partial c.\cos\Theta.$$

Durch diese Beziehungen erhält die Gleichung (b) die Form

$$\partial s/\partial c + nr.\partial r/\partial c + \{nr(1 + \partial s/\partial c) + \partial r/\partial c\}\cos\Theta = 0.$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von t oder Θ besteht, so haben wir

(d) $\partial s/\partial c + nr.\partial r/\partial c = 0$ und $\partial r/\partial c + nr(1 + \partial s/\partial c) = 0.$

Ferner ergeben sich aus den Gleichungen (a) die Beziehungen:

(e) $$-(m^2 - gn)r\sin\Theta + \partial P/\partial a = 0,$$
$$-m^2 r.\partial r/\partial c - g(1 + \partial s/\partial c) - m^2 r(1 + \partial s/\partial c)\cos\Theta$$
$$-g.\partial r/\partial c.\cos\Theta + \partial P/dc = 0,$$

von denen die letztere in Folge der Gleichungen (d) in die Form

f) $-(m^2 - gn)r\{\partial r/\partial c + (1 + \partial s/\partial c)\cos\Theta\} - g + \partial P/\partial c = 0$

übergeht.

Ist der Druck nur abhängig von c, so folgt aus (e) und (f), dass

(g) (h) $$m^2 = gn,\quad P = gc,$$

wenn die Constante gleich Null gesetzt wird; der Druck verschwindet also für $c = 0$, was an der freien Oberfläche der Flüssigkeit gelten soll.

Die Bahnen der Theilchen sind Kreise. Braucht ein Theilchen zum Durchlaufen der Bahn die Zeit T, d. h. ist T die Schwingungsdauer, so haben wir

$$m = 2\pi/T \text{ und } \Theta = 2\pi/T.(t + 2\pi a/Tg).$$

Ist λ die Wellenlänge und h die Wellengeschwindigkeit, so ergiebt sich

$$h = Tg/2\pi \text{ und } h = \lambda/T,$$

woraus folgt, dass

(i) $$h = \sqrt{g\lambda/2\pi} \text{ und } n = 2\pi/\lambda.$$

Bei der Bewegung beschreibt das Theilchen einen Kreis, dessen Centrum wenig über der Ruhelage des Theilchens liegt. Nach der ersten der Gleichungen (d) ist nämlich

$$s = -\tfrac{1}{2} n r^2,$$

wo die Constante fortfällt, da s und r gleichzeitig verschwinden. Wir haben auch

(k) $$s = -\pi r^2 / \lambda.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (d) folgt, dass

$$d \log r + n d(c + s) = 0.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\log r + n(c + s) = k,$$

wo k eine Constante ist. Für ein Theilchen in der Oberfläche ist $c = 0$; werden die Werthe von r und s für dasselbe Theilchen mit R und S bezeichnet, so ist

$$\log R + nS = k.$$

Wir haben ferner

$$\log(r / R) + n(c + s - S) = 0.$$

$c + s - S = H$ ist der senkrechte Abstand zwischen dem Mittelpunkte der Bahn des betrachteten Flüssigkeitstheilchens und dem Mittelpunkte der Bahn eines Theilchens in der Oberfläche. Man hat also

(l) $$r = R e^{-2\pi H / \lambda}.$$

Wird ds / dc aus den Gleichungen (d) eliminirt, so erhalten wir

$$dr + nr(dc - nr\,dr) = 0.$$

Die Integration ergiebt

$$1/n \,.\, \log r + c - \tfrac{1}{2} n r^2 = k'.$$

Für die Theilchen an der Oberfläche ist

$$1/n \,.\, \log R - \tfrac{1}{2} n R^2 = k'.$$

Demnach wird

(m) $$c = \lambda / 2\pi \,.\, \log(R / r) - \pi / \lambda \,.\, (R^2 - r^2).$$

Die freie Oberfläche kann man sich dadurch entstanden denken, dass ein Kreiscylinder auf der Unterseite einer hori-

zontalen Fläche AB (Fig. 48) rollt, die in der Höhe $OA = \lambda/2\pi$ über den Mittelpunkten der Bahnen liegt, welche die Theilchen

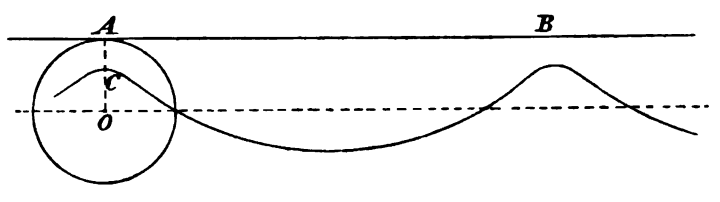


Fig. 48.

in der Oberfläche beschreiben. Die freie Oberfläche wird dann von einer geraden Linie, deren Abstand von der Cylinderaxe gleich R ist, beschrieben.

Fünfter Abschnitt.

Innere Reibung.

§ 47. Innere Kräfte.

Bei der Behandlung der Bewegung der flüssigen Körper ist die Reibung zwischen den Flüssigkeitstheilchen nicht berücksichtigt worden. Zwischen den verschieden schnell bewegten Theilchen einer Flüssigkeit findet eine Reibung in verschiedenem Grade statt. In Folge der Reibung ist die Zähflüssigkeit mehr oder weniger gross. Wir wollen die Reibung durch die Bewegung der Flüssigkeit zu bestimmen suchen.

Alle Theilchen einer Flüssigkeitsmasse mögen sich in einer zur x-Axe parallelen Richtung bewegen und alle in demselben Abstande von der xz-Ebene sich befindenden Theilchen sollen dieselbe Geschwindigkeit haben. Die Geschwindigkeit wächst proportional mit dem Abstande von der xz-Ebene. Die eine Flüssigkeitsschicht gleitet an der anderen hin und giebt dadurch Veranlassung zu einem bestimmten Reibungswiderstand, welcher nach Newton proportional mit

dem Geschwindigkeitsgefälle, d. h. mit der Aenderung der Geschwindigkeit, bezogen auf die Längeneinheit

$$du\,/\,dy = \varepsilon$$

angenommen werden kann. Die Reibung zwischen zwei auf einander folgenden Schichten ist dann proportional dem Geschwindigkeitsunterschiede und umgekehrt proportional dem Abstande dieser Schichten. Wir setzen also die Geschwindigkeit

$$u = u_0 + \varepsilon y.$$

OO' (Fig. 49) sei ein Theil der betrachteten Flüssigkeitsmasse; auf jede Flächeneinheit von $O'B$ wirkt in der Richtung Ox eine Tangentialkraft

(a) $$T = \mu\,.\,du\,/\,dy = \mu\varepsilon,$$

wo μ der *Reibungscoefficient* ist. Auf OB' wirkt eine Kraft $-T$ in der Richtung Ox. Ferner müssen nach § 25 (d) die Tangentialkräfte T auf $O'A$ und OA' wirken, von denen die auf $O'A$ wirkende die Richtung Oy hat, während die auf OA' wirkende die Richtung yO hat.

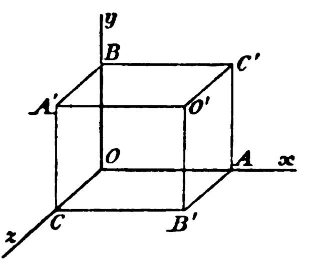


Fig. 49.

Bewegt sich die Flüssigkeitsmasse in der Richtung der y-Axe mit einer Geschwindigkeit

$$v = v_0 + \varepsilon' x,$$

so ist zur Erhaltung dieser Bewegung die Tangentialkraft

$$T' = \mu\,.\,dv\,/\,dx$$

erforderlich. Bestehen beide Bewegungen gleichzeitig, so wirkt auf die Flüssigkeit eine Tangentialkraft X_y, und wir haben

$$X_y = T + T' = \mu(du\,/\,dy + dv\,/\,dx).$$

Um die physikalische Bedeutung dieses Ausdrucks zu erkennen, betrachten wir ein Flüssigkeitstheilchen, welches sich ursprünglich im Punkte x, y, z befunden und eine unendlich kleine Bewegung, deren Projectionen auf die Axen ξ, η, ζ sind, ausgeführt hat. Dabei wird

$$u = \partial\xi\,/\,\partial t, \quad v = \partial\eta\,/\,\partial t$$

und

$$X = \mu\,.\,\partial\,/\,\partial t(\partial\xi\,/\,\partial y + \partial\eta\,/\,\partial x) = 2\mu\,.\,\partial x_y\,/\,\partial t.$$

Demnach ergiebt sich die Tangentialkraft aus der Reibung, welche bei einer Bewegung in einem flüssigen Körper entsteht. Wir setzen daher

$$
\text{(b)} \qquad \begin{cases} Z_y = 2\mu . \partial z_y / \partial t = \mu(\partial w / \partial y + \partial v / \partial z), \\ X_z = 2\mu . \partial x_z / \partial t = \mu(\partial u / \partial z + \partial w / \partial x), \\ Y_x = 2\mu . \partial y_x / \partial t = \mu(\partial v / \partial x + \partial u / \partial y). \end{cases}
$$

Nach der Erfahrung ist μ unabhängig vom Drucke. Die Bedeutung der übrigen Grössen in (b) ist von selbst einleuchtend.

Mit Hülfe der Formeln (b) kann man die Tangentialkräfte bestimmen, welche in der Flüssigkeit zur Ueberwindung der Reibungswiderstände wirken müssen. Wir wollen nun die Grösse der Normalkräfte ermitteln, die zur Ausdehnung einer zähen Flüssigkeit in einer gegebenen Richtung nöthig sind.

Die Flüssigkeit bewege sich in einer zu AB parallelen Richtung (Fig. 50). Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens, das sich im Abstande y von dieser Linie befindet, sei gleich u. Wie früher können wir setzen

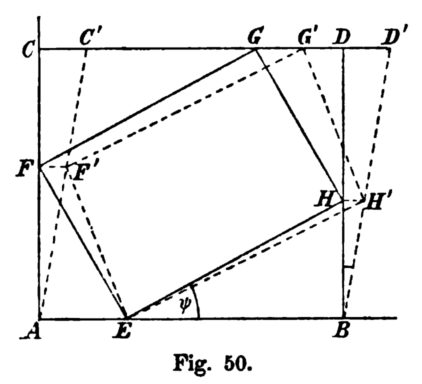


Fig. 50.

$$u = u_0 + \varepsilon y.$$

Nach Verlauf des Zeitelementes dt hat A die Strecke $u_0 dt$, C die Strecke $(u_0 + \varepsilon AC) dt$ zurückgelegt. CC' stellt die relative Bewegung des Punktes C in Bezug auf A dar und wir haben

$$CC' = \varepsilon . AC . dt.$$

Bezeichnen wir den Winkel CAC' mit $d\varphi$, so ist

$$\text{(c)} \qquad d\varphi = \varepsilon . dt.$$

Das im Rechteck $ABCD$ beschriebene zweite Rechteck $EFGH$ geht in das Parallelogramm $EF'G'H'$ über, und wir bestimmen die Verlängerung, welche die Seiten EH und EF dabei erhalten. Der Winkel HEB sei ψ, so ist

$$EH' = EH + HH' \cos\psi, \quad EF' = EF - FF' \sin\psi,$$

da HH' und FF' parallel mit AB sind. Ferner ist

$$HH' = BH.d\varphi = EH \sin\psi.d\varphi, \quad FF' = AF.d\varphi = EF\cos\psi.d\varphi.$$

Also haben wir

$$(EH' - EH) / EH = \sin\psi \cos\psi \, d\varphi;$$
$$(EF' - EF) / EF = -\sin\psi \cos\psi \, d\varphi.$$

Wird die Verlängerung der Längeneinheit von EH mit ds bezeichnet, so ist

(d) $$ds = \sin\psi \cos\psi \, d\varphi;$$

ds ist zugleich die Verkürzung der Längeneinheit von EF.

Um die betrachtete Formveränderung hervorzubringen, muss auf $ABCD$ eine Tangentialkraft T wirken, welche nach (a)

(e) $$T = \mu s$$

ist. Diese Kraft wirkt auf die CD entsprechende Fläche in der Richtung CD, aber auf die AB entsprechende in der Richtung BA; auf die beiden anderen Flächen wirken die Kräfte in den Richtungen CA und BD. Wir bestimmen die auf die Fläche EF wirkende Normalkraft N und setzen in § 24 (a)

$$\alpha = \psi, \quad \beta = \tfrac{1}{2}\pi - \psi, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\pi,$$

ferner

$$X_y = Y_x = T.$$

Während alle anderen Spannungscomponenten Null sind, ergiebt sich

(f) $$N = P\cos\psi + Q\sin\psi = 2T\sin\psi\cos\psi.$$

Nach (c) und (d) haben wir

$$ds = \sin\psi\cos\psi \,.\, s \,.\, dt,$$

nach (e) und (f)

$$N = 2\mu s \sin\psi\cos\psi.$$

Demnach ist

(g) $$N = 2\mu \,.\, ds / dt.$$

Die in der Fläche EH wirkende Spannung ist $-N$. Vorhin ist gezeigt, dass eine Längeneinheit in der Richtung EF die Verlängerung $-ds$ erfährt. Hätte auf die Oberfläche von $ABCD$ eine Normalspannung S gewirkt, so würde diese keinen Einfluss auf die Formveränderungen gehabt haben; aber in EF

hätte eine Normalkraft $S+N$, in EH eine Normalkraft $S-N$ gewirkt.

Wirken auf ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind, die Normalspannungen X_x, Y_y, Z_z, so bringen diese bei der Bewegung theils Formveränderungen, theils Ausdehnung des Volumens hervor. Wie in der Elasticitätslehre setzen wir die räumliche Dilatation $\Theta = x_x + y_y + z_z$, so ist $x_x - \frac{1}{3}\Theta$ der Theil der Ausdehnung in der Richtung der x-Axe, welche hier in Betracht kommt. In derselben Weise setzen wir

$$3S = X_x + Y_y + Z_z$$

und

$$X_x - S$$

ist der Theil der Normalkraft in der Richtung der x-Axe, welcher Formveränderung hervorbringt. Mit Hülfe von (g) haben wir

$$X_x - S = 2\mu(\partial x_x / \partial t - \tfrac{1}{3}\partial\Theta / \partial t).$$

Setzen wir endlich für $-S$ eine Grösse p, die als Druck betrachtet werden kann wegen ihrer Analogie mit dem Drucke in idealen Flüssigkeiten und Gasen, und bedenken wir, dass

$$x_x = \partial\xi / \partial x, \quad \partial x_x / \partial t = \partial u / \partial x \text{ u. s. w.,}$$

so ergiebt sich

$$\text{(h)} \quad X_x = -p + 2\mu . \partial u/\partial x - \tfrac{2}{3}\mu(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z).$$

Analoge Ausdrücke gelten für Y_y und Z_z.

Nach der Gleichung (h) hat μ die Dimension $ML^{-1}T^{-1}$. μ ist für viele Flüssigkeiten und Gase bestimmt, es ändert sich stark mit der Temperatur. Nachfolgende Werthe gelten für 0° C.

Wasser: 0,01775, Alkohol: 0,01838, Luft: 0,000182.

§ 48. Die Bewegungsgleichungen für eine zähe Flüssigkeit.

Wir stellen die Bewegungsgleichungen für eine Flüssigkeit auf, in welcher innere Reibung stattfindet. Nach § 25 wirken die Spannungscomponenten auf die Volumeneinheit in der Richtung der x-Axe mit der Kraft

$$(X) = \partial X_x / \partial x + \partial X_y / \partial y + \partial X_z / \partial z.$$

Ist U die Geschwindigkeit eines einzelnen Theilchens der Flüssigkeit in der Richtung der x-Axe, so ist

$$\varrho \dot{U} = (X) + \varrho X,$$

wo X nach der üblichen Bezeichnungsweise die Kraftcomponente in der Richtung der x-Axe bezeichnet. Nach § 47 (b) und (h) haben wir

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\varrho \dot{U} = \varrho X - \partial p \,/\, \partial x + \mu \nabla^2 u \\ &+ \tfrac{1}{3} \mu . \partial (\partial u \,/\, \partial x + \partial v \,/\, \partial y + \partial w \,/\, \partial z) \,/\, \partial x. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung (a) und die analogen, welche für die Geschwindigkeiten V und W in der Richtung der y- und z-Axe gelten, rühren von Stokes[1]) her. Ausserdem haben wir die Continuitätsgleichung:

$$\text{(b)} \quad \partial \varrho \,/\, \partial t + \partial (\varrho u) \,/\, \partial x + \partial (\varrho v) \,/\, \partial y + \partial (\varrho w) \,/\, \partial z = 0.$$

Wir setzen voraus, dass die Flüssigkeit incompressibel ist und haben

$$\text{(c)} \quad \partial u \,/\, \partial x + \partial v \,/\, \partial y + \partial w \,/\, \partial z = 0.$$

$$\text{(d)} \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho(\dot{u} + u . \partial u \,/\partial x + v . \partial u \,/\partial y + w . \partial u \,/\partial z) &= \mu \nabla^2 u + \varrho X - \partial p / \partial x, \\ \varrho(\dot{v} + u . \partial v \,/\partial x + v . \partial v \,/\partial y + w . \partial v \,/\partial z) &= \mu \nabla^2 v + \varrho Y - \partial p / \partial y, \\ \varrho(\dot{w} + u . \partial w /\partial x + v . \partial w /\partial y + w . \partial w /\partial z) &= \mu \nabla^2 w + \varrho Z - \partial p / \partial z. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen werden noch einfacher, wenn die Bewegung stationär ist, d. h. wenn

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{v} = 0, \quad \dot{w} = 0.$$

Ist die Geschwindigkeit sehr klein, so können die Glieder

$$u . \partial u \,/\, \partial x, \quad v . \partial u \,/\, \partial y \quad \text{u. s. w.}$$

fortgelassen werden, und wir haben dann

$$\text{(e)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\mu \nabla^2 u + \varrho X - \partial p \,/\, \partial x = 0, \quad \mu \nabla^2 v + \varrho Y - \partial p \,/\, \partial y = 0, \\ &\mu \nabla^2 w + \varrho Z - \partial p \,/\, \partial z = 0. \end{aligned} \right.$$

Haben die Kräfte ein Potential Ψ, so wird

$$\text{(f)} \quad \nabla^2 p + \varrho \nabla^2 \Psi = 0.$$

Werden die Rotationscomponenten

$$\xi = \tfrac{1}{2}(\partial w \,/\, \partial y - \partial v \,/\, \partial z), \quad \eta = \tfrac{1}{2}(\partial u \,/\, \partial z - \partial w \,/\, \partial x),$$
$$\zeta = \tfrac{1}{2}(\partial v \,/\, \partial x - \partial u \,/\, \partial y)$$

---

[1]) Stokes, Cambridge Phil. Tr. Vol. VIII. p. 297. 1845.

eingeführt, und haben die Kräfte ein Potential, so wird nach (e)

(g) $$\nabla^2 \xi = 0, \quad \nabla^2 \eta = 0, \quad \nabla^2 \zeta = 0.$$

Ferner ist

(h) $$\partial \xi / \partial x + \partial \eta / \partial y + \partial \zeta / \partial z = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen wird allgemein angenommen, dass die Flüssigkeitstheilchen, welche die Wände berühren, keine relative Bewegung in Bezug auf diese haben; an der Grenze der Flüssigkeit muss also

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{w} = 0$$

sein, wenn $\bar{u}$, $\bar{v}$ und $\bar{w}$ die Geschwindigkeitscomponenten an der Grenzfläche sind. Sind feste Körper in der Flüssigkeit, die sich bewegt, so kann man in der Regel annehmen, dass jedes Theilchen an der Oberfläche des festen Körpers dieselbe Geschwindigkeit hat wie das Flüssigkeitstheilchen, welches die Oberfläche berührt.

§ 49. Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt.

Die Bewegung sei langsam und das Rohr sehr eng. Dasselbe liege horizontal, sodass die Schwere die Bewegung nicht beeinflusst. Die Axe des Rohres sei die z-Axe und alle Flüssigkeitstheilchen mögen sich parallel der z-Axe bewegen. Dann ist

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Die Gleichungen § 48 (e), (c) und (f) lauten dann

(a) $$\partial p / \partial x = 0, \quad \partial p / \partial y = 0, \quad \mu \nabla^2 w = \partial p / \partial z;$$

(b), (c) $$\partial w / \partial z = 0; \quad \nabla^2 p = 0.$$

Aus (c) ergiebt sich, dass

(d) $$d^2 p / dz^2 = 0 \text{ und } p = f z + p_0,$$

wo f und p_0 Constante sind.

Aus (a) folgt ferner

$$\mu \nabla^2 w = f.$$

Da w vom Abstande r des betrachteten Flüssigkeitstheilchens von der Axe des Rohres abhängt, so ist, wenn $r^2 = x^2 + y^2$ gesetzt wird,

$$\nabla^2 w = d^2 w / dr^2 + 1/r \,.\, dw / dr.$$

Demnach ist

$$d^2w / dr^2 + 1/r \,.\, dw / dr = f / \mu.$$

Durch Integration wird

$$w = c \log r + f r^2 / 4\mu + w_0.$$

Da w einen endlichen Werth hat für $r = 0$, so muss die Constante $c = 0$ sein. Also ist

$$\text{(e)} \qquad w = w_0 + f r^2 / 4\mu,$$

wo w_0 die Geschwindigkeit in der Axe der Röhre ist. Ist für $z = 0$ der Druck gleich p_0 und für $z = l$ der Druck gleich p_1, so haben wir nach (d)

$$f = (p_1 - p_0) / l.$$

Setzen wir diesen Werth f in die Gleichung (e) ein, so ist

$$w = w_0 - r^2 \,.\, (p_0 - p_1) / 4 \mu l.$$

Für alle Flüssigkeitstheilchen, welche die Wand des Rohres berühren, ist $w = 0$. Ist R der Radius des Rohres, dann wird also

$$0 = w_0 - R^2 . (p_0 - p_1) / 4 \mu l.$$

Wir erhalten endlich

$$w = (p_0 - p_1)(R^2 - r^2) / 4 \mu l.$$

Ist m das Flüssigkeitsvolumen, welches in einer Secunde durch einen Querschnitt des Rohres strömt, so haben wir

$$\text{(f)} \qquad m = \int_0^R 2 \pi r \, dr \,.\, w = \pi (p_0 - p_1) R^4 / 8 \mu l,$$

d. h. *das Flüssigkeitsvolumen ist direct proportional der vierten Potenz des Radius des Rohres, umgekehrt proportional der Länge und umgekehrt proportional der Constanten* μ.

Die Strömung der Flüssigkeiten durch enge Röhren hat Poiseuille zuerst untersucht; derselbe ist zu Resultaten gelangt, welche mit der obenstehenden Formel übereinstimmen.[1])

[1]) Von den neueren Werken über Hydrodynamik seien angeführt: Lamb, Treatise on the motion of fluids. Cambridge 1879. Auerbach, Die theoretische Hydrodynamik. Braunschweig 1881.

Sechster Abschnitt.

Capillarität.

§ 50. Die Oberflächenenergie.

Die Gestalt einer Flüssigkeitsmasse, auf welche keine äusseren Kräfte wirken, ist allein durch die Kräfte bestimmt, mit welchen ihre Theilchen auf einander wirken. Ist die Masse sehr gross, so wird sie in Folge der gegenseitigen Anziehung der Theilchen Kugelgestalt annehmen; ist dagegen die Masse klein, so wird die allgemeine Massenanziehung keine irgend merkliche Wirkung haben. Gleichwohl hat jede Flüssigkeitsmasse in Folge der *Cohäsionskraft* das Bestreben, eine bestimmte Gestalt, und zwar die Kugelgestalt anzunehmen. Aus den über die Wirkungsweise der Cohäsionskraft angestellten Versuchen geht deutlich hervor, dass diese Kraft nur zwischen Theilchen wirksam ist, die sich in sehr geringem Abstande von einander befinden. Ueber die Abhängigkeit dieser Kraft vom Abstande der Theilchen ist noch nichts bekannt. Man kann indessen vortheilhaft von einer Betrachtung ausgehen, die in einer verhältnissmässig einfachen Weise zu den Gesetzen der Capillarität führt.

Um die Gestalt eines kugelförmigen Tropfens irgend einer Flüssigkeit zu ändern ist eine Arbeit erforderlich. Wenn kein Reibungswiderstand in der Flüssigkeit stattfindet, so kann diese Arbeit nur von den Flüssigkeitstheilchen herrühren, die sich in oder dicht an der Oberfläche befinden; denn auf ein Flüssigkeitstheilchen, welches sich in grösserem Abstande von der Oberfläche befindet, können nur die Theilchen wirken, welche sich in sehr geringem Abstande von dem betrachteten befinden; diese bleiben entweder an ihren Orten oder werden durch andere ersetzt, welche in derselben Weise wirken wie die ersetzten. Die geleistete Arbeit ist also dazu verwendet, um neue Theilchen zu den vorhandenen in die Oberfläche zu bringen oder, was dasselbe ist, um die Oberfläche zu ver-

grössern. Wird die Flüssigkeitsoberfläche S um die unendlich kleine Grösse dS vergrössert, so ist dazu die Arbeit CdS nöthig; C ist eine constante Grösse und wird als *Capillaritätsconstante* bezeichnet.

In einer Oberfläche stossen im allgemeinen zwei Körper zusammen und C hängt von der Beschaffenheit dieser beiden Körper ab. Bei einem fallenden Regentropfen berühren sich Wasser und Luft in der Oberfläche. An der Oberfläche eines Oeltropfens, der nach dem bekannten Plateau'schen Versuch in einer Mischung von Wasser und Alkohol schwebt, berühren sich zwei Flüssigkeiten. Berührt eine Flüssigkeit einen festen Körper, so besitzt die gemeinschaftliche Grenzfläche auch eine bestimmte Energie; dasselbe gilt bei zwei festen Körpern.

Die Capillaritätsconstante zweier Körper a und b sei C_{ab}, und S sei die Fläche, in welcher sich die beiden Körper berühren. Die potentielle Energie E_p, welche die Oberfläche S besitzt, ist

(a) $$E_p = C_{ab} . S.$$

Da $C_{ab} = E_p / S$ ist und die Dimensionen von E_p und S bezw. $L^2 T^{-2} M$ und L^2 sind, so ist die Dimension der Capillaritätsconstanten $T^{-2} M$.

In der Oberfläche einer Flüssigkeit ist eine bestimmte Spannung vorhanden, die Oberfläche verhält sich wie eine elastische Haut. Wird auf einer ebenen Flüssigkeitsoberfläche ein Rechteck $DEFG$ beschrieben, und behalten drei Seiten unverändert ihre Lage, während die vierte Seite FG zugleich mit den in ihr befindlichen Flüssigkeitstheilchen um eine Strecke FH in der Richtung EF fortbewegt wird, so ist die Oberfläche um die Fläche $FG . FH$ vergrössert, und die Oberflächenenergie hat den Zuwachs $C . FG . FH$ erhalten, wenn C die Capillaritätsconstante ist. Um die betrachtete Bewegung hervorzubringen, muss auf die Längeneinheit von FG eine Kraft K wirken; die geleistete Arbeit ist also auch

$$K . FG . FH.$$

Daraus ergiebt sich, dass

(b) $$K = C$$

ist, oder *die Spannung in der Längeneinheit der Flüssigkeitsoberfläche ist numerisch gleich der Capillaritätsconstanten.* Eine

solche Neubildung von Flüssigkeitsoberflächen lässt sich leicht mit den Plateau'schen Flüssigkeitshäutchen ausführen.

Existirt eine solche Spannung in der Flüssigkeitsoberfläche, so übt dieselbe einen Druck auf die Flüssigkeit aus. P (Fig. 51) sei ein Punkt in der Oberfläche, welche in der Nähe von P convex sein möge. Durch P werden zwei ebene Schnitte gelegt, welche die im Punkte P construirte Normale der Fläche enthalten. Die eine dieser Ebenen möge die Oberfläche in der Curve PA, die andere in der Curve PB schneiden. PA und PB sollen sich rechtwinklig schneiden und ihre Krümmungsradien sollen die Hauptkrümmungsradien der Fläche im Punkte P sein. Eine dritte durch die Normale von P gelegte Ebene durchschneide die Fläche in der Curve PF, deren Krümmungsradius R nach dem Euler'schen Satze aus der Gleichung

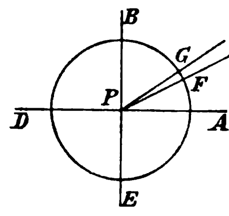


Fig. 51.

$$1/R = \cos^2\varphi / R_1 + \sin^2\varphi / R_2 \tag{c}$$

bestimmt wird, wenn φ der Winkel zwischen PA und PF ist. Um den Punkt P als Mittelpunkt wird eine Kugel mit unendlich kleinem Radius gelegt, welche die Fläche in der Curve $AFBDE$ schneidet. Auf ein Element FG dieser Curve wirkt die Zugkraft $C.FG$ von dem umgebenden Theil der Oberfläche. Wir setzen $FG = r\,d\varphi$, dann ist die Zugkraft gleich $C r\,d\varphi$. Die Richtung der letzteren bildet mit der Normalen der Oberfläche einen Winkel, dessen Cosinus gleich r/R ist; die in der Richtung der Normalen wirkende Kraft ist demnach $Cr^2/R\,.\,d\varphi$. Die Oberflächenspannung zieht also das Oberflächenelement $ABDE$ ins Innere der Flüssigkeit mit einer Kraft

$$Cr^2\int_0^{2\pi} d\varphi / R.$$

Ist P der Druck auf die Flächeneinheit, so ist also

$$P\pi r^2 = Cr^2\int_0^{2\pi} d\varphi / R \quad \text{und} \quad P = C/\pi\,.\int_0^{2\pi} d\varphi / R.$$

Wird für R der in (c) gegebene Werth eingeführt, so ergiebt sich

(d) $$P = C(1 / R_1 + 1 / R_2).$$

Es ist wahrscheinlich, dass zu dem gefundenen Druck, der von der Oberflächenkrümmung herrührt, noch ein constanter Druck M hinzukommt, der auf die Flüssigkeit wirkt, wenn die Oberfläche derselben eben ist. Der gesammte von den Capillaritätskräften herrührende Druck ist also

$$M + C(1 / R_1 + 1 / R_2),$$

wo M und C von der Beschaffenheit der beiden Körper abhängen, die sich in der Oberfläche berühren. Da indessen M aus den Beobachtungen herausfällt, so soll dasselbe nicht weiter berücksichtigt werden.

C ist bei 20° C. für die Berührungsfläche zwischen Wasser und Luft 81, Quecksilber und Luft 540, Quecksilber und Wasser 418.

§ 51. Die Gleichgewichtsbedingungen.

Das Gleichgewicht ist in einer Flüssigkeitsmasse vorhanden, wenn die potentielle Energie derselben keine Aenderung erfährt dadurch, dass die Lage und Gestalt der Masse unendlich wenig verändert wird. Da die Energie von der Grösse der Oberfläche abhängt, ist es also nothwendig den Zuwachs δS der Oberfläche zu bestimmen. Eine Flüssigkeit A sei von einer anderen B umgeben; beide Flüssigkeiten sollen sich nicht mit einander mischen. Wirken auf dieselben keine äusseren Kräfte ein, so wird A Kugelgestalt annehmen.

Die Fläche S sei von der Flüssigkeit A aus betrachtet concav und bewege sich bei einer unendlich geringen Formveränderung nach der Seite, wo B sich befindet. s sei die Randcurve der Fläche S, und S' sei die Form und Stellung der Fläche S nach eingetretener Formveränderung. Wir bezeichnen die Randcurve von S' mit s' und errichten in allen Punkten von s Normalen auf S, welche die Fläche S' in einer neuen Curve σ schneiden, die innerhalb s' liegen möge. Wird der unendlich kleine Abstand zwischen σ und s' mit δl be-

zeichnet, so ist der Theil von S', welcher zwischen σ und s' liegt, gleich

(b) $$\int \delta l . d s.$$

Wir errichten dann in einem Punkte P von S die Normale PP', welche S' in P' durchschneidet, setzen $PP' = \delta v$ und ziehen durch P auf der Fläche S zwei Curven PE und PF, von denen die eine dem Maximum der Krümmung, die andere dem Minimum der Krümmung der Fläche in P entspricht. Durch diese Hauptkrümmungscurven und die beiden unendlich benachbarten wird auf der Fläche S ein Rechteck $PEQF$ abgegrenzt, dessen Seiten $PE = a$ und $PF = b$ unendlich klein sind. Sind R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien, ferner α und β zwei Winkel, so ist

$$a = R_1 \alpha, \quad b = R_2 \beta \text{ und also } dS = a . b = R_1 R_2 \alpha \beta.$$

Die in E, Q und F auf S errichteten Normalen schneiden S' in E', Q', F'. Wir setzen $P'E' = a'$, $P'F' = b'$ und erhalten

$$a' = (R_1 + \delta v) \alpha, \quad b' = (R_2 + \delta v) \beta.$$

Ist S_1' der Theil von S', welchen σ begrenzt, so haben wir

$$d S_1' = a' b' = (R_1 R_2 + (R_1 + R_2) \delta v) \alpha \beta$$

und ferner

$$d(S_1' - S) = (1 / R_1 + 1 / R_2) \delta v d S.$$

Es ist also

(c) $$S_1' - S = \int (1 / R_1 + 1 / R_2) \delta v d S.$$

Der gesammte Zuwachs δS, den S bei der Gestaltsänderung erhalten hat, ist also

(d) $$\delta S = \int (1 / R_1 + 1 / R_2) \delta v d S + \int \delta l . d s.$$

Dieser Ausdruck behält seine Gültigkeit, selbst wenn δl und δv in einzelnen oder allen Punkten der Fläche S negativ werden. Wird die Flüssigkeitsmasse von einer einzigen Fläche begrenzt, so ist die Randcurve s gleich Null; ist die Randcurve fest, so ist $\delta l = 0$. In beiden Fällen lautet die Gleichgewichtsbedingung

(e) $$\int (1 / R_1 + 1 / R_2) \delta v d S = 0.$$

Da wir den von der Flüssigkeitsmasse eingenommenen Raum als constant betrachten, so muss

(f) $$\int \delta \nu \, dS = 0$$

sein, da $\int \delta \nu \, dS$ die Vergrösserung des Volumens der Flüssigkeit angiebt.

Aus (e) und (f) ergiebt sich, dass

(g) $$1 / R_1 + 1 / R_2 = c$$

ist, wo c eine Constante bedeutet. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch aus § 50 (d), wenn wir beachten, dass der Druck in der Flüssigkeitsmasse constant sein muss.

Stossen drei Flüssigkeiten, die sich nicht mit einander mischen, in einer Linie zusammen, so können die drei Kantenwinkel, welche die Flüssigkeitsoberflächen mit einander bilden, bestimmt werden. Solche Verhältnisse treten auf, wenn ein Oeltropfen auf einer Wasseroberfläche liegt. Die drei hier zusammenstossenden Flüssigkeiten sind Wasser, Oel und Luft. Allgemein seien dieselben mit a, b und c bezeichnet; die Energie einer Flächeneinheit der Grenzfläche zwischen a und b sei C_{ab}; C_{ac} und C_{bc} haben eine ähnliche Bedeutung. Es genügt die Untersuchung des Falles, wo die Kante eine gerade Linie ist. Die Richtungen der drei Oberflächenspannungen C_{ab}, C_{ac} und C_{bc} schliessen die Kantenwinkel ein; es ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die drei Kräfte C_{ab}, C_{ac}, C_{bc} im Gleichgewichte sind. α, β, γ seien die drei gesuchten Kantenwinkel, und zwar gehöre α zu a, β zu b und γ zu c. Wir haben dann als Gleichgewichtsbedingung

(h) $$C_{bc} / \sin \alpha = C_{ac} / \sin \beta = C_{ab} / \sin \gamma .$$

Aus diesen Gleichungen können α, β, γ im allgemeinen bestimmt werden. Wenn aber die eine der Spannungen, etwa C_{bc}, grösser als die Summe der beiden anderen ist, so kann kein Gleichgewicht eintreten. In diesem Falle breitet sich die Flüssigkeit a als eine sehr dünne Schicht aus, welche die Flüssigkeiten b und c trennt; wir haben dann das Verhalten eines Tropfens Terpentinöl auf Wasser.

Der in (h) enthaltene Satz ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung. Wird die Kante um ein unendlich kleines Stück aus ihrer Lage entfernt, so erhält die Summe der Oberflächenenergien

$$C_{bc} . S_1 + C_{ac} . S_2 + C_{ab} . S_3,$$

wo S_1, S_2 und S_3 die drei Grenzflächen bezeichnen, den Zuwachs

$$C_{bc}\, \delta S_1 + C_{ac}\, \delta S_2 + C_{ab}\, \delta S_3 .$$

Dieser Zuwachs muss gleich Null sein, wenn Gleichgewicht vorhanden ist; wir gelangen damit wieder zu den Gleichungen (h).

Wird ein fester Körper c (Fig. 51) von zwei Flüssigkeiten a und b berührt, so möge die Kante unendlich wenig längs der Oberfläche des festen Körpers verschoben werden. In diesem Falle ist

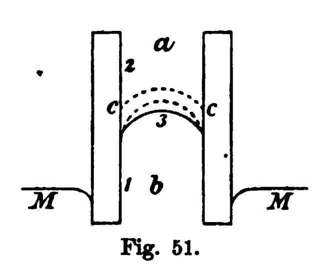


Fig. 51.

$$\delta S_1 = -\delta S_2 , \quad \delta S_3 = -\delta S_1 . \cos \alpha ,$$

und ferner

$$C_{bc} - C_{ac} = C_{ab} . \cos \alpha .$$

Wir haben demnach

$$\text{(i)} \qquad \cos \alpha = (C_{bc} - C_{ac}) \,/\, C_{ab} ,$$

wo α der sogenannte *Randwinkel* ist.

§ 52. Capillarröhren.

Als Anwendung betrachten wir ein cylindrisches, senkrecht gestelltes Rohr c (Fig. 51), das mit dem unteren Theile in eine Flüssigkeit b getaucht ist; der obere Theil des Rohres befindet sich in Luft, die mit a bezeichnet werden soll. Die Grenzflächen werden wie vorher mit S_1, S_2 und S_3 bezeichnet. S_1 ist die Berührungsfläche zwischen Flüssigkeit und Rohr, S_2 ist die Berührungsfläche zwischen Rohr und Luft, S_3 ist die Berührungsfläche zwischen Luft und Flüssigkeit. Die Flüssigkeitsoberfläche MM ausserhalb des Rohres möge unendlich gross sein; dieselbe kann also als ruhend betrachtet werden, selbst wenn die Oberfläche im Rohre bewegt wird. Die Fläche MM sei die xy-Ebene, die z-Axe sei senkrecht nach oben gerichtet. Ist g die Beschleunigung der Schwerkraft, ϱ die Dichte der Flüssigkeit, so ist die potentielle Energie eines Flüssigkeitstheilchens $\varrho\, d v$ gleich

$$g . \varrho\, d v . z .$$

Demnach ist die potentielle Energie der über der xy-Ebene liegenden Flüssigkeitsmasse

$$\int\int\int g\,\varrho\, z\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2} g\,\varrho \int\int z^2\, dx\, dy,$$

wo x, y, z von nun ab als zur Fläche S_3 gehörig betrachtet werden. Der Theil der potentiellen Energie E_p, dessen Variation hier betrachtet werden muss, ist

$$E_p = \tfrac{1}{2} g\,\varrho \int\int z^2\, dx\, dy + C_{ab} S_3 + C_{ac} S_2 + C_{bc} S_1.$$

Im Falle des Gleichgewichtes ist $\delta E_p = 0$ oder

$$\text{(a)}\qquad 0 = g\,\varrho \int\int z\, \delta z\, dx\, dy + C_{ab}\, \delta S_3 + C_{ac}\, \delta S_2 + C_{bc}\, \delta S_1.$$

Ist s die Länge der Schnittlinie der Fläche S_3 mit der inneren Fläche des Rohres, ist ferner φ der Winkel zwischen ds und der xy-Ebene und werden alle Punkte der Oberfläche S_3 um dasselbe unendlich kleine Stück δz gehoben, wo δz constant sein soll, so haben wir

$$\delta S_3 = 0, \quad \delta S_1 = -\,\delta S_2 = \int \cos\varphi\, \delta z\, ds.$$

Die Gleichung (a) lautet dann

$$\text{(b)}\qquad g\,\varrho \int\int z\, dx\, dy = (C_{ac} - C_{bc}) \int \cos\varphi\, ds.$$

Die Flüssigkeit wird demnach durch die Differenz der Spannungen in den Berührungsflächen S_2 und S_1 getragen.

Behält dagegen die Schnittlinie s ihre Lage und wölbt sich nur die Fläche S_3 mehr, so ist nach § 51 (d)

$$\delta S_3 = \int (1 / R_1 + 1 / R_2)\, \delta \nu\, d S_3$$

und ferner

$$\delta S_1 = \delta S_2 = 0,$$

wobei $\delta\nu$ ein Element der Normalen ist, welches zwischen den Flächen S und S' liegt.

Für $\delta z\, dx\, dy$ kann $\delta\nu\, dS_3$ gesetzt werden, und also folgt aus der Gleichung (a)

$$\int \{g\,\varrho\, z + C_{ab} (1 / R_1 + 1 / R_2)\}\, \delta\nu\, d S_3 = 0.$$

Da $\delta\nu$ eine willkürliche Grösse ist, so haben wir

$$\text{(c)}\qquad g\,\varrho\, z + C_{ab} (1 / R_1 + 1 / R_2) = 0.$$

Wird die Krümmung der Oberfläche durch die Differentialquotienten von z in Bezug auf x und y ausgedrückt, so ergiebt sich aus (c) eine Differentialgleichung zur Bestimmung

der Gestalt der Oberfläche. Ist der Randwinkel ausserdem gegeben, so ist die Oberfläche vollkommen bestimmt.

Ist der Querschnitt des Rohres kreisförmig und sehr eng, so kann man näherungsweise annehmen, dass

$$R_1 = R_2 = r / \cos\alpha$$

ist, wo r der Radius des Rohres und α der Randwinkel ist. Die Höhe z, bis zu welcher die Flüssigkeit emporsteigt, ist dann

$$z = -2\cos\alpha / g\varrho r \,.\, C_{ab}.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich aus der Gleichung (b), wenn

$$\int\int z\,dx\,dy = \pi r^2 z, \quad \int \cos\varphi\,ds = 2\pi r$$

gesetzt und die Gleichung § 51 (i) benutzt wird.

Die Theorie der Capillarität ist von Laplace in einem Supplement zum zehnten Buche der Mécanique céleste behandelt. Poisson hat über denselben Gegenstand ein grösseres Werk, betitelt: Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831, herausgegeben. Endlich hat Gauss eine epochemachende Untersuchung über die Capillaritätstheorie veröffentlicht in den Commentationes soc. scient. Göttingensis. Vol. VII. 1830. (Werke. Bd. 5. S. 29.) Das neueste ausführlichere Werk über die Capillarität ist: Mathieu, Théorie de la Capillarité. Paris 1883.

Siebenter Abschnitt.

Electrostatik.

§ 53. Electrische Grunderscheinungen.

Die Electricitätslehre geht von der Beobachtung aus, dass Bernstein und andere Körper durch Reibung die Eigenschaft erlangen, leichte Körper anzuziehen. Gray zeigte, dass diese Eigenschaft von einem Körper auf einen anderen übertragen

werden kann, dadurch gelangte man zu der Vorstellung, dass diese Eigenschaft durch das Vorhandensein eines *Fluidums* bedingt ist, welches durch Reibung im Körper gebildet oder freigemacht wird und welches unter gewissen Verhältnissen von Körper zu Körper übertreten kann. Dufay zeigte zuerst, dass es zwei sogenannte electrische Zustände giebt oder nach der erwähnten Vorstellung zwei Fluida, welche Franklin als *positive* und *negative* bezeichnete, da sie sich vollständig neutralisiren können.

Die Hypothese der beiden Fluida hat einen ausserordentlich grossen Einfluss auf die Entwicklung der Electricitätslehre gehabt. Poisson ging von dieser Auffassung bei seinen bahnbrechenden Untersuchungen über die electrische Vertheilung aus, später hat W. Weber auf derselben seine Theorie der electrischen Ströme begründet.

Im Gegensatz zu dieser Theorie, welche bei ihrer mathematischen Behandlung von der Vorstellung ausgeht, dass die electrische Einwirkung wie die Schwere eine fernewirkende Kraft sei, hat Faraday die Ansicht vertreten, dass die electrischen Kräfte sich von Theilchen zu Theilchen, also nicht unvermittelt, sondern durch die Wirkung eines Zwischenmediums, fortpflanzen. Jedoch ist es nicht möglich, die electrischen Erscheinungen vollständig ohne Einführung eines hypothetischen Mediums, des *Aethers*, zu erklären, und man stösst dabei auf eigenthümliche Schwierigkeiten, welche bis jetzt nicht ganz überwunden sind. Wie fruchtbar auch Faraday's Anschauungen sich erwiesen haben, wir können von denselben ausgehend doch noch manche Erscheinungen nicht erklären und eine vollkommen systematische Behandlung der Electricität kann bis jetzt nicht gegeben werden. In der vorliegenden Darstellung ist es daher auch nicht möglich gewesen von einem Gesichtspunkte aus das Gesammtgebiet zu betrachten; es ist das Bestreben nur darauf gerichtet, die wichtigsten der gefundenen Resultate vorzutragen.

Den Ausgangspunkt bilden die Untersuchungen Coulomb's über die mechanische Kraft, welche zwei electrische Körper auf einander ausüben. Zwei Körper mögen die in irgend einer Weise gemessenen Ladungen e_1 und e_2 und den Abstand r von

einander haben, dann wirken sie, wenn c eine Constante ist, nach dem Coulomb'schen Gesetze mit der Kraft $\mathfrak{F}$,

$$\mathfrak{F} = c \cdot e_1 e_2 / r^2,$$

auf einander. Jenachdem beide Ladungen gleichartig oder ungleichartig sind, stossen sich die Körper ab oder ziehen sich an. Ist die Vertheilung der Electricität auf ausgedehnten Körpern bekannt, so kann die mechanische Kraft, mit welcher die Körper auf einander wirken, berechnet werden. In der Regel kann jedoch die Vertheilung der Electricität in einem Körper nicht als gegeben betrachtet werden. Wird in einer Glas- oder Siegellackstange, also in verhältnissmässig schlecht leitenden Substanzen, durch Reiben Electricität entwickelt, so findet doch eine langsame Ableitung derselben im Laufe der Zeit statt. Die *Vertheilung* der Electricität auf guten Leitern hängt von der Gestalt derselben, von der Natur der sie umgebenden Körper und von der Ladung ab. Bei der Bestimmung der Vertheilung gehen wir von der Annahme aus, dass zwischen zwei Electricitätsmengen dieselbe Kraft wirkt, wie zwischen zwei Körpern, die mit diesen Electricitätsmengen geladen sind. Ist einem isolirten Leiter eine bestimmte Ladung mitgetheilt, so wirken die einzelnen Theile derselben auf einander und es tritt eine bestimmte Vertheilung ein.

Die mit Electricität geladenen Körper rufen in den in ihrer *Umgebung* befindlichen Körpern eine electrische Vertheilung hervor. Die Anziehung, welche ein geladener Körper auf einen unelectrischen ausübt, wird durch die Annahme erklärt, dass zunächst in dem letzteren positive und negative Electricität in gleichen Mengen vorhanden sind und dass unter dem Einflusse des geladenen Körpers eine Trennung der entgegengesetzten Electricitäten stattfindet, die vom geladenen Körper ausgehende Kraft wirkt „*electromotorisch*“. Die hervorgerufene Vertheilung wirkt der äusseren electromotorischen Kraft entgegen und der Gleichgewichtszustand tritt daher ein, wenn die electromotorische Kraft, welche einerseits von der von aussen wirkenden vertheilenden Kraft, andererseits von den im Körper selbst geschiedenen und daher „freien“ Electricitäten herrührt, im Inneren des Leiters überall Null ist. Auch in den schlechten

Leitern, wie z. B. in der Luft, muss unter diesen Umständen eine electromotorische Kraft auftreten, deren Wirkungen wir zunächst nicht berücksichtigen wollen.

§ 54. Das electrische Potential.

Im Inneren des Körpers L (Fig. 52) sei Electricität von der Dichte ϱ enthalten, auf seiner Oberfläche befinde sich ferner Electricität von der Dichte σ. Ein Raumelement τ enthält dann die Electricitätsmenge $\varrho . d\tau$ und ein Oberflächenelement dS enthält die Menge $\sigma . dS$. Im Punkte P, dessen Coordinaten x, y, z sind, sei eine Einheit der Electricitätsmenge enthalten, auf welche die innerhalb und auf L vorhandenen Electricitätsmengen wirken. Ein beliebiger Punkt des Körpers L habe die Coordinaten ξ, η, ζ. X, Y, Z seien die Componenten der Kraft, welche im Punkte P wirkt. Wir haben dann nach dem Coulomb'schen Gesetze (vergl. § 12)

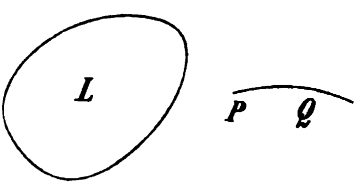


Fig. 52.

$$
\text{(a)} \quad \begin{cases} X = \int (x-\xi)/r^3 . \varrho \, d\tau + \int (x-\xi)/r^3 . \sigma \, dS, \\ Y = \int (y-\eta)/r^3 . \varrho \, d\tau + \int (y-\eta)/r^3 . \sigma \, dS, \\ Z = \int (z-\zeta)/r^3 . \varrho \, d\tau + \int (z-\zeta)/r^3 . \sigma \, dS, \end{cases}
$$

wo $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$ ist.

Wird

$$
\text{(b)} \qquad \Psi = \int \varrho . d\tau / r + \int \sigma . dS / r
$$

gesetzt, so folgt

$$
\text{(c)} \quad X = -\partial \Psi / \partial x, \quad Y = -\partial \Psi / \partial y, \quad Z = -\partial \Psi / \partial z.
$$

Ψ ist das *electrische Potential.* Bewegt sich der betrachtete Punkt P von seiner Stelle nach Q und ist r' der Abstand des Punktes Q von dem Punkte (ξ, η, ζ) des Körpers L, so haben wir

$$
\Psi' = \int \varrho . d\tau / r' + \int \sigma . dS / r'.
$$

Die bei der Bewegung von den electrischen Kräften ausgeführte Arbeit ist, wenn der Weg PQ klein ist,

$$
(X dx + Y dy + Z dz) = \Psi - \Psi'.
$$

Liegt der Punkt Q vom Körper L so weit entfernt, dass $\Psi' = 0$ ist, so wird die geleistete Arbeit gleich Ψ. Daher kann man sagen: *das electrische Potential in einem Punkte ist gleich der Arbeit, welche die electrischen Kräfte ausführen, wenn eine Einheit der Electricität sich von dem betrachteten Punkte bis zu einem Punkte bewegt, der vom geladenen Körper unendlich weit entfernt ist.*

Befindet sich der Punkt P innerhalb des Körpers L, so beschreiben wir eine sehr kleine Kugel K mit dem Radius R um den Punkt P als Mittelpunkt.

Wir betrachten die Dichte ϱ in der Kugel als constant. Die von der Ladung in K herrührende Kraft ist dann Null (vergl. § 13); das Potential der ganzen in L vorhandenen Electricitätsmenge kann deshalb nicht unendlich werden.

Das Potential hat denselben Werth zu beiden Seiten einer mit Electricität geladenen Fläche. Die Flächendichte der Electricität sei σ, so ist das Potential Ψ, welches von der Flächenbelegung herrührt, $\Psi = \int \sigma . dS / r$. Wir betrachten jetzt die Werthe Ψ_1 und Ψ_2 des Potentials in zwei Punkten P_1 und P_2 (Fig. 53), welche zu beiden Seiten der Fläche AB liegen und einen unendlich kleinen Abstand haben. Die Linie $P_1 P_2$ sei eine Normale der Fläche. Wir denken uns aus der Fläche durch einen Kreiscylinder, dessen Axe die Linie $P_1 P_2$ ist und dessen Radius R sei, ein unendlich kleines Stück ausgeschnitten. Das Potential Ψ_1 zerfällt in zwei Theile, von denen der eine Ψ_1' von dem herausgeschnittenen Theile der Fläche herrührt, der andere $\Psi_1 - \Psi_1'$ von dem übrigen endlichen Theile der Fläche. Der letztere wird nicht unstetig oder unendlich beim Uebergange von P_1 nach P_2. Ebenso zerfällt Ψ_2 in zwei Theile. Der aus der Fläche ausgeschnittene unendlich kleine Kreis hat den Radius R, und P_1 habe von der Fläche den Abstand n, so ist

Fig. 53.

$$\Psi_1' = 2\pi\sigma . \int_0^R \frac{R . dR}{\sqrt{R^2 + n^2}},$$

oder

$$\Psi_1{}' = 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2+n^2} - n\right).$$

Daraus ergiebt sich, dass $\Psi_1{}'$ verschwindet, wenn R und n unendlich klein werden.

Im § 14 wurde gezeigt, dass

$$\partial^2(1/r)/\partial x^2 + \partial^2(1/r)/\partial y^2 + \partial^2(1/r)/\partial z^2 = 0.$$

Nach (b) ist also für einen Punkt ausserhalb L

(d) $$\partial^2\Psi/\partial x^2 + \partial^2\Psi/\partial y^2 + \partial^2\Psi/\partial z^2 = \nabla^2\Psi = 0.$$

Liegt dagegen P im Inneren des Körpers, so haben wir nach § 14 (h)

(e) $$\nabla^2\Psi + 4\pi\varrho = 0.$$

Bezeichnen ν_i und ν_a die nach innen und nach aussen von einem Punkte der Oberfläche gezogenen Normalen, so haben wir zur Bestimmung der Oberflächendichte σ nach § 14 (l)

(f) $$\overline{\partial\Psi_i/\partial\nu_i} + \overline{\partial\Psi_a/\partial\nu_a} + 4\pi\sigma = 0.$$

Die horizontalen Striche über den Quotienten sollen andeuten, dass ihre Werthe an der Oberfläche zu nehmen sind. *Ist demnach σ die Dichte des electrischen Fluidums auf der Oberfläche, so ist die Summe der nach beiden Seiten in der Richtung der Normalen wirkenden Kräfte gleich $4\pi\sigma$.*

Diese Eigenschaften des Potentials gelten für jedes System von Körpern, die in irgend einer Weise mit Electricität geladen sind. Ist die Vertheilung gegeben, so kann das Potential entweder aus (b) oder aus (e) und (f) bestimmt werden. Ist dagegen das Potential gegeben, so bestimmen sich die Dichten ϱ und σ aus (e) und (f), während die Componenten der electrischen Kraft aus (c) sich ergeben. Die in einer willkürlichen Richtung ds wirkende Kraft F ist

$$F = -\partial\Psi/\partial s.$$

§ 55. Die Vertheilung der Electricität auf einem guten Leiter.

Wird einem guten Leiter eine Ladung e mitgetheilt, so vertheilt sich dieselbe auf dem Leiter. Wir wollen die Raumdichte ϱ und die Oberflächendichte σ bestimmen. Ist Ψ_i das

Potential innerhalb, Ψ_a das Potential ausserhalb des Leiters, so haben wir nach § 54 (d) und (e)

(a) $$\nabla^2 \Psi_i + 4\pi\varrho = 0 \quad \text{und} \quad \nabla^2 \Psi_a = 0.$$

Nach Eintritt des Gleichgewichtes kann keine Scheidung der Electricitäten im Inneren des Leiters mehr stattfinden, d. h. es ist

(b) $$\partial \Psi_i / \partial x = 0, \quad \partial \Psi_i / \partial y = 0, \quad \partial \Psi_i / \partial z = 0$$

für alle Punkte im Inneren des Leiters. Demnach wird

(c) $$\nabla^2 \Psi_i = 0$$

und also nach (a) $\varrho = 0$. *Die Electricität befindet sich also nur an der Oberfläche des Leiters.*

Nach (b) ist Ψ_i im Inneren des Leiters oder Conductors constant und etwa gleich $\overline{\Psi}$, wo $\overline{\Psi}$ der Werth des Potentials an der Oberfläche ist. Ψ_a bestimmt sich aus den Gleichungen $\nabla^2 \Psi_a = 0$ und $\Psi_a = \overline{\Psi}$ für alle Punkte der Oberfläche. Für die Oberflächendichte haben wir

$$\partial \overline{\Psi_i} / \partial \nu_i + \partial \overline{\Psi_a} / \partial \nu_a + 4\pi\sigma = 0.$$

Da Ψ_i constant ist, so wird

(d) $$4\pi\sigma = -\partial \overline{\Psi_a} / \partial \nu_a.$$

Bezeichnen wir die an der Oberfläche des Conductors nach aussen wirkende Kraft mit F, so ist

(e) $$F = -\partial \overline{\Psi_a} / \partial \nu_a = 4\pi\sigma,$$

d. h. *die in einem Punkte an der Oberfläche des Conductors in der Richtung der Normalen wirkende Kraft ist gleich der Flächendichte σ an der betrachteten Stelle multiplicirt mit 4π.*

Ist ds ein Element einer auf dem Conductor verlaufenden Curve, so haben wir

$$\partial \Psi_a / \partial s = 0,$$

da Ψ_a überall an der Oberfläche gleich $\overline{\Psi}$ ist, wie eben gezeigt wurde. F hat demnach keine in die Oberfläche selbst fallende Componente. Die Oberfläche des Conductors ist eine *Fläche constanten Potentials* und die Richtung der Kraft F ist überall senkrecht zur Oberfläche des Conductors.

Um das Potential des Conductors zu bestimmen, wird die ganze Ladung e desselben berechnet; es ist

$$e = \int\int \sigma . dS.$$

Also haben wir

(f) $$e = 1/4\pi . \int\int F . dS = -1/4\pi . \int\int \partial \Psi_a / \partial \nu_a . dS.$$

Da im Inneren des Conductors keine Ladung vorhanden ist, so wird

$$\Psi_a = \int\int \sigma . dS / r.$$

Befindet sich die Electricität von der Dichte σ auf dem Conductor im Gleichgewicht, so bleibt dieses bestehen, wenn die Dichte $n\sigma$ wird, wo n eine Zahl bedeutet. Wird nämlich ein Gleichgewichtszustand über einem anderen gelagert, so ergiebt sich wiederum ein Gleichgewichtszustand. Wird die Dichte überall $n\sigma$, so nimmt das Potential Ψ_a den Werth $n\Psi_a$ an. *Das Potential ist also der Ladung proportional.* Wenn die Ladung C nöthig ist, um dem Conductor das Potential 1 zu geben, so muss dem Conductor die Ladung

(g) $$Q = C\Psi$$

mitgetheilt werden, um das Potential von 0 auf Ψ zu bringen. Man nennt C die *Capacität* des Conductors. Die Capacität C ist das Verhältniss der Ladung Q eines Conductors zu dem Potential Ψ desselben.

Um die Grösse und Richtung der electrischen Kraft in der Umgebung eines Conductors anschaulich zu machen, bestimmt man die Lage der den Conductor umhüllenden Flächen constanten Potentials. Die Gleichung derselben ist

$$\Psi = c,$$

wo c eine Constante ist. Die erste Niveaufläche ist die Oberfläche des Conductors, für welche

$$\Psi = \overline{\Psi}.$$

In einer Entfernung, welche sehr gross gegen die Dimensionen des Conductors ist, werden die Niveauflächen Kugelflächen, da wir haben

$$\Psi = e / r.$$

Nach § 7 sind die *Flächen constanten Potentials* oder die *Niveauflächen* senkrecht zur Richtung der Kraft. Haben wir zwei Flächen, die unendlich benachbart sind, so ist nach

§ 7 in jedem Punkte der einen die Kraft umgekehrt proportional dem Abstand der Flächen. Wird von einem Punkte an der Oberfläche eine Kraftlinie $P P_1 P_2 P_3$ (Fig. 54) gezogen und werden die Punkte P_1, P_2, P_3 u. s. w. so gewählt, dass $F.PP_1 = F_1.P_1P_2 = F_2.P_2P_3$ u. s. w., wo F_1, F_2 die electrischen Kräfte in den Punkten P_1, P_2 angeben, so kann diese Gleichung beliebig weit fortgesetzt werden. Zeichnen wir die Niveauflächen in solcher Weise, dass beim Uebergange von der einen Niveaufläche bis zur nächsten das Potential stets um denselben Betrag zu- oder abnimmt, so ist an jeder Stelle des Raumes $F_n.(\overline{P_n P_{n+1}}) = \text{constant}$. Je weiter wir uns von den wirksamen Massen entfernen, desto grösser wird der Abstand der auf einander folgenden Niveauflächen. Ist die Grösse der Kraft F an einer der Niveauflächen gegeben, so ergiebt sich ihre Grösse an einem anderen Punkte der Figur durch den Abstand der auf einander folgenden Niveauflächen, und ist die Grösse der electrischen Kraft F an der Oberfläche des Körpers gegeben, so kann aus der Figur ihre Grösse in jedem anderen Punkte bestimmt werden.

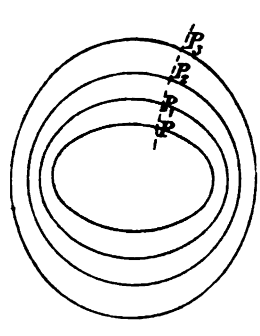


Fig. 54.

§ 56. Die Vertheilung der Electricität auf der Oberfläche einer Kugel und eines Ellipsoids.

1. *Die Kugel.* Der isolirten Kugel vom Radius R sei die Ladung Q mitgetheilt. Das Potential Ψ_a ausserhalb der Kugel soll bestimmt werden. Der Coordinatenanfangspunkt sei in den Mittelpunkt O der Kugel gelegt. Wir haben

$$\nabla^2 \Psi_a = 0.$$

Da Ψ_a eine Function des Abstandes vom Mittelpunkte O ist, so haben wir nach § 15 (l)

$$1/r \,.\, d^2(r\,\Psi_a)\,/\,d\,r^2 = 0$$

und demnach

$$\Psi_a = c_1 + c_2\,/\,r,$$

wo c_1 und c_2 zwei Constante sind.

Da ausser der Kugel keine geladenen Körper vorhanden sind, so ist $\Psi_a = 0$ für $r = \infty$, und also ist $c_1 = 0$. Die electrische Kraft im Abstande r vom Mittelpunkte ist

$$F = -d\Psi_a / dr = c_2 / r^2.$$

Nach § 55 (e) haben wir ferner

$$\sigma = 1/4\pi . F = 1/4\pi . c_2 / R^2; \quad 4\pi R^2 \sigma = Q = c_2.$$

Das Potential Ψ_a und die Capacität C sind also

$$\Psi_a = Q/r, \quad C = Q/\overline{\Psi} = R.$$

Die Dimension der Capacität ist also eine Länge.

2. *Das Ellipsoid.* Das Ellipsoid habe die Halbaxen a, b und c und dasselbe habe die Ladung Q. Es liegt nahe anzunehmen, dass die Flächen constanten Potentials confocale Ellipsoide sind. Die Gleichung eines Systems solcher Flächen ist

$$E = x^2/(a^2+\lambda) + y^2/(b^2+\lambda) + z^2/(c^2+\lambda) = 1. \tag{a}$$

Nach unserer Annahme muss das Potential eine Function von λ sein, also

$$\Psi = f(\lambda).$$

Um diese Function f zu finden, berechnen wir zunächst

$$\partial\Psi/\partial x = d\Psi/d\lambda . \partial\lambda/\partial x;$$

$$\partial^2\Psi/\partial x^2 = d^2\Psi/d\lambda^2 . (\partial\lambda/\partial x)^2 + d\Psi/d\lambda . \partial^2\lambda/\partial x^2$$

und die analogen Ausdrücke für y und z. Wir haben dann

$$\text{(b)} \left\{ \begin{aligned} \nabla^2\Psi = d^2\Psi/d\lambda^2 . ((\partial\lambda/\partial x)^2 + (\partial\lambda/\partial y)^2 + (\partial\lambda/\partial z)^2) \\ + d\Psi/d\lambda . \nabla^2\lambda. \end{aligned} \right.$$

Zur Abkürzung wird

$$A = x^2/(a^2+\lambda)^2 + y^2/(b^2+\lambda)^2 + z^2/(c^2+\lambda)^2,$$

$$B = x^2/(a^2+\lambda)^3 + y^2/(b^2+\lambda)^3 + z^2/(c^2+\lambda)^3$$

gesetzt. Wir haben dann

$$\partial E/\partial x = 2x/(a^2+\lambda) - A . \partial\lambda/\partial x; \tag{c}$$

$$\partial A/\partial x = 2x/(a^2+\lambda)^2 - 2B . \partial\lambda/\partial x. \tag{d}$$

Analoge Ausdrücke gelten für die Differentialquotienten in Bezug auf y und z. Demnach wird

$$\partial^2 E/\partial x^2 = 2/(a^2+\lambda) - A.\partial^2\lambda/\partial x^2 - 2x/(a^2+\lambda)^2.\partial\lambda/\partial x$$
$$- \partial A/\partial x.\partial\lambda/\partial x = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (c)

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} \partial^2 E/\partial x^2 = 2/(a^2+\lambda) - A.\partial^2\lambda/\partial x^2 + 2B.(\partial\lambda/\partial x)^2 \\ \qquad - 8/A.x^2/(a^2+\lambda)^3 = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (c) und (a) folgt, dass

$$\text{(f)} \quad A^2((\partial\lambda/\partial x)^2 + (\partial\lambda/\partial y)^2 + (\partial\lambda/\partial z)^2) = 4A,$$

und aus (e) und (f), dass

$$\text{(g)} \quad A.\nabla^2\lambda = 2/(a^2+\lambda) + 2/(b^2+\lambda) + 2/(c^2+\lambda)$$

ist. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (f) und (g) ergiebt sich aus (b)

$$\text{(h)} \quad \begin{cases} A.\nabla^2\Psi = \\ 4d^2\Psi/d\lambda^2 + 2d\Psi/d\lambda.(1/(a^2+\lambda) + 1/(b^2+\lambda) + 1/(c^2+\lambda)). \end{cases}$$

Ausserhalb des Ellipsoids soll $\nabla^2\Psi = 0$ sein. Ist C eine Constante, so haben wir nach (h)

$$\text{(i)} \quad d\Psi/d\lambda = -C_1/\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$$

und

$$\Psi = -C_1\int d\lambda/\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} + C_2.$$

Im unendlich fernen Punkte, für welchen $x = y = z = \infty$ ist, soll Ψ verschwinden; für den unendlich. fernen Punkt haben wir nach (a) $\lambda = \infty$. Das Potential Ψ in einem beliebigen Punkte (x, y, z) ist

$$\text{(k)} \quad \begin{cases} \Psi = C_1\int_\lambda^\infty d\lambda/\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}, \\ \text{nachdem die Gleichung} \\ x^2/(a^2+\lambda) + y^2/(b^2+\lambda) + z^2/(c^2+\lambda) = 1 \end{cases}$$

nach λ aufgelöst ist.

Hat das Ellipsoid die Ladung Q, so ist das Potential in einem sehr weit vom Ellipsoid entfernten Punkte gleich $Q/\sqrt{\lambda}$; durch Vergleichung mit (k) erhalten wir dann

$$\text{(l)} \quad \Psi = Q/2.\int_\lambda^\infty d\lambda/\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

Zur Bestimmung der electrischen Kraft F und deren Componenten X, Y, Z dienen folgende Gleichungen

$$X = -d\Psi / d\lambda . \partial\lambda / \partial x, \quad Y = -d\Psi / d\lambda . \partial\lambda / \partial y,$$
$$Z = -d\Psi / dz . \partial\lambda / \partial z.$$

$$F = -d\Psi / d\lambda . \sqrt{(\partial\lambda/\partial x)^2 + (\partial\lambda/\partial y)^2 + (\partial\lambda/\partial z)^2}.$$

In Rücksicht auf (f) und (l) ist

$$F = -2 / \sqrt{A} . d\Psi / d\lambda = Q / \sqrt{A} . 1 / \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

Bezeichnen wir mit N das vom Anfangspunkte auf die im Punkte x, y, z an das Ellipsoid gelegte Tangentialebene gefällte Loth, so ist

$$\sqrt{A} = 1 / N$$

und wir haben demnach

$$F = Q . N / \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

Die Oberflächendichte σ auf dem Ellipsoid selbst wird durch die Gleichung $4\pi\sigma = F$ bestimmt, sodass

(m) $$\sigma = N . Q / 4\pi a b c$$

ist, da $\lambda = 0$ für das Ellipsoid ist. *Die Dichte in einem Punkte des Ellipsoids ist demnach dem Lothe proportional, das vom Mittelpunkte auf die in dem betrachteten Punkte an das Ellipsoid gelegte Ebene gefällt wird.*

Wir betrachten jetzt einige specielle Fälle. Bei einem *Rotationsellipsoid* ist $a = b$ und also nach (l), wenn Ψ_0 das Potential des betrachteten Ellipsoids ist,

$$\Psi_0 = Q/2 . \int_0^\infty d\lambda / (a^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}.$$

Demnach ist für $a > c$:

(n) $$\Psi_0 = Q / \sqrt{a^2 - c^2} . (\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} c / \sqrt{a^2 - c^2}),$$

für $a = c$:

(o) $$\Psi_0 = Q / a,$$

für $a < c$:

(p) $$\Psi_0 = Q / 2\sqrt{c^2 - a^2} . \log\left[(c + \sqrt{c^2 - a^2}) / (c - \sqrt{c^2 - a^2})\right].$$

Setzen wir in (n) $c = 0$, so ist die Capacität einer *runden Scheibe*

$$C = Q / \Psi_0 = a / (\tfrac{1}{2}\pi).$$

Für ein *Rotationsellipsoid*, dessen Länge gross ist im Vergleich zum Durchmesser des Aequator, haben wir nach (p)

$$\Psi_0 = Q / c \, . \log (2\,c / a)$$

und

$$C = c / \log (2\,c / a).$$

Die Oberflächendichte σ ist nach der Gleichung (m)

$$\sigma = Q / 4\pi\, a\, b\, c \, . \, 1 / \sqrt{x^2 / a^4 + y^2 / b^4 + z^2 / c^4}.$$

Wird z mit Hülfe der Gleichung des Ellipsoids eliminirt und ist c unendlich klein, so haben wir für die Dichte auf einer elliptischen Scheibe mit den Halbaxen a und b

$$\sigma = Q / 4\pi\, a\, b \, . \, 1 / \sqrt{1 - x^2 / a^2 - y^2 / b^2}.$$

Ist *die Scheibe kreisrund*, also $a = b$, und wird $x^2 + y^2 = r^2$ gesetzt, so ist

$$\sigma = Q / 4\pi\, a \, . \, 1 / \sqrt{a^2 - r^2}.$$

In einem Punkte, dessen Abstand u vom Rande sehr klein ist, wird

$$\sigma = Q / 4\pi\, a \, . \, 1 / \sqrt{2\,a\,u}.$$

In diesem Falle ist also die Dichte umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Abstande des betrachteten Punktes vom Rande.

§ 57. Die electrische Vertheilung.

Befinden sich mehrere geladene Conductoren im Raume, so ist nicht durch die Gestalt und Grösse allein die Vertheilung der Electricität auf den Conductoren bestimmt, sondern auch durch die Wechselwirkung derselben unter einander. Die Bestimmung des electrischen Gleichgewichtszustandes ist in der Regel sehr schwierig. Die wichtigsten Arbeiten über diesen Gegenstand verdanken wir Poisson und William Thomson. Wir wollen die von dem letzteren gegebene Methode der *electrischen Bilder* anwenden.

a) *Die Vertheilung in einer ebenen Fläche.* Im Punkte O (Fig. 55) sei die Electricitätsmenge e vorhanden, AB sei die

ebene Grenzfläche eines sehr grossen Conductors L, welcher in leitender Verbindung mit der Erde stehen möge. Das Potential Ψ_1 auf L ist also Null, indem wir festsetzen, dass das Potential der Erde gleich Null ist (vergl. § 7). Die Oberflächendichte σ der electrischen Vertheilung auf der Fläche soll bestimmt werden. Das vom Conductor L herrührende Potential in einem beliebigen Raumpunkte P sei Ψ_c, d. h. Ψ_c ist die Arbeit, welche von den electrischen Kräften des Conductors geleistet wird, wenn die Electricitätsmenge 1, welche dem Punkte P ohne Störung der electrischen Vertheilung auf L mitgetheilt ist, von P aus ins Unendliche übergeführt wird. Ist $OP = r$, so ist das Potential Ψ in P

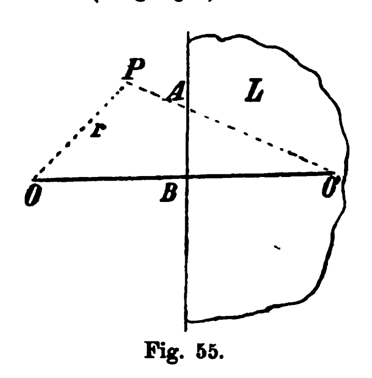


Fig. 55.

$$\Psi = e/r + \Psi_c.$$

Im Punkte O' (Fig. 55), welcher in Bezug auf die Ebene AB das Spiegelbild des Punktes O ist, denken wir uns die electrische Masse $-e$. Die in O' enthaltene Masse wirkt auf alle Punkte, die mit O auf derselben Seite der Ebene AB liegen, ebenso wie die auf AB vertheilte electrische Masse. Das gesammte Potential, welches von den Massen in O und O' herrührt, genügt nämlich in allen Punkten, die mit O auf derselben Seite der Ebene AB liegen der Laplace'schen Gleichung, ausgenommen im Punkte O selbst. Ferner verschwindet das gesammte Potential in allen Punkten der Ebene AB, da alle Punkte der Ebene AB, welche in der Mitte der Strecke OO' auf derselben senkrecht steht, von O und O' gleichen Abstand haben. Demnach ist für alle Punkte der Ebene AB

$$e/r - e/r' = 0,$$

wenn mit r und r' die Abstände eines Punktes der Ebene von O und O' bezeichnet werden. *Wenn aber eine Function der Laplace'schen Gleichung genügt und längs einer bestimmten Fläche vorgeschriebene Werthe annimmt und wenn die Function*

selbst und ihre ersten Differentialquotienten stetig sind, so ist dieselbe eindeutig bestimmt.[1])

Wir heben noch hervor, dass $\Psi_c = e/r'$ ist, und dass im Punkte P das Potential Ψ

$$\Psi = e/r - e/r' \text{ ist.}$$

Die in einem beliebigen Punkte P (Fig. 56) der Ebene AB liegende positive electrische Masseneinheit wird von zwei

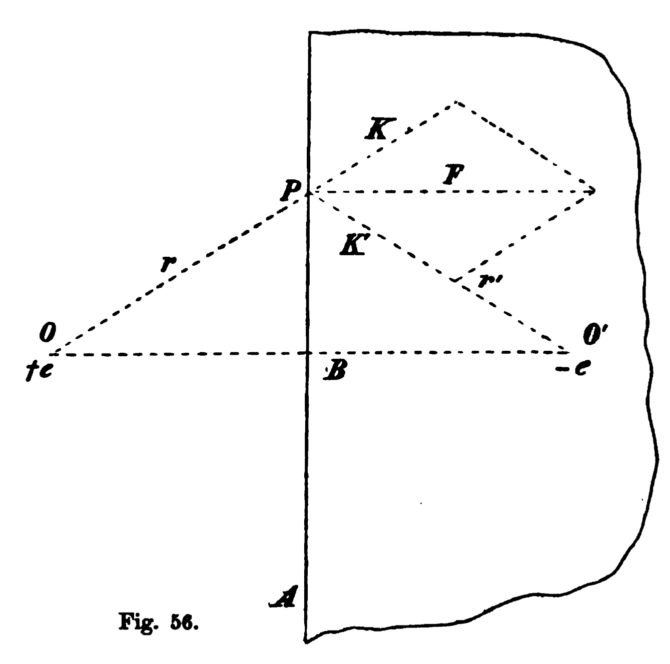


Fig. 56.

Kräften $K = e/r^2$ und $K' = e/r'^2$ angegriffen, deren Richtungen bezw. mit OP und PO' zusammenfallen. Die Richtung der resultirenden Kraft F ist demnach OO' parallel und gleich

$$F = -2\,e\,OB\,/\,OP^3,$$

wenn wir eine Kraft positiv rechnen, die nach dem Raume gerichtet ist, in welchem O liegt. Da nun

$$4\,\pi\,\sigma = F$$

---

[1]) Dieser Satz ist unter dem Namen des Dirichlet'schen Princips bekannt.

ist, so erhalten wir

$$\sigma = - e / 2\pi . OB / OP^3.$$

Die Flächendichte im Punkte P (Fig. 56) *ist also umgekehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes des Punktes P vom Punkte O, in welchem sich die electrische Masse + e befindet.* In derselben Weise werden das Potential und die Oberflächendichte berechnet, wenn mehrere mit Ladungen versehene Punkte im Raume vorhanden sind.

b) *Die Kugel.* In den Punkten O und O' (Fig. 57) seien die electrischen Massen e und e' concentrirt. Die äquipotentielle

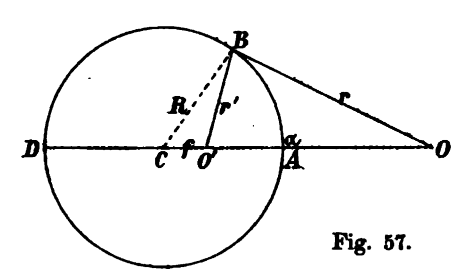


Fig. 57.

Fläche, für welche das Potential verschwindet, ist durch die Gleichung

$$e / r + e' / r' = 0$$

gegeben, wenn mit r und r' die Abstände eines Punktes der Niveaufläche bezw. von O und O' bezeichnet werden. Haben e und e' dasselbe Vorzeichen, so stellt die letzte Gleichung eine in der Unendlichkeit liegende Fläche dar; haben e und e' entgegengesetzte Zeichen, so erhalten wir eine Kugelfläche und im Grenzfall eine Ebene.

Der Mittelpunkt C der Kugel liegt auf der Linie OO', und zwar haben wir

$$OC : O'C = e^2 : e'^2 \text{ und } CO' / CB = CB / CO = e' / e.$$

Die Dreiecke $CO'B$ und CBO sind ähnlich und der Radius CB der Kugel ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen der Punkte O und O' vom Kugelmittelpunkte.

Die Kugel ABD, welche das Potential Null hat, können wir aus einem sehr dünnen Metallblech hergestellt denken, welches mit der Erde in leitender Verbindung steht. Durch die Einführung dieser Metallkugelfläche wird das Potential

weder im äusseren noch im inneren Raume der Kugel geändert; es ist die electrische Wirkung allein von den electrischen Massen e und e' abhängig.

Bleibt die Kugelfläche mit der Erde in leitender Verbindung und entfernen wir aus dem Inneren der Kugelfläche die electrische Masse e', so wird im Inneren der Kugel das Potential Null, während dasselbe ausserhalb der Kugel seinen Werth behält, da die electrische Masse e ihre Lage nicht geändert und die Kugelfläche das Potential Null behalten hat. Demnach übt die ausserhalb der auf dem Potential Null erhaltenen Kugel liegende Masse e zusammen mit der auf der Kugel inducirten Electricität auf die Punkte ausserhalb der Kugel dieselbe Wirkung aus, wie zusammen mit der innerhalb der Kugel liegenden Masse e'. Wir nennen den Punkt O', wo sich die Masse e' befindet, das *electrische Bild* des Punktes O. Die electrische Masse e' übt also ganz dieselbe Wirkung aus, wie die auf der Kugelfläche wirklich vorhandene electrische Masse. In der Optik bezeichnen wir den leuchtenden Punkt hinter der spiegelnden Fläche oder Linse, welcher, wenn er vorhanden wäre, dieselben Strahlen vor der spiegelnden Fläche oder Linse hervorbringen würde, als virtuelles Bild. Demnach können wir O' als *electrisches Bild* auffassen.

Setzen wir $CO' = f$, $CO = a$ und $CB = R$, so ergiebt sich, dass

$$e'/e = O'B/OB = f/R = R/a$$

ist. Somit wird

$$e' = Re/a.$$

Wir setzen $OB = r$ und $O'B = r'$. In B wirkt die Kraft e/r^2 in der Richtung OB, und die Kraft e'/r'^2 in der Richtung BO', von denen die erstere in die Componenten

$$e/r^2 . a/r \text{ längs } OC \text{ und } e/r^2 . R/r \text{ längs } CB,$$

die letztere in

$$-e'/r'^2 . f/r' \text{ längs } OC \text{ und } -e'/r'^2 . R/r' \text{ längs } CB$$

zerlegt wird.

Die beiden Componenten in der Richtung OC sind gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, sie heben sich also auf. In der Richtung CB dagegen wirkt die Kraft

$$e R / r^3 - e' R / r'^3 = -(a^2 - R^2) / R . e / r^3.$$

Die Kugel ist also eine Niveaufläche, da an derselben die Kraftrichtung mit der Richtung der Normalen zusammenfällt.

Die Dichte σ ist also

$$\sigma = -(a^2 - R^2) / 4 \pi R . e / r^3$$

und demnach umgekehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes vom geladenen Punkte O. Die Electricitätsmenge, welche sich auf der Kugel befindet, ist

$$-e' = -R e / a,$$

da diese Ladung dasselbe Potential hervorbringt im Raume, wie die wirkliche Ladung auf der Kugelfläche; sie müssen also nach § 55 (f) gleich gross sein.

Die Kugel wird vom Punkte O mit der Kraft

$$e e' / (a - f)^2 = R e^2 / a (a - f)^2$$

angezogen.

Wird der Abstand $C O = a$ sehr gross, so ist die Kraft gleich $R e^2 / a^3$.

c) Ist die Kugel ursprünglich isolirt und ohne Ladung, so kann man die Vertheilung durch die Annahme finden, dass ausser der erwähnten Vertheilung mit der Dichte σ noch eine gleichmässige Vertheilung der Electricität auf der Kugelfläche von der Dichte

$$e' / 4 \pi R^2 = e / 4 \pi R a$$

vorhanden ist, wodurch die gesammte Ladung der Kugel gleich Null wird. Die wirkliche Oberflächendichte ist dann

$$\sigma = e / 4 \pi R . \left(1 / a - (a^2 - R^2) / r^3\right).$$

Die Oberflächendichte σ ist Null auf einem Kreise, dessen Peripherie von O den Abstand

$$r = a \sqrt[3]{1 - R^2 / a^2}$$

hat. Die Ebene dieses Kreises liegt näher bei O als das Centrum der Kugel. Um das Potential Ψ der Kugel zu finden, bestimmen wir dasselbe für den Mittelpunkt. Da die Ladung der Kugel Null ist, wird das von der Ladung herrührende Potential auch Null; das ganze Potential ist also

$$\Psi = e / a.$$

Dasselbe geht aus der Bemerkung hervor, dass die vertheilte Ladung $-e'$ in Verbindung mit der Ladung e in O der Kugel das Potential Null ertheilt; das Potential rührt von der zugeführten Ladung $+e'$ her, die das Potential $e'/R = e/a$ hervorbringt.

Die Kraft, mit welcher die Kugel von O angezogen wird, ist in diesem Falle sehr viel kleiner, als wenn die Kugel mit der Erde in leitender Verbindung steht. Jene Kraft ist

$$e\,e'/(a-f)^2 - e\,e'/a^2 = R e^2/a^3 \,.\, R^2(2a^2 - R^2)/(a^2 - R^2)^2.$$

Nun ist R sehr klein im Vergleich zu a, und es ist also die Kraft näherungsweise

$$R e^2/a^3 \,.\, 2R^2/a^2.$$

In diesem Falle ergiebt sich auch ein einfacher Ausdruck für die Oberflächendichte σ. Bezeichnen wir den Winkel BCO mit Θ, so ist

$$r^2 = a^2 - 2\,a\,R\cos\Theta + R^2.$$

Ist a so gross, dass die höheren Potenzen von R/a vernachlässigt werden können, so ist

$$r^{-3} = a^{-3}(1 + 3\,R/a\,.\cos\Theta).$$

Bezeichnen wir die vertheilende Kraft e/a^2, welche von O ausgeht, mit X, so ist

$$\sigma = -3\cos\Theta/4\pi\,.\,X,$$

wenn wir in der Formel für σ den Radius R als unendlich klein gegen a betrachten und für r^{-3} den angegebenen Werth einführen.

§ 58. Vollständige Vertheilung.

Befindet sich ein geladener Körper A (Fig. 58) im Inneren einer metallischen Schale BC, so wird die Electricität in der letzteren vertheilt. Ist A positiv geladen, so wird die innere Fläche B negativ, die äussere C positiv electrisch. A habe die Ladung e, B die Ladung $-e'$ und C die Ladung $+e'$. Wir zeigen, dass die vertheilte Electricitätsmenge e' gleich der vertheilenden e ist. Im Inneren von BC sei eine geschlossene Fläche D construirt. Ist Ψ das Potential in der Schale BC

und ν die Normale des Elementes dS der Fläche D, so ist nach § 14 (c)

$$4\pi(e - e') = -\int (\partial \Psi / \partial \nu) dS.$$

Da das Potential Ψ in der Schale constant ist, so verschwindet das Integral und es ist demnach $e = e'$. Die Ladung e auf C kann abgeleitet werden oder zu derselben kann eine neue Ladung hinzugefügt werden, ohne dass eine Aenderung in den Ladungen A und B hervorgerufen wird. Wenn der vertheilende Körper ganz von dem Körper umgeben ist, in welchem die Vertheilung stattfinden soll, so sagt man, dass die *Vertheilung vollständig ist; die vertheilende und die vertheilte Electricitätsmenge sind gleich gross*, wie wir gesehen haben.

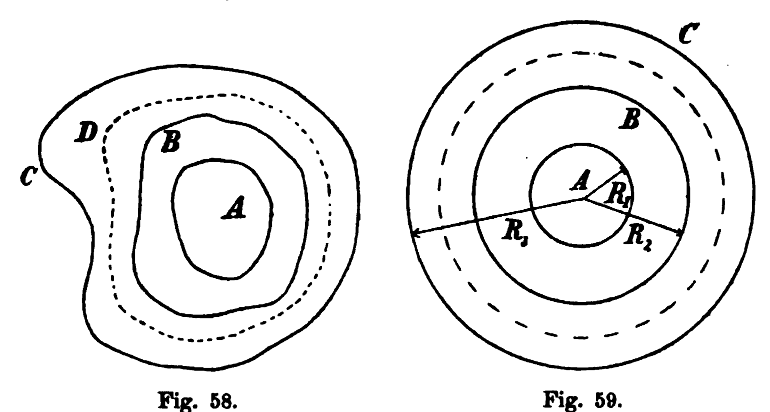


Fig. 58. Fig. 59.

Der gefundene Satz kann bei Vergleichung der Ladungen verschiedener Conductoren gebraucht werden. Wird die äussere Fläche von BC in Verbindung mit einem Messinstrumente gebracht, dessen Angaben dem Potential proportional sind und werden nach einander verschiedene geladene Körper in den Hohlraum von BC gebracht, so verhalten sich die Angaben des Apparates wie die Grössen der Ladungen.

Die Kugel A mit dem Radius R_1 habe die Ladung e (Fig. 59). BC sei eine mit A concentrische Kugelschale, deren Radien R_2 und R_3 sind. Auf der inneren Fläche BC ist die Ladung $-e$. Befindet sich keine Electricität auf der äusseren Fläche C, so ist das Potential Ψ in A

$$\Psi = e / R_1 - e / R_2.$$

Das Potential in einem Punkte innerhalb BC oder ausserhalb BC ist Null, da beide Ladungen in Bezug auf einen äusseren Punkt wirken, wie wenn sie im Mittelpunkte concentrirt wären. Nach der Definition der Capacität C haben wir [vergl. § 55 (g)]

(a) $$C = e / \Psi = R_1 R_2 / (R_2 - R_1).$$

Die Vertheilung kann in manchen Fällen fast vollständig sein; ohne dass der eine Conductor vom anderen vollständig umschlossen ist. ABC und DEF (Fig. 60) seien zwei Conductoren, deren Oberflächen BC und DF sehr nahe bei einander liegen. Auf der Fläche BC sei eine geschlossene Curve GH beschrieben, von deren Punkten Kraftlinien gezogen werden, die auf DF eine Curve KJ erzeugen. Durch die beiden Curven GH und JK wird eine geschlossene Fläche $G'GJJ'K'KHH'$ gelegt. Die von den Curven $G'H'$ und $J'K'$ begrenzten Flächen liegen innerhalb der Conductoren und sind bezw. congruent den Flächen GH und JK. dS sei ein Oberflächenelement der geschlossenen Fläche $G'H'J'K'$, e und e' seien die Ladungen der Flächen GH und JK. Ψ bedeute das Potential und ν die Normale. Wir haben dann nach § 55

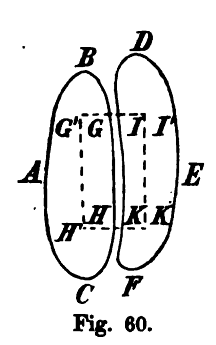


Fig. 60.

(b) $$4\pi(e + e') = -\iint \partial\Psi / \partial\nu \,.\, dS.$$

Das Integral verschwindet, da Ψ innerhalb der Conductoren constant ist und zwischen den Conductoren die Kraft der geschlossenen Oberfläche parallel ist. Wir haben demnach $e = -e'$. Liegen die Flächen BC und DF sehr nahe bei einander, so ist auch $\sigma = -\sigma'$, d. h. die Dichten an den beiden Oberflächen sind gleich gross, aber entgegengesetzt.

Ist a der Abstand der Flächen BC und DF und ist Ψ_1 das Potential auf ABC, ferner Ψ_2 das Potential auf DEF, so wird die electrische Kraft F im Zwischenraume nach § 7 (c)

$$\Psi_1 = \Psi_2 + Fa, \quad F = (\Psi_1 - \Psi_2) / a.$$

Die Oberflächendichte σ wird [vergl. § 55 (e)]

$$\sigma = -\sigma' = (\Psi_1 - \Psi_2) / 4\pi a.$$

Auf der Fläche S ist die Ladung

$$e = (\Psi_1 - \Psi_2) / 4\pi a . S \quad \text{vorhanden.}$$

Ist der Conductor DF mit der Erde verbunden, d. h. ist $\Psi_2 = 0$, so wird die Capacität C

$$C = S / 4\pi a,$$

d. h. *die Capacität ist dem Abstande der Conductoren indirect proportional.*

Diese Formel wird bei Luftcondensatoren gebraucht, wo a sehr klein ist.

§ 59. Die mechanische Kraftwirkung an einer geladenen Fläche.

Enthält ein Raumelement dv die Electricitätsmenge $\varrho\, dv$, so wirkt auf dasselbe eine Kraft, deren Componenten $X\varrho\, dv$, $Y\varrho\, dv$ und $Z\varrho\, dv$ sind. Nach § 55 (a) kann die x-Componente durch

$$1/4\pi . \partial\Psi/\partial x . \nabla^2 \Psi dv = +1/4\pi . X(\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z) dv$$

ausgedrückt werden.

Im Inneren der guten Leiter ist die Kraft und auch die Dichte Null, dagegen wirkt eine Kraft auf das Oberflächenelement dS, dessen Dichte σ ist. Diese Kraft wird in folgender Weise bestimmt. AD (Fig. 61) sei die electrische Oberfläche, $BC = dS$ das betrachtete Flächenelement, welches durch eine um den Punkt P als Mittelpunkt beschriebene unendlich kleine Kugel mit dem Radius $PB = PC$ ausgeschnitten wird. P_2 liege auf der Normalen PP_2 zu BC, und P_2P sei unendlich klein gegen PB. Auf eine Electricitätseinheit im Punkte P_2 wirkt von der Fläche BC her die Kraft $2\pi\sigma$ (vergl. § 13 Nr. 3). Auf den entsprechenden Punkt P_1 auf der entgegengesetzten Seite von BC wirkt die Kraft $-2\pi\sigma$. Sind l, m, n die Cosinus der Winkel, welche P_1P_2 mit den Axen bildet, und X, Y, Z die Kraftcomponenten, welche vom electrischen System mit Ausnahme von BC herrühren, so haben wir

Fig. 61.

$$X_2 = -\partial\Psi_2/\partial x = X + 2\pi\sigma l, \quad X_1 = -\partial\Psi_1/\partial x = X - 2\pi\sigma l,$$

X_2, X_1 und Ψ_2, Ψ_1 sind bezw. die Kraftcomponenten und die Potentiale in den Punkten P_2 und P_1. Wir haben

(c) $$X = \frac{1}{2}(X_2 + X_1).$$

Analoge Ausdrücke gelten für die übrigen Kraftcomponenten. X ist die Kraft, welche auf die Electricitätseinheit von dS in der Richtung der x-Axe wirkt. Das Flächenelement dS wird also in der Richtung der x-Axe durch die Kraft

(d) $$X\sigma\,dS = \frac{1}{2}(X_2 + X_1)\,\sigma\,dS$$

bewegt.

Gehört das Element dS der Oberfläche eines guten Leiters an und liegt P_1 im Inneren desselben, so ist die Kraft in P_1 gleich Null. Wird die in P_2 wirkende Kraft mit F bezeichnet, so ist nach (c) und (d) die Kraft, welche auf dS wirkt,

(e) $$\frac{1}{2}F\sigma\,dS.$$

Da nach § 55 (e) $F = +4\pi\sigma$ ist, so wird die gesuchte Kraft

(f) $$2\pi\sigma^2 dS = 1/8\pi\,.\,F^2.\,dS.$$

Eine interessante Anwendung hiervon hat W. Thomson bei der Construction seines *absoluten Electrometers* gemacht. Dieses besteht aus einer isolirten Metallplatte EF und einer kleineren runden Platte CD, welche mit EF parallel ist. CD bildet einen Theil des Bodens eines niedrigen Metallcylinders AB (Fig. 62). Hat EF das Potential Ψ, haben dagegen CD und AB das Potential Null, so wird CD von EF angezogen mit einer Kraft, welche in folgender Weise bestimmt wird. Da AB und CD sich fast wie ein einziger Körper verhalten, so ist auf der Innenfläche von $ABCD$ keine merkliche Oberflächendichte. Die Dichte auf der äusseren Fläche von CD sei σ, der Abstand zwischen CD und EF sei a und die Fläche $CD = S$. Die Kraft K, welche CD gegen EF zieht, ist nach (e) gleich

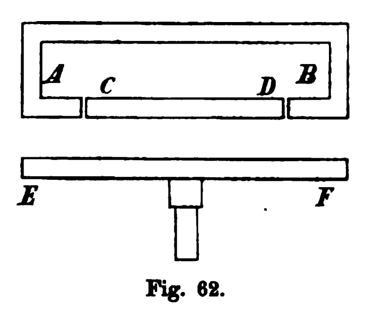


Fig. 62.

$$K = \frac{1}{2}F\sigma S.$$

Wir haben $Fa = \Psi$ (vergl. § 7) und $4\pi\sigma = F$, also ist

$$K = S\,\Psi^2 / 8\pi a^2.$$

Man bestimmt das Gewicht, welches nöthig ist, um die electrische Anziehung aufzuheben. M Gramm seien hierzu erforderlich, so ist

$$\Psi = a\sqrt{8\pi M g / S},$$

wo g die Beschleunigung der Schwerkraft ist.

§ 60. Die electrischen Kraftlinien.

Alle Einwirkungen, durch welche Electricität hervorgebracht wird, wie Reibung, Vertheilung u. s. w., bringen gleich grosse Mengen positiver und negativer Electricität hervor; man ist deshalb zu der Annahme berechtigt, dass in jedem unelectrischen Körper gleich viel positive wie negative Electricität vorhanden ist. A und B (Fig. 63) seien zwei durch Reibung electrisirte Körper, welche allmählich weiter und weiter von einander, wie in Fig. 64, entfernt werden; dabei behalten sie ihre gleich grossen aber entgegengesetzten Ladungen. A und B seien gute aber isolirte Leiter. Vom Umfange eines Oberflächenelementes dS auf A seien die Kraftlinien construirt, welche auf B ein Flächenelement dS' begrenzen. Der von den Kraftlinien und den beiden Elementen dS und dS' begrenzte Raum wird als *Sphondyloid* bezeichnet.

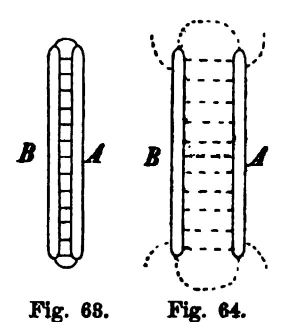


Fig. 63. Fig. 64.

Ist auf dS die Dichte σ, auf dS' die Dichte σ', so kann man durch die an die Formel § 58 (b) geknüpften Betrachtungen nachweisen, dass

$$\sigma\, dS - \sigma'\, dS' = 0.$$

Die Oberflächendichten auf den beiden geladenen Conductoren A und B sind also den Flächen, welche von dem Sphondyloid abgegrenzt werden, verkehrt proportional.

Ist der Conductor A mit der positiven Electricitätsmenge Q geladen und wird die Oberfläche von A in Q Theile zerlegt,

von denen jeder eine Einheit der Electricitätsmenge enthält, so zerlegen die von der Umgrenzung der Q Theile auf A gezogenen Kraftlinien die Fläche B ebenfalls in Q Theile, von denen jeder eine negative Electricitätseinheit besitzt.

Hat ein Conductor $ABCD$ die Ladung e und das Potential Ψ, so sind die äquipotentiellen Flächen Kugeln in einem Abstande, der sehr gross gegen die Dimensionen des Conductors ist. Wird die äquipotentielle Fläche, deren Potential $(\Psi - 1)$ ist, construirt, so ist diese dem Conductor am nächsten an den Punkten A, B und D (Fig. 65). An diesen Punkten ist auch nach § 55 die electrische Kraft und ebenso die Oberflächendichte am grössten. Dort liegen die Kraftlinien am dichtesten bei einander. Hat der Conductor nach aussen hervortretende Kanten oder Spitzen, so wird an diesen die Dichte sehr gross; die letztere wird unendlich gross an einer vollkommen scharfen Kante. Hierauf beruht die sogenannte *Spitzenwirkung;* an den Spitzen ist die Dichte der Electricität am grössten und daher strömt die Electricität besonders an den Spitzen leicht aus, welche sich am Conductor befinden.

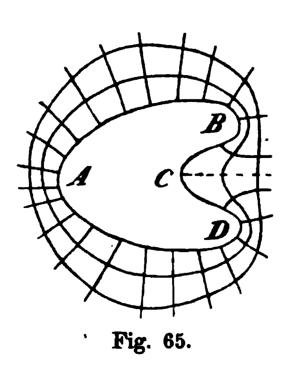


Fig. 65.

Ist A (Fig. 66) ein mit positiver Electricität geladener Conductor, B ein isolirter Conductor ohne Ladung, so ist an allen Stellen des Körpers B, die von den von A ausgehenden Kraftlinien getroffen werden, negative Electricität vorhanden. Von den anderen Punkten auf B gehen wiederum Kraftlinien aus; die Zahl der auf B treffenden ist der Zahl der von B auslaufenden gleich. Die Oberfläche von B besteht demnach aus zwei Theilen mit entgegengesetzten Ladungen. Die Theile sind durch eine um den Körper B verlaufende Curve getrennt, längs welcher die

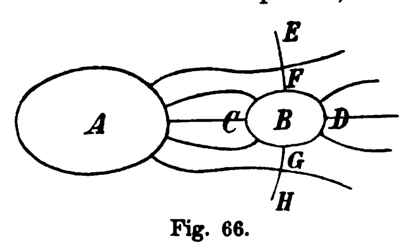


Fig. 66.

Oberflächendichte σ und also auch die electrische Kraft Null ist. Diese Curve ist die Schnittlinie zwischen B und einer äquipotentiellen Fläche um A.

ABC (Fig. 67) sei ein Conductor, an dessen Oberfläche das Potential constant und gleich Ψ ist, und $A'B'C'$ sei eine äquipotentielle Fläche vom Potential Ψ_1. Wir stellen uns vor, dass die Ladungen der einzelnen Flächenelemente, z. B. $AB = dS$, nach aussen in der Richtung der Kraftlinien bewegt und auf die Fläche $A'B'C'$ übertragen werden. Ist letztere Fläche ein Conductor, so ist die übertragene Electricität auf ihr im Gleichgewicht. Wenn innerhalb der Fläche $A'B'C'$ das Potential Ψ_1 ist und ausserhalb derselben das Potential seinen früheren Werth behält, so ist für alle äusseren Punkte die Bedingung $\nabla^2 \Psi_a = 0$ erfüllt. Die electrischen Kräfte in AB und $A'B'$ seien bezw. F und F', so haben wir nach § 55 (f), da AB und $A'B'$ von Kraftlinien begrenzt sind

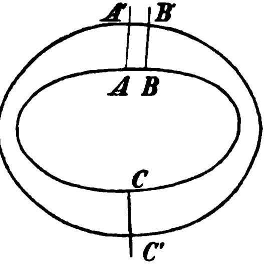


Fig. 67.

$$AB \,.\, F = A'B' \,.\, F'.$$

Sind σ und σ' die Dichten bezw. in AB und $A'B'$, so ist ferner $AB \,.\, \sigma = A'B' \,.\, \sigma'$. Wir erhalten also

$$F / \sigma = F' / \sigma'.$$

Es ist aber $F = 4\pi\sigma$ und also auch $F' = 4\pi\sigma'$.

Theilen wir demnach die Oberfläche des Conductors in Elemente, von denen jedes die electrische Menge Eins enthält, und ziehen wir von der Begrenzung des Elementes aus Kraftlinien, so begrenzen diese eine Röhre. Die Röhre durchschneidet die den Conductor umgebenden Niveauflächen in solcher Weise, dass für alle Flächen

$$F' / \sigma' = F'' / \sigma'' = \ldots F / \sigma$$

ist. Aus der Gestalt der Kraftröhren erhalten wir ein Bild für die Vertheilung der electrischen Kraft im Raume. Somit können wir aus der Vertheilung der Kraftlinien direct die

Anziehungs- und Abstossungskräfte erkennen. Zwei in demselben Sinne laufende Kraftlinien stossen sich ab, sodass die Abstossung der Spannung, welche in der Kraftlinie auftritt (vergl. § 27), das Gleichgewicht hält.

§ 61. Die electrische Energie.

Hat ein Conductor die Electricitätsmenge e, so kann er in Folge derselben eine Arbeit leisten; er besitzt *electrische Energie*. Wird die geladene Oberfläche ABC (Fig. 67) ausgedehnt, sodass sie allmählich nach einander die Gestalt der äquipotentiellen Flächen annimmt, so leisten die auf die electrische Oberfläche wirkenden Kräfte eine Arbeit, welche bestimmt werden kann. Hat die Oberfläche des Conductors das Potential Ψ, und wird sie erweitert bis zum Zusammenfallen mit der äquipotentiellen Fläche, deren Potential $\Psi + d\Psi$ ist, so kann die geleistete Arbeit in folgender Weise berechnet werden. Auf ein Flächenelement dS mit der Ladung σ wirkt nach § 59 (e) die Kraft $\frac{1}{2}.F\sigma dS$. Der Abstand der äquipotentiellen Fläche $\Psi + d\Psi$ vom Conductor sei $d\nu$. Die bei der Bewegung des Elementes dS geleistete Arbeit ist $\frac{1}{2}F\sigma dS d\nu$. Die Gesammtarbeit wird also

$$\frac{1}{2}\int\int F\sigma\, dS\, d\nu.$$

Nach der Definition der äquipotentiellen Flächen [vergl. § 55 (e)] ist $Fd\nu = -d\Psi$; wir haben also als Gesammtarbeit

$$-\frac{1}{2}\int\int\sigma\, d\Psi\, dS = -\frac{1}{2}\int e\, d\Psi.$$

Wird die Oberfläche des Körpers erweitert zur äquipotentiellen Fläche, deren Potential Null ist, so ist die geleistete Arbeit W

$$W = -\frac{1}{2}\int_{\Psi}^{0} e\, d\Psi = \frac{1}{2}e\Psi. \tag{a}$$

W ist die gesammte Arbeit, welche unter den gegebenen Verhältnissen ausgeführt werden kann und heisst deshalb die *potentielle Energie* des Conductors.

Die electrische Energie eines Conductors kann demnach geometrisch folgendermaassen dargestellt werden. Wir construiren um den Conductor L (Fig. 68) mit dem Potential Ψ

die äquipotentiellen Flächen, deren Potentiale der Reihe nach $\Psi - 1$, $\Psi - 2$, $\Psi - 3$ u. s. w. sind und zertheilen die Oberfläche des Körpers L in solcher Weise, dass jeder einzelne Theil die Ladung 1 besitzt. Durch die von den Grenzlinien der einzelnen Theile auslaufenden Kraftlinien und durch die Niveauflächen wird der ganze den Körper L umgebende Raum in $e\Psi$ Theile zerlegt; die Zahl dieser Theile giebt den doppelten Werth der electrischen Energie.

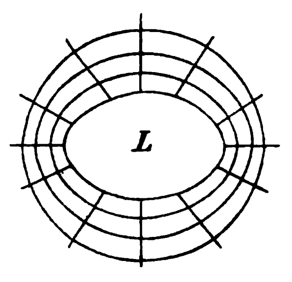


Fig. 68.

Wird die electrische Energie mit W, die Capacität mit C bezeichnet, so haben wir $e = C\Psi$ und ferner

$$\text{(b)} \qquad W = \tfrac{1}{2} e \Psi = \tfrac{1}{2} C \Psi^2 = \tfrac{1}{2} e^2 / C.$$

Wir haben früher gesehen, dass die Energie auch durch

$$W = \tfrac{1}{2} \int\int F\sigma \, dS \, dv = 1/8\pi \, . \int\int F^2 dS \, dv$$

gegeben ist.

Sind X, Y, Z die Componenten der electrischen Kraft und ist das Raumelement gleich $dx\,dy\,dz$, so wird also

$$\text{(c)} \qquad W = 1/8\pi \, . \int\int\int (X^2 + Y^2 + Z^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Haben die beiden Conductoren ABC und $A'B'C'$ (Fig. 67) bezw. die Ladungen $+e$ und $-e$ und die Potentiale Ψ_1 und Ψ_2, so erhält man in derselben Weise ihre potentielle Energie dadurch, dass man sich die Ladung $+e$ von ABC allmählich ausgebreitet denkt auf den äquipotentiellen Flächen, welche ABC umgeben. Auf diese Weise gelangt die Ladung e zuletzt nach $A'B'C'$. Das Integral in (a) lautet dann

$$\text{(d)} \qquad W = -\tfrac{1}{2} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} e \, d\Psi = \tfrac{1}{2} e (\Psi_1 - \Psi_2).$$

Diese Betrachtungsweise lässt sich in allen Fällen anwenden. Ein System von Conductoren, welche die Ladungen e_1, e_2, $e_3 \ldots$ und die Potentiale Ψ_1, Ψ_2, $\Psi_3 \ldots$ haben, besitzt in Bezug auf einen Conductor, dessen Potential Ψ_0 ist, die potentielle Energie

(e) $$W = \tfrac{1}{2} e_1 (\Psi_1 - \Psi_0) + \tfrac{1}{2} e_2 (\Psi_2 - \Psi_0) + \dots$$

Ist die Summe aller electrischen Ladungen Null, d. h.

$$e_1 + e_2 + e_3 + \dots 0,$$

so haben wir

(f) $$W = \tfrac{1}{2} e_1 \Psi_1 + \tfrac{1}{2} e_2 \Psi_2 + \dots$$

Werden also alle geladenen Conductoren auf dasselbe Potential gebracht, so ist die electrische Energie von der Grösse des gemeinschaftlichen Potentials unabhängig.

Der Ausdruck für die electrische Energie kann auch noch in anderer Weise hergeleitet werden. In einem System electrischer Conductoren ist die electrische Vertheilung dadurch bestimmt, dass im Punkte mit den Coordinaten x, y, z die Dichte ϱ gegeben ist. Das Potential in einem beliebigen Punkte ist dann nach der üblichen Bezeichnung

$$\Psi = \int \varrho \, d\tau / r.$$

Das Potential wächst und nimmt ab in gleichem Verhältniss mit ϱ. Wird die Dichte der Electricität an allen Stellen verdoppelt, so geschieht dasselbe mit dem Potential.

Wird aus jedem Raumelement die Ladung $1/n . \varrho \, d\tau$ entfernt, so ist das Potential $(n-1)/n . \Psi$. Um die Electricitätsmenge $1/n . \int \varrho \, d\tau$ nach einem entfernten und sehr ausgedehnten Körper, etwa der Erde, deren Potential Ψ_0 sein möge, überzuführen, muss die Arbeit $1/n . \int \varrho \, d\tau (\Psi - \Psi_0)$ geleistet werden, wenn n eine sehr grosse Zahl ist. Wird wiederum die Menge $1/n . \int \varrho \, d\tau$ fortgeschafft, so ist die Arbeit

$$1/n . \int \varrho \, d\tau \left((n-1)/n . \Psi - \Psi_0\right)$$

erforderlich. Ist zuletzt die gesammte Ladung zur Erde abgeführt, so ist die geleistete Arbeit W

$$W = 1/n . \int \varrho \, d\tau \left(1 + (n-1)/n + (n-2)/n + \dots + 1/n\right) \Psi - \Psi_0 \int \varrho \, d\tau.$$

Wir haben

$$1 + (n-1)/n + (n-2)/n + \dots + 1/n = n(n+1)/2n$$

und, wenn n sehr gross ist,

(g) $$W = \tfrac{1}{2} \int \Psi \varrho \, d\tau - \Psi_0 . \int \varrho \, d\tau.$$

Ist die Summe der vorhandenen Electricitätsmengen Null, so wird

(h) $$W = \tfrac{1}{2} \int \Psi \varrho \, d\tau.$$

Da

$$\nabla^2 \Psi = \partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 + \partial^2 \Psi / \partial z^2 = -4\pi\varrho$$

ist, so ergiebt

$$W = -1/8\pi . \int\int\int \Psi . (\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 + \partial^2 \Psi / \partial z^2) dx dy dz.$$

Nun ist aber

$$\int\int\int \Psi . \partial^2 \Psi / \partial x^2 . dx\, dy\, dz$$
$$= \int\int (\Psi . \partial \Psi / \partial x) . dy\, dz - \int\int\int (\partial \Psi / \partial x)^2 . dx\, dy\, dz.$$

Demnach erhalten wir durch theilweise Integration, welche über den ganzen Raum ausgestreckt wird

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} W = 1/8\pi . \int((\partial \Psi / \partial x)^2 + (\partial \Psi / \partial y)^2 + (\partial \Psi / \partial z)^2) d\tau \\ \qquad = 1/8\pi . \int F^2 d\tau. \end{cases}$$

Dieses Resultat ist oben für die Energie in einem guten Leiter abgeleitet.

§ 62. **Ein System von Conductoren.**

Sind mehrere isolirte Conductoren A_1, A_2, A_3 u. s. w. gegeben und wird einem derselben A_1 eine Electricitätseinheit mitgetheilt, während die anderen keine Ladung haben, so erhält A_1 ein bestimmtes Potential p_{11}, während die Potentiale von A_2, A_3 u. s. w. bezw. p_{12}, p_{13} u. s. w. sind. Wäre A_2 die Ladung 1 mitgetheilt worden, während die übrigen Leiter ohne Ladung geblieben wären, so ist das Potential auf A_2 gleich p_{22}, und die Potentiale auf A_1, A_3, $A_4 \ldots$ sind bezw. p_{21}, p_{23}, $p_{24} \ldots$ Wird nun dem Conductor A_1 die Ladung e_1, dem Conductor A_2 die Ladung e_2 u. s. f. mitgetheilt, so werden die Potentiale Ψ_1, $\Psi_2 \ldots$ bezw. die Conductoren A_1, A_2, $A_3 \ldots$ ausgedrückt durch

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \Psi_1 = p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + p_{31} e_3 + \cdots \\ \Psi_2 = p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + p_{32} e_3 + \cdots \\ \Psi_3 = p_{13} e_1 + p_{23} e_2 + p_{33} e_3 + \cdots \end{cases}$$

Die gesammte Energie des electrischen Systems ist

$$\text{(b)} \qquad W = \tfrac{1}{2}(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \Psi_3 e_3 + \ldots).$$

Demnach ist

$$\text{(c)} \begin{cases} 2W = p_{11} e_1^2 + p_{22} e_2^2 + p_{33} e_3^2 + \cdots + (p_{12} + p_{21}) e_1 e_2 \\ \qquad + (p_{13} + p_{31}) e_1 e_3 + (p_{23} + p_{32}) e_2 e_3 + \cdots \end{cases}$$

Wird einem der Conductoren, z. B. A_1, eine unendlich kleine Electricitätsmenge δe_1 zugeführt, so wird die Energie des Systems um $\delta W = \Psi_1 \delta e_1$ vermehrt. Dieser Zuwachs der Energie ergiebt sich auch aus (c), denn es ist

$$\text{(d)} \quad \delta W = (p_{11} e_1 + \tfrac{1}{2}(p_{12} + p_{21}) e_2 + \tfrac{1}{2}(p_{13} + p_{31}) e_3 + \ldots) \delta e_1.$$

Da nun δW in diesem Falle auch gleich $\Psi_1 \delta e_1$ ist, so folgt aus der ersten der Gleichungen (a), dass

$$\text{(e)} \qquad \delta W = (p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + p_{31} e_3 + \ldots) \delta e_1.$$

Durch Vergleichung der Formeln (d) und (e) ergiebt sich, dass

$$2 p_{21} = p_{21} + p_{12}, \quad 2 p_{31} = p_{31} + p_{13}, \ldots$$

Also ist

$$\text{(f)} \quad p_{21} = p_{12}, \quad p_{31} = p_{13} \quad \text{und allgemein} \quad p_{mn} = p_{nm}.$$

Die electrische Energie W_e des Systems kann also als homogene quadratische Function der Ladungen ausgedrückt werden durch

$$\text{(g)} \quad \begin{cases} W_e = \tfrac{1}{2} p_{11} e_1^2 + \tfrac{1}{2} p_{22} e_2^2 + \tfrac{1}{2} p_{33} e_3^2 + \ldots + p_{12} e_1 e_2 \\ \qquad + p_{13} e_1 e_3 + p_{23} e_2 e_3 + \ldots, \end{cases}$$

wo die Coefficienten p_{mn} als *Potentialcoefficienten* bezeichnet werden.

Werden die Gleichungen (a) nach $e_1, e_2, e_3 \ldots$ aufgelöst, so folgt, dass

$$\text{(h)} \qquad \begin{cases} e_1 = q_{11} \Psi_1 + q_{21} \Psi_2 + q_{31} \Psi_3 + \ldots \\ e_2 = q_{12} \Psi_1 + q_{22} \Psi_2 + q_{32} \Psi_3 + \ldots \\ e_3 = q_{13} \Psi_1 + q_{23} \Psi_2 + q_{33} \Psi_3 + \ldots \end{cases}$$

Wird dem Conductor A_1 die Ladung δe_1, dem Conductor A_2 die Ladung $\delta e_2 \ldots$ zugeführt, wodurch das Potential Ψ_1 den Zuwachs $\delta \Psi_1$ erhält, während die übrigen Potentiale ihre Werthe behalten, so haben wir

$$\delta e_1 = q_{11} \delta \Psi_1, \quad \delta e_2 = q_{12} \delta \Psi_1, \quad \delta e_3 = q_{13} \delta \Psi_1, \ldots$$

Der Zuwachs der Energie ist also

$$\text{(i)} \quad \delta W = q_{11} \Psi_1 \delta \Psi_1 + q_{12} \Psi_2 \delta \Psi_1 + q_{13} \Psi_3 \delta \Psi_1 + \ldots$$

Nach der Gleichung (h) bestimmt sich die Energie W aus

$$(k) \begin{cases} 2W = q_{11}\Psi_1^2 + q_{22}\Psi_2^2 + q_{33}\Psi_3^2 + \cdots + (q_{12} + q_{21})\Psi_1\Psi_2 \\ \quad + (q_{13} + q_{31})\Psi_1\Psi_3 + (q_{23} + q_{32})\Psi_2\Psi_3 + \cdots \end{cases}$$

Erfährt Ψ_1 den Zuwachs $\delta\Psi_1$, so wird

$$(l)\ \delta W = [q_{11}\Psi_1 + \tfrac{1}{2}(q_{12} + q_{21})\Psi_2 + \tfrac{1}{2}(q_{13} + q_{31})\Psi_3 \ldots +]\,\delta\Psi_1.$$

Durch Vergleichung der Formeln (i) und (l) ergiebt sich, dass

$$(m) \qquad q_{mn} = q_{nm} \quad \text{ist.}$$

Die durch die Potentiale ausgedrückte Energie W_Ψ ist also durch

$$(n) \begin{cases} W_\Psi = \tfrac{1}{2}q_{11}\Psi_1^2 + \tfrac{1}{2}q_{22}\Psi_2^2 + \tfrac{1}{2}q_{33}\Psi_3^2 + \cdots + q_{12}\Psi_1\Psi_2 \\ \quad + q_{13}\Psi_1\Psi_3 + \cdots + q_{23}\Psi_2\Psi_3 + \cdots \end{cases}$$

gegeben. Die Coefficienten q_{nn}, bei welchen die Indices einander gleich lauten, sind die *Capacitäten* der verschiedenen Conductoren; die Coefficienten q_{mn}, bei welchen die Indices von einander verschieden sind, heissen *Inductionscoefficienten.* Die Energie kann also sowohl durch die Ladungen als durch die Potentiale ausgedrückt werden; im ersteren Falle wird sie bezeichnet mit W_e, im letzteren mit W_Ψ.

Die Bedeutung der Coefficienten $q_{11}, q_{22}, \ldots$ ist folgende. Ist A_1 (Fig. 69) ein isolirter Conductor mit der Ladung e_1 und sind A_2, A_3 u. s. w. mit der Erde verbunden, so haben wir

$$e_1 = q_{11}\Psi_1, \quad e_2 = q_{12}\Psi_1,$$
$$e_3 = q_{13}\Psi_1, \ldots,$$

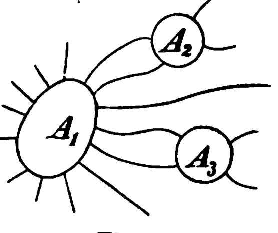


Fig. 69.

da Ψ_2, Ψ_3 u. s. w. Null sind.

q_{11} ist die Capacität des Conductors A_1 unter diesen Verhältnissen. *Die Capacität eines Conductors ist demnach die Electricitätsmenge, welche derselbe enthalten muss, damit sein Potential gleich der Einheit ist, während alle übrigen Conductoren das Potential Null haben.* $q_{12}, q_{13} \ldots$ geben die Electricitätsmengen, welche auf die mit der Erde verbundenen Conductoren $A_2, A_3 \ldots$ inducirt werden, wenn A_1 bis zur Potentialeinheit electrisirt ist. Die Coefficienten $q_{12}, q_{13} \ldots$ sind negativ. Die von A_1 ausgehenden Kraftlinien können entweder nach der Erde verlaufen, oder auf den Conductoren

A_2, A_3 u. s. w. endigen. Da an ihren Endpunkten auf A_1 positive Ladung vorhanden ist, so müssen ihre Endpunkte auf dem anderen Conductor negative Ladung zeigen.

Dagegen sind die Coefficienten $p_{12}, p_{13} \dots p_{mn}$ positiv. Sind die Ladungen der Conductoren A_2, $A_3 \dots$ nämlich

$$e_2 = e_3 = e_4 = \dots = 0,$$

so haben wir

$$\Psi_1 = p_{11} e_1, \quad \Psi_2 = p_{12} e_1, \dots$$

In die Oberflächen der ungeladenen Conductoren A_2, $A_3 \dots$ treten ebenso viele Kraftlinien ein als aus. Da die Kraftlinien von Orten höheren Potentials zu solchen niedrigeren Potentials verlaufen, so kann also das Potential eines ungeladenen Conductors in einem electrischen Felde nicht das grösste sein, es liegt zwischen dem grössten und kleinsten Potentialwerth. Wird der Conductor A_1 mit der Electricitätseinheit geladen, so ist sein Potential p_{11}. Im unendlich fernen Punkte ist das Potential Null. Demnach ist

$$p_{11} > p_{12}, \text{ überhaupt } p_{nn} > p_{nm} \text{ und ebenso } p_{mm} > p_{nm}.$$

Ferner liegt p_{nm} zwischen p_{nn} und Null, und da p_{nn} positiv ist, so ist auch p_{nm} positiv. Nur dann, wenn der geladene Conductor den ungeladenen umschliesst, sind die Potentiale beider gleich. Wenn aber die Conductoren ausserhalb einander liegen, so ist immer

$$p_{nn} > p_{mn} \text{ und } p_{mm} > p_{mn}.$$

§ 63. Mechanische Kräfte.

Die Conductoren seien isolirt; ihre Ladungen können sich dann bei einer Verschiebung nicht ändern. Die Potentiale hängen von den Ladungen in der im § 62 (a) angegebenen Weise ab. Die auf die geladenen Oberflächen wirkenden Kräfte suchen die Conductoren in Bewegung zu setzen. Wir setzen voraus, dass alle Conductoren, mit Ausnahme von A_1, ihre relative Lage zu einander behalten; A_1 kann sich in der Richtung der x-Axe bewegen und wir bestimmen die Kraft, welche A_1 in dieser Richtung zu bewegen sucht. Die Verschiebung, welche A_1 in der angegebenen Richtung erfährt,

sei δx. Die Energie W_e des Systems wird bei der Verschiebung um $X \delta x$ vermindert. Nach der Bewegung ist die Energie $W_e + \delta W_e$ und wir haben

$$W_e - X . \delta x = W_e + \delta W_e,$$

und

(a) $$X = - \delta W_e / \delta x.$$

Nach § 62 (g) ist aber

(b) $$X = \tfrac{1}{2} e_1^2 \delta p_{11} / \delta x + \tfrac{1}{2} e_2^2 \delta p_{22} / \delta x + \ldots + e_1 e_2 \delta p_{12} / \delta x + \ldots,$$

weil die Ladungen bei der Bewegung sich nicht ändern und von der Bewegung δx unabhängig sind. Dieselbe Betrachtung kann stets dann angewandt werden, wenn der Conductor eine Bewegung ausführt, für welche die vom Systeme ausgeführte mechanische Arbeit in der Form $X \delta x$ dargestellt werden kann.

Wir bestimmen jetzt die Kraft, mit welcher einer der Conductoren in der Richtung der x-Axe bewegt wird, wenn die Potentiale constant bleiben. A_1, A_2, A_3 ... seien die gegebenen Conductoren (Fig. 70). Dieselben stehen durch sehr dünne Leiter mit sehr grossen Conductoren B_1, B_2, B_3 ... in Verbindung, welche bezw. die Potentiale Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 ... haben und so weit von dem Systeme der Conductoren A entfernt sind, dass sie keinen Einfluss auf dasselbe haben. Erfährt der Conductor A_1 die Verschiebung δx, so erhalten die Ladungen e_1, e_2, e_3 ... die Zuwachse δe_1, δe_2, δe_3 ..., und wir haben nach § 62 (h)

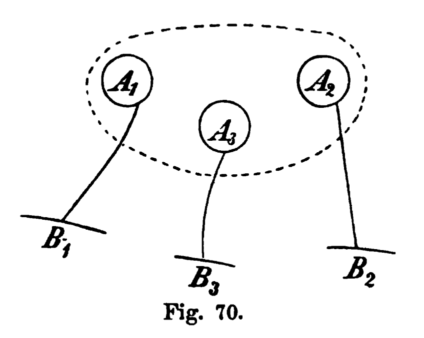


Fig. 70.

$$\delta e_1 = \Psi_1 \delta q_{11} + \Psi_2 \delta q_{21} + \Psi_3 \delta q_{31} + \ldots$$
$$\delta e_2 = \Psi_1 \delta q_{12} + \Psi_2 \delta q_{22} + \Psi_3 \delta q_{32} + \ldots$$
$$\delta e_3 = \Psi_1 \delta q_{13} + \Psi_2 \delta q_{23} + \Psi_3 \delta q_{33} + \ldots$$
. . . .

Die electrische Energie des Systems erhält dabei einen Zuwachs

$$\delta W = \Psi_1 \delta e_1 + \Psi_2 \delta e_2 + \Psi_3 \delta e_3 + \ldots$$

oder

$$\delta W = \Psi_1^2 \delta q_{11} + \Psi_2^2 \delta q_{22} + \Psi_3^3 \delta q_{33} + \dots$$
$$+ 2\Psi_1 \Psi_2 \delta q_{12} + 2\Psi_1 \Psi_3 \delta q_{13} + 2\Psi_2 \Psi_3 \delta q_{23} + \dots$$

Aber nach § 62 (n) ist die Energie bei der neuen Configuration der Conductoren gleich $W_\Psi + \delta W_\Psi$, wo

$$\delta W_\Psi = \tfrac{1}{2} \Psi_1^2 \delta q_{11} + \tfrac{1}{2} \Psi_2^2 \delta q_{22} + \tfrac{1}{2} \Psi_3^2 \delta q_{33} + \dots$$
$$+ \Psi_1 \Psi_2 \delta q_{12} + \Psi_1 \Psi_3 \delta q_{13} + \dots$$

Die geleistete Arbeit ist $X \delta x$. Die Summe der ursprünglich vorhandenen Energie W_Ψ und der zugeführten Energie δW ist gleich der Summe der Energie in der neuen Stellung und der geleisteten Arbeit. Wir haben also

$$W_\Psi + \delta W = W_\Psi + \delta W_\Psi + X.\delta x,$$
$$X.\delta x = \delta W - \delta W_\Psi.$$

Setzen wir die für δW und δW_Ψ gefundenen Ausdrücke ein, so wird

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} X.\delta x = \tfrac{1}{2} \Psi_1^2 \delta q_{11} + \tfrac{1}{2} \Psi_2^2 d q_{22} + \tfrac{1}{2} \Psi_3^2 d q_{33} + \dots \\ \quad + \Psi_1 \Psi_2 \delta q_{12} + \Psi_1 \Psi_3 \delta q_{13} + \Psi_2 \Psi_3 \delta q_{23} + \dots \end{cases}$$

Demnach ist

$$\text{(d)} \qquad X.\delta x = \delta W_\Psi \quad \text{oder} \quad X = \delta W_\Psi / \delta x.$$

Wir haben ferner $\delta W = 2X.\delta x$.

Die electrische Energie, welche dem Systeme zugeführt wird, ist also doppelt so gross wie die geleistete mechanische Arbeit. Wenn nämlich bei der Verschiebung der Conductoren die Potentiale derselben sich nicht ändern, so muss von B_1, B_2, B_3 u. s. w. den Conductoren A_1, A_2, A_3 u. s. w. Energie zufliessen. Die eine Hälfte der zugeführten Energiemenge δW dient zur Ausführung der Arbeit, die andere zur Vermehrung der electrischen Energie.

§ 64. Condensator und Electrometer.

1. *Parallele Platten.*

Befinden sich zwei Körper von verschiedenem Potential nahe bei einander, so kann auf den einander zugewandten Flächen eine verhältnissmässig grosse Menge Electricität angesammelt werden. Sind A und B zwei solche Körper, welche

bezw. die Potentiale Ψ_1 und Ψ_2 haben, und sind die einander gegenüberstehenden Flächen der Körper Ebenen, so ist die electrische Kraft im Zwischenraume überall constant, ausgenommen in der Nähe des Randes der ebenen Flächen. Ist a der Abstand der Ebenen und Ψ_1 grösser als Ψ_2, ist also die Kraft von A nach B gerichtet, so wird nach § 7 (c)

(a) $$\Psi_1 = \Psi_2 + Fa \quad \text{und} \quad F = (\Psi_1 - \Psi_2) / a.$$

Die Oberflächendichte auf A_1 bestimmt sich aus

$$4\pi\sigma = F \quad \text{oder} \quad \sigma = (\Psi_1 - \Psi_2 / 4\pi a.$$

Ist S die nach B gekehrte Fläche des Conductor A, so haben wir für die Ladung e_1 auf S

(b) $$e_1 = S\sigma = (\Psi_1 - \Psi_2).S / 4\pi a.$$

Die Ladung e_2 auf B ist $-e_1$. Die electrische Energie W_Ψ des Systems ist

$$W_\Psi = \tfrac{1}{2}(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2) = \tfrac{1}{2}(\Psi_1 - \Psi_2) e_1$$

oder

(c) $$W_\Psi = 1/8\pi.(\Psi_1 - \Psi_2)^2.S/a,$$

wo die Energie durch die Potentiale ausgedrückt ist. Aus (b) und (c) ergiebt sich, dass

(d) $$W_e = 2\pi a e_1^2 / S.$$

Ist die x-Axe senkrecht zu den ebenen Flächen der Conductoren und ist dieselbe von A nach B gerichtet, so haben wir, wenn die x-Coordinate der ebenen Fläche von A gleich x_1, die der ebenen Fläche von B gleich x_2 ist, $a = x_2 - x_1$ und

$$W_\Psi = 1/8\pi.(\Psi_1 - \Psi_2)^2.S/(x_2 - x_1); \quad W_e = 2\pi e_1^2 (x_2 - x_1)/S.$$

Die mechanische Kraft, welche auf A wirkt, ist nach § 63 (a)

$$X_1 = -\delta W_e / \delta x_1 = 2\pi e_1^2 / S; \quad X_1 = 2\pi\sigma e_1 = \tfrac{1}{2} F e_1.$$

Dies stimmt mit § 59 (e) überein. Nach § 63 (d) ist ferner

$$X_1 = \delta W_\Psi / \delta x_1 = 1/8\pi.(\Psi_1 - \Psi_2)^2.S / (x_2 - x_1)^2 = 1/8\pi.F^2.S.$$

Dies ist in Uebereinstimmung mit § 59 (f). Aus dem für W_Ψ aufgestellten Ausdrucke ergiebt sich auch, dass

$$W_\Psi = 1/8\pi.F^2.S(x_2 - x_1),$$

welche Formel mit § 61 (i) übereinstimmt.

Die Capacität C ist $C = e_1 / (\Psi_1 - \Psi_2)$; ist $\Psi_2 = 0$, so haben wir $C = S / 4\pi a$.

2. *Concentrische Kugelflächen.*

Ist eine Kugel A_1 mit dem Radius R_1 umgeben von der concentrischen Kugelschale A_2 mit den Radien R_2 und R_3 und wird A_1 die Ladung e_1, A_2 die Ladung e_2 mitgetheilt, so hat die innere Fläche von A_2 die Ladung $-e_1$, während die äussere Fläche die Ladung $e_1 + e_2$ hat.

Die Potentiale in der Kugel A_1 und innerhalb der Kugelschale A_2 sind also bezw.

$$\Psi_1 = e_1 / R_1 - e_1 / R_2 + (e_1 + e_2) / R_3; \quad \Psi_2 = (e_2 + e_1) / R_3.$$

Demnach haben wir

$$e_1 = R_2 R_1 / (R_2 - R_1) . \Psi_1 - R_2 . R_1 / (R_2 - R_1) . \Psi_2$$

und

$$e_2 = - R_2 R_1 / (R_2 - R_1) . \Psi_1 + \big(R_3 + R_2 . R_1 / (R_2 - R_1)\big) . \Psi_2 .$$

Diese Gleichungen entsprechen den in § 62 (h) aufgestellten. Das Potential Ψ_i im Raume zwischen den beiden Kugeln ist

$$\Psi_i = e_1 / r - e_1 / R_2 + (e_1 + e_2) / R_3,$$

wenn r der Abstand des betrachteten Punktes vom Kugelmittelpunkte ist. Ausserhalb der Kugelschale ist dagegen das Potential

$$\Psi_a = (e_1 + e_2) / r.$$

Die Capacität C für die innere Kugel wird aus $e_1 = C \Psi_1$ bestimmt, indem $\Psi_2 = 0$ gesetzt ist; also haben wir $C = R_1 R_2 / a$, wenn mit a der Abstand zwischen der Oberfläche der inneren Kugel und der Innenfläche der Kugelschale bezeichnet wird.

3. *Coaxiale Cylinderflächen.*

Zwei sich gegenüberstehende coaxiale Cylinderflächen A_1 und A_2 mögen bezw. die Potentiale Ψ_1 und Ψ_2, ferner die Radien R_1 und R_2 haben. Ein Punkt in dem Raume, der A_1 und A_2 trennt, habe von der Axe des Cylinders den Abstand r. Für denselben Raum genügt das Potential Ψ der Gleichung $\nabla^2 \Psi = 0$. Da die Niveauflächen in dem betrachteten Raume

mit A_1 coaxiale Cylinderflächen sind, so können wir der Gleichung $\nabla^2 \Psi = 0$ die Form (vergl. § 15)

$$d^2 \Psi / dr^2 + 2 / r . d\Psi / dr = 0$$

geben und erhalten durch Integration

$$\Psi = c \log r + c_1.$$

Für $r = R_1$ ist $\Psi = \Psi_1$ und für $r = R_2$ ist $\Psi = \Psi_2$, also wird

$$\Psi_i = \Psi_1 . (\log R_2 - \log r) / (\log R_2 - \log R_1)$$
$$+ \Psi_2 . (\log r - \log R_1) / (\log R_2 - \log R_1).$$

Für einen Punkt ausserhalb des äusseren Cylinders ist das Potential

$$\Psi_a = \Psi_2 + c (\log r - \log R_2),$$

wenn r der Abstand des betrachteten Punktes von der Cylinderaxe ist. Die Constante c kann nicht durch die Potentiale allein bestimmt werden. Die electrische Kraft F im Zwischenraume ist

$$F = - d\Psi_i / dr = - (\Psi_2 - \Psi_1) / (\log R_2 - \log R_1) . 1 / r.$$

Die Oberflächendichte σ_1 und σ_2 auf A_1 und A_2 sind nach § 55 (e)

$$\sigma_1 = (\Psi_1 - \Psi_2) / (\log R_2 - \log R_1) . 1 / 4 \pi \mathrm{R}_1$$
$$\sigma_2 = (\Psi_2 - \Psi_1) / (\log R_2 - \log R_1) . 1 / 4 \pi R_2.$$

Auf der Länge l des Cylinders A_1 befindet sich also die Electricitätsmenge $e_1 = 2 \pi R_1 l \sigma_1$, und wir haben

$$e_1 = l / 2 . (\Psi_1 - \Psi_2) / (\log R_2 - \log R_1).$$

Auf der inneren Fläche von A_2 ist eine ebenso grosse Ladung entgegengesetzter Art vorhanden. Die Capacität C eines Theiles von der Länge l des inneren Cylinders ist

$$C = \tfrac{1}{2} l / (\log R_2 - \log R_1).$$

4. *Das Quadrantenelectrometer.*

$A_1 A_1$ seien zwei Metallplatten, deren Potential Ψ_1 ist, $A_2 A_2$ seien zwei ebensolche Platten mit dem Potential Ψ_2 (Fig. 71). In der Mitte zwischen beiden Plattenpaaren liegt eine Platte A_3 mit dem Potential Ψ_3. Wir setzen voraus, dass $\Psi_1 < \Psi_2 < \Psi_3$. Wird A_3 um die Strecke δx in der Rich-

tung von A_2 nach A_1, also in der Längsrichtung, verschoben, so ist das Raumstück $b\,\delta x$ von rechts nach links gerückt, wenn b die Breite der Platte A_3 ist. Hat A_3 von A_1 und A_2 den Abstand a, so ist die zwischen A_1 und A_3 wirkende Kraft $F_1 = (\Psi_3 - \Psi_1)/a$, während die zwischen A_2 und A_3 wirkende Kraft $F_2 = (\Psi_3 - \Psi_2)/a$ ist, unter der Voraussetzung, dass die betrachteten Punkte nicht in der Nähe der Kanten von A_3

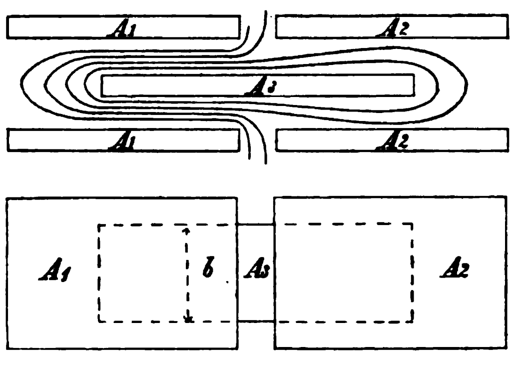


Fig. 71.

oder im Raume zwischen A_1 und A_2 liegen. Nach § 61 (i) ist die electrische Energie $W = 1/8\pi . \int F^2 d\tau$. Bei der betrachteten Bewegung wird die Energie auf der linken Seite des Plattenpaares um $1/8\pi . (\Psi_3 - \Psi_1)^2/a^2 . 2ab\,\delta x$ vermehrt, dagegen auf der rechten Seite um $1/8\pi . (\Psi_3 - \Psi_2)^2/a^2 . 2ab\delta x$ vermindert. Die Vergrösserung der Energie ist also

$$\delta W_\Psi = b\delta x\big((\Psi_3 - \Psi_1)^2 - (\Psi_3 - \Psi_2)^2\big)/4\pi a.$$

Dieser Ausdruck giebt jedoch den Zuwachs der Energie nicht vollständig an, da keine Rücksicht auf die Verhältnisse an den Kanten genommen ist. Wir setzen daher

$$\delta W_\Psi = \tfrac{1}{2}k\,\delta x\big((\Psi_3 - \Psi_1)^2 - (\Psi_3 - \Psi_2)^2\big).$$

Die Kraft X, welche A_3 von rechts nach links zu bewegen sucht, ist dann nach § 63 (d)

$$X = k(\Psi_2 - \Psi_1).\big(\Psi_3 - \tfrac{1}{2}(\Psi_1 + \Psi_2)\big).$$

Wir können dieses Resultat auf das Quadrantenelectrometer anwenden. Zeigt in diesem Instrumente die bewegliche Alu-

miniumplatte den Ausschlagswinkel Θ, so können wir näherungsweise

$$\Theta = \alpha(\Psi_2 - \Psi_1).(\Psi_3 - \tfrac{1}{2}(\Psi_1 + \Psi_2))$$

setzen, wo Ψ_1 und Ψ_2 die Potentiale auf den Quadranten sind, Ψ_3 das Potential der Aluminiumplatte und α eine Constante ist, deren Grösse von der Gestalt und den Dimensionen des Apparates abhängig ist.

§ 65. Die Dielectrica.

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, dass die betrachteten Körper entweder gute Leiter oder vollkommene Isolatoren waren, auf denen die Ladung vollständig unbeweglich ist. Die Erfahrung zeigt indessen, dass es keine vollkommene Isolatoren giebt.

Auch auf den Isolatoren wird die Electricität durch Ableitung entfernt, welche zum grössten Theil von der Flüssigkeitsschicht herrührt, mit der die Luft den Isolator überzieht. Aber selbst wenn diese Schicht durch sorgfältiges Trocknen beseitigt wird, bleibt eine Ableitung bestehen. Wird einem Isolator an einer Stelle eine electrische Ladung mitgetheilt, so hat sich dieselbe in dem Isolator nach längerer Zeit ebenso ausgebreitet wie in einem guten Leiter. Ausser dieser Wirkung findet auch eine andere augenblicklich eintretende statt. Wird ein beweglicher Isolator in die Nähe eines geladenen Conductors gebracht, so stellt sich der Isolator auf dieselbe Weise ein wie ein guter Leiter, woraus hervorgeht, dass in demselben doch eine augenblickliche Verbreitung der Electricität stattfindet. Nach Faraday bestehen die Isolatoren aus sehr kleinen Leitern, die durch ein isolirendes Medium getrennt sind. Die Capacität eines Conductors wird vermehrt, wenn an Stelle der Luft als Isolator zwischen den Flächen andere Isolatoren, wie Glas, Schellack, Kalkspath u. s. w. gesetzt werden.

A und B (Fig. 72) seien zwei Conductorplatten, welche durch einen Isolator CD getrennt werden. A sei auf das Potential Ψ_1, B auf das Potential Ψ_2 gebracht; die Oberflächendichte auf A sei σ, die auf B ist dann $-\sigma$.

Um dieses zu erklären, nimmt Faraday an, dass in dem

Isolator CD eine eigenthümliche Electrisirung stattfinde, wobei die in ihm enthaltenen einzelnen leitenden Theilchen negative Electricität auf der rechten und positive auf der linken Seite erhalten. So wie eine mechanische Kraft zu einer elastischen Verschiebung Veranlassung geben kann, so wirken die von den Condensatorplatten ausgehenden Kräfte *electromotorisch*, indem sie in den Theilchen des Dielectricums ein Strömen der Electricität verursachen. Die positive Electricität strömt im Theilchen nach der linken, die negative nach der rechten Seite.

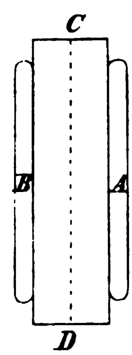


Fig. 72.

Durch diesen Vorgang, den wir als *dielectrische Verschiebung* bezeichnen, findet eine Polarisation aller Theilchen statt.

Der Zustand im Dielectricum ist mit der Polarität der Theilchen eines permanenten Magneten zu vergleichen.

Die Menge $\mathfrak{D}$, welche durch eine zu A und B parallele Flächeneinheit fliesst, muss gleich σ sein. Die Flächeneinheit der Oberfläche des Isolators erhält bei A die Ladung $-\sigma$, und ebenso bei B die Ladung $+\sigma$. a sei der Abstand zwischen A und B, deren Potentialdifferenz $\Psi_1 - \Psi_2$ ist. Die Kraft im Zwischenraume ist

(a) $$F = (\Psi_1 - \Psi_2)/a.$$

Wenn die Electricitätsmenge $\mathfrak{D}$, welche durch die Flächeneinheit strömt, der im Isolator wirkenden Kraft proportional ist, so können wir

(b) $$\mathfrak{D} = K/4\pi . F$$

setzen, wo K eine Constante ist. Demnach wird auf der Fläche A, deren Grösse S ist, die Menge

(c) $$S\mathfrak{D} = K/4\pi . (\Psi_1 - \Psi_2)/a . S$$

angesammelt. Ein Vergleich dieser Formel mit § 64 (b) zeigt, wie vielmal die Capacität des Condensators grösser geworden ist, wenn ein anderer Isolator an die Stelle der Luft gesetzt ist. Man nennt K die *Dielectricitätsconstante*; für Luft, die man als Normalmedium wählt, setzt man $K = 1$.

Die Dielectricitätsconstante ist das Verhältniss der Capacität eines Condensators für einen bestimmten Isolator als Zwischenmedium zu der Capacität desselben Condensators im Falle, dass Luft die Zwischenschicht bildet. Richtiger ist es jedoch für den luftleeren Raum $K = 1$ zu setzen; es hat sich dann gezeigt, dass K für die Gase wenig grösser als 1 ist. So findet man z. B. auf diese Weise für

Glas $K = 5{,}83—6{,}34$,
Paraffin $K = 2—2{,}32$,
Schwefel $K = 3{,}84$,
Schellack $K = 3—3{,}7$,
Schwefelkohlenstoff $K = 2{,}6$,
Terpentinöl $K = 2{,}2$.

Im Ganzen stimmen die Angaben verschiedener Beobachter wenig befriedigend überein.

Wie in § 58 sei der Körper A in das Innere des von der metallischen Hülle BC umschlossenen Raumes gebracht. B erhält die Ladung $-Q$ und C die Ladung Q. Durch die geschlossene Fläche D im Innern von BC ist die positive Electricitätsmenge Q nach aussen geströmt. Durch die geschlossene Fläche D ist demnach zuerst in das Innere die Menge Q gebracht, darauf ist dieselbe Menge nach aussen durch dieselbe Fläche geströmt. Wir sind also zur Annahme berechtigt, dass die von der Fläche D umschlossene Menge beständig Null ist. Für die geschlossene Fläche E, welche in dem BC umgebenden Isolator construirt sein möge, gilt dasselbe und auf diese Weise gelangen wir zu dem allgemeinen Satze, *dass die gesammte in einer geschlossenen Fläche enthaltene Electricitätsmenge gleich Null ist.*

Ist die Electricitätsmenge $\mathfrak{D}$, welche durch eine zur Kraftrichtung senkrechte Flächeneinheit fliesst, der electrischen Kraft in jedem Punkte proportional, so haben wir

$$\mathfrak{D} = K/4\pi . F. \tag{d}$$

Sind f, g und h die Mengen, welche in einem isotropen Körper durch drei zu den drei Coordinatenaxen senkrechte Flächeneinheiten gehen, also die rechtwinkligen *Componenten der Ver-*

schiebung $\mathfrak{D}$, und sind X, Y, Z die Componenten der electromotorischen Kraft F, so ist

(e) $$f = K/4\pi . X, \quad g = K/4\pi . Y, \quad h = K/4\pi . Z.$$

Hierbei ist

(f) $$X = -\partial\Psi/\partial x, \quad Y = -\partial\Psi/\partial y, \quad Z = -\partial\Psi/\partial z.$$

§ 66. Gleichgewichtsbedingungen.

Die geschlossene Fläche S umschliesse einen Theil des electrischen Systems und gehe theils durch das Dielectricum, theils durch Conductoren. Wir wollen ausdrücken, dass die ganze von S umschlossene Electricitätsmenge Null ist. Wird die gesammte von S umschlossene Menge mit e bezeichnet und ist $\mathfrak{D}'$ die Menge, welche durch die Oberflächeneinheit in Folge der dielectrischen Verschiebung ausströmt, so haben wir

$$e = \int \mathfrak{D}' . dS.$$

Die nach aussen gerichtete Normale der Fläche S bilde mit den Axen Winkel, deren Cosinus l, m, n sind. Wir haben

$$\mathfrak{D}' = K/4\pi . F \cos \varepsilon,$$

wenn ε der Winkel zwischen der Normalen von dS und der Richtung der electromotorischen Kraft F ist. Da

$$F \cos \varepsilon = Xl + Ym + Zn$$

ist, erhalten wir

(b) (c) $$e = 1/4\pi . \int K(Xl + Ym + Zn)dS = \int (fl + gm + hn)dS.$$

Wir wenden dieselbe Betrachtung (c) auf ein unendlich kleines Parallelepipedon mit den Kanten dx, dy und dz an, welches die Ladung $\varrho\, dx\, dy\, dz$ haben möge, so ergiebt sich, dass die eintretende Menge $f dy\, dz + g\, dx\, dz + h\, dx\, dy$, die austretende aber

$$\left(f + \frac{\partial f}{\partial x} dx\right) dy\, dz + \left(g + \frac{\partial g}{\partial y} dy\right) dx\, dz + \left(h + \frac{\partial h}{\partial z} dz\right) dx\, dy$$

ist; nennen wir die Dichte der Ladung ϱ, dann ist im Parallelepiped $dx\, dy\, dz$ die Ladung $\varrho\, dx\, dy\, dz$ vorhanden; nun soll die gesammte Electricitätsmenge gleich Null sein, folglich ist

$$f\,dy\,dz + g\,dx\,dz + h\,dx\,dy + \varrho\,dx\,dy\,dz$$
$$= \left(f + \frac{\partial f}{\partial x}dx\right)dy\,dz + \left(g + \frac{\partial g}{\partial y}dy\right)dx\,dz + \left(h + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right)dx\,dy.$$

Daraus ergiebt sich für die Raumdichte ϱ der innerhalb des Körpers befindlichen freien Electricität (vergl. § 68)

$$\varrho = \partial f/\partial x + \partial g/\partial y + \partial h/\partial z.$$

Mit Rücksicht auf § 65 (e) ist also

(e) $$\partial(KX)/\partial x + \partial(KY)/\partial y + \partial(KZ)/\partial z = 4\pi\varrho.$$

Durch Einführung des Potentials haben wir

(f) $$\partial(K.\partial\Psi/\partial x)/\partial x + \partial(K.\partial\Psi/\partial y)/\partial y + \partial(K.\partial\Psi/\partial z)/\partial z + 4\pi\varrho = 0.$$

Betrachten wir eine Fläche mit der Oberflächendichte σ, so ergiebt sich durch dieselbe Betrachtung wie in § 54, dass

(g) $$\sigma = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$$

ist, wenn $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ die Polarisationen in den Richtungen der nach aussen gezogenen Normalen der Fläche sind. Sind die Normalkräfte in denselben Richtungen N_1 und N_2, so haben wir

(h) $$\sigma = K_1/4\pi . N_1 + K_2/4\pi . N_2,$$

wo K_1 und K_2 die Dielectricitätsconstanten auf den beiden Seiten der Fläche sind.

Mit Hülfe dieser Formeln können die Aufgaben über die electrische Vertheilung und über das Verhältniss von Dichte und Potential gelöst werden. Ist K constant, so folgt aus (f), dass

$$K\nabla^2\Psi + 4\pi\varrho = 0.$$

In einem Raume, wo die Dielectricitätsconstante gleich K ist, beträgt das Potential, welches eine gegebene Ladung ϱ hervorbringt, nur den Kten Theil vom Potentiale in einem Raume, wo $K = 1$ ist. Im letzteren Falle wird das Potential Ψ' aus

$$\nabla^2\Psi' + 4\pi\varrho = 0$$

bestimmt, sodass $\Psi = \Psi'/K$ ist.

Demnach wird auch die electrische Kraft in demselben Verhältniss vermindert. Sind die Ladungen e_1 und e_2 bezw. in den Punkten A und B, und ist der Abstand $AB = r$, so stossen sich die Mengen ab mit der Kraft R:

$$R = 1/K . e_1 e_2/r^2.$$

§ 67. Die mechanische Kraft und electrische Energie in Isolatoren.

Die Dielectricitätsconstante K sei constant im betrachteten Raume. Die Kräfte, welche auf das Parallelepiped $dx\,dy\,dz = d\tau$ mit der Dichte ϱ in den Richtungen der Axen wirken, sind

(a) $\quad (X)d\tau = \varrho X d\tau, \quad (Y)d\tau = \varrho Y d\tau, \quad (Z)d\tau = \varrho Z d\tau.$

Mit Rücksicht auf den § 66 (e) haben wir also

$$(X) = 1/4\pi (X.\partial(KX)/\partial x + X.\partial(KY)/\partial y + X.\partial(KZ)/\partial z).$$

Da die Kräfte nach § 65 (f) ein Potential haben, so ist nach § 27 (b)

$$(X) = K/8\pi.(\partial(X^2 - Y^2 - Z^2)/\partial x + 2\partial(XY)/\partial y + 2\partial(XZ)/\partial z).$$

Die Kraft, welche auf das Raumelement $d\tau$ wirkt, können wir betrachten als herrührend von den Spannungen X_x, X_y [vergl. § 27 (c)], in dem

(b) $$\begin{cases} X_x = K/8\pi.(X^2 - Y^2 - Z^2), & Y_z = Z_y = K/4\pi.YZ, \\ Y_y = K/8\pi.(Y^2 - X^2 - Z^2), & Z_x = X_z = K/4\pi.XZ, \\ Z_z = K/8\pi.(Z^2 - X^2 - Y^2), & X_y = Y_x = K/4\pi.YX. \end{cases}$$

Fällt die x-Axe des Coordinatensystems mit der Richtung der electrischen Kraft zusammen, so haben wir

(c) $\quad X_x = KX^2/8\pi, \quad Y_y = -KX^2/8\pi, \quad Z_z = -KX^2/8\pi,$

während die Tangentialcomponenten verschwinden. In der Richtung der electromotorischen Kraft F findet ein Zug S statt und in den zur Kraft F senkrechten Richtungen ein Druck T, wo

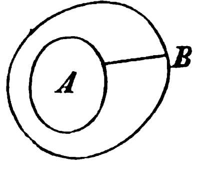


Fig. 73.

(d) $\quad S = T = KF^2/8\pi$ ist.

Sind A und B (Fig. 73) zwei metallische Oberflächen, welche durch einen Isolator mit der Dielectricitätsconstanten K getrennt sind und ist AB eine Kraftlinie, so herrscht in der Richtung derselben ein Zug S und senkrecht zu derselben ein Druck $T = S$. Auf das Oberflächenelement in A wirkt in der Richtung der nach aussen construirten Normale

ein Zug $1/8\pi . KF^2$, welcher für $K = 1$ dem in § 59 gefundenen gleich wird.

AB sei z. B. eine Hohlkugel von Glas, der innere Radius sei r_1, der äussere r_2. Die Oberfläche A habe das Potential Ψ_1, B habe das Potential 0. Im Innern der Kugelschale wird das Potential nach § 66 (f) bestimmt; wir erhalten für $\varrho = 0$

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

Da das Potential nur vom Abstande r vom Centrum abhängt, so ist nach § 15

$$d^2\Psi/dr^2 + 2/r . d\Psi/dr = 0$$

und demnach

$$\Psi = A + B/r.$$

In Rücksicht auf die Grenzbedingungen wird

$$\Psi = r_1 (r_2 - r)/(r_2 - r_1) . \Psi_1/r.$$

Die an der inneren und äusseren Oberfläche wirkenden Kräfte F_1 und F_2 sind

$$F_1 = + \Psi_1/r_1 . r_2/(r_2 - r_1); \quad F_2 = + \Psi_1/r_2 . r_1/(r_2 - r_1).$$

Werden die Spannungen an diesen Oberflächen mit p_1 und p_2 bezeichnet, so haben wir

$$\begin{cases} p_1 = K/8\pi . (\Psi_1/r_1 . r_2/(r_2 - r_1))^2; \\ p_2 = K/8\pi . (\Psi_1/r_2 . r_1/(r_2 - r_1))^2. \end{cases}$$

Diese Spannungen können als Druckkräfte angesehen werden, welche auf die Oberflächen wirken.

Ist $d\varphi/dr$ der Zuwachs, welchen r erhält in Folge des Druckes auf die Oberfläche, so haben wir nach § 31 (h)

$$d\varphi/dr = \tfrac{1}{3} ar + b/r^2,$$

wo

$$a = 3/(3\lambda + 2\mu) . (p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3)/(r_2^3 - r_1^3);$$
$$b = 1/4\mu . (p_1 - p_2) r_1^3 . r_2^3/(r_2^3 - r_1^3).$$

Daraus ergiebt sich, dass

$$p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3 = K\Psi_1^2/8\pi . r_1 r_2/(r_2 - r_1);$$
$$(p_1 - p_2) r_1^3 r_2^3 = K\Psi_1^2/8\pi . r_1 r_2 (r_2^4 - r_1^4)/(r_2 - r_1)^2$$

ist. Setzen wir

$$K\Psi_1^2/8\pi . r_1 r_2/[(r_2 - r_1)(r_2^3 - r_1^3)] = N,$$

so wird

$$d\varphi / dr = \left(r/(3\lambda + 2\mu) + (r_2^4 - r_1^4)/(r_2 - r_1).1/4\mu r^2\right)N.$$

Durch die Einwirkung der electrischen Kraft wird der innere Raum der Hohlkugel vergrössert.

Wir bezeichnen die Vergrösserung der Volumeneinheit mit Θ_0 und haben

$$4\pi/3.(r + d\varphi/dr)^3 = 4\pi/3.r^3(1 + \Theta_0),$$

sodass

$$\Theta_0 = 3 d\varphi / r dr$$

ist. Für den inneren Hohlraum, für welchen $r = r_1$ ist, erhalten wir

$$\Theta_0 = 3\left(1/(3\lambda + 2\mu) + (r_2^4 - r_1^4)/(r_2 - r_1).1/4\mu r_1^3\right)N.$$

Wird $r_2 - r_1 = \delta$ gesetzt und ist δ sehr klein im Vergleich zu r_1, so haben wir

$$\Theta_0 = 9N.(\lambda + \mu)/\mu(3\lambda + 2\mu),$$

wo

$$N = K\Psi_1^2/8\pi.1/3\delta^2$$

ist. Auf diesem Wege ergiebt sich nach § 29 (d), dass

(e) $$\Theta_0 = 3/E\delta^2.K\Psi_1^2/8\pi$$

ist. Die betrachtete Volumenvergrösserung ist bei verschiedenen Condensatoren beobachtet worden.

Sind in dem Raume, dessen Dielectricitätsconstante K eine Function der Coordinaten ist, die electrischen Ladungen von der Raumdichte ϱ vorhanden, welche das Potential Ψ hervorbringen, so ist in Uebereinstimmung mit § 61 die Energie W durch

(f) $$W = \tfrac{1}{2}\int \varrho \Psi d\tau$$

bestimmt.

Wird hier ϱ durch das Potential ausgedrückt, indem

$$\partial(K.\partial\Psi/\partial x)/\partial x + \partial(K.\partial\Psi/\partial y)/\partial y + \partial(K.\partial\Psi/\partial z)/\partial z + 4\pi\varrho = 0$$

ist, so haben wir für die Energie W

$$W = -1/8\pi.\int\int\int \Psi\big(\partial(K.\partial\Psi/\partial x)/\partial x + \partial(K.\partial\Psi/\partial y)/\partial y + \partial(K.\partial\Psi/\partial z)/\partial z\big)dx\,dy\,dz.$$

Durch theilweise Integration erhalten wir

$$W = 1/8\pi . \int\int\int K\left((\partial \Psi/\partial x)^2 + (\partial \Psi/\partial y)^2 + (\partial \Psi/\partial z)^2\right) dx\, dy\, dz,$$

wobei die Integration über den ganzen Raum ausgedehnt und vorausgesetzt wird, dass die Kraft und das Potential im unendlich fernen Punkte verschwinden. Ist die electrische Kraft F, so ergiebt sich

$$W = 1/8\pi . \int\int\int K F^2 dx\, dy\, dz. \tag{g}$$

Achter Abschnitt.

Magnetismus.

§ 68. Allgemeine Eigenschaften der Magnete.

Den Griechen war schon bekannt, dass in der Nähe der kleinasiatischen Stadt Magnesia Steine gefunden wurden, welche die Fähigkeit hatten Eisen anzuziehen. Wird ein solcher Stein, der meist aus Eisenoxydoxydul besteht, in Eisenfeilicht geworfen, so haftet dasselbe an dem Magneten an einzelnen Stellen besonders stark.

Ein länglicher Magnet ist hauptsächlich wirksam in der Nähe der Enden, welche wir als *Pole* bezeichnen. Wird ein Magnetstab horizontal so aufgehängt, dass er sich um eine verticale durch seine Mitte gehende Axe drehen kann, so nimmt derselbe von selbst eine bestimmte Richtung an, die nahezu mit dem Ortsmeridian zusammenfällt. Das nach Norden gekehrte Ende des Stabes bezeichnen wir als *Nordpol*, das andere Ende als *Südpol*. Wir nehmen dementsprechend die Existenz zweier magnetischer Flüssigkeiten an, die sich in jedem Eisentheilchen unter dem Einflusse einer magnetischen Kraft trennen. Schwimmt ein Magnetstab auf einer ruhenden Flüssigkeit, so nimmt er unter dem Einflusse einer magnetischen Kraft eine bestimmte Richtung an, aber die Kraft ist nicht im Stande, den schwimmenden Magneten in Bewegung zu setzen, wenn die Dimensionen des Magneten sehr klein sind gegen seine Entfernung vom Sitze der magnetischen

Kraft. Wir schliessen daraus, dass die in jedem Magneten vorhandenen Mengen von nord- und südmagnetischer Flüssigkeit gleich gross sind. Die eine sei mit $+m$, die andere mit $-m$ bezeichnet, da nach Uebereinkunft der Nordmagnetismus positiv gerechnet wird. Coulomb hat nachgewiesen, dass die Pole zweier Magnete einander abstossen mit einer Kraft F, welche ausgedrückt wird durch

$$\text{(a)} \qquad F = m_1 m_2 / r^2,$$

wo m_1 und m_2 die magnetischen Massen in den Polen sind und r der Abstand der Pole ist.

Wird ein Magnet in viele kleine Stücke zerbrochen, so sind alle Theile wiederum Magnete, und wir sagen deshalb, dass jeder Magnet aus unendlich vielen sehr kleinen Magneten zusammengesetzt ist. Wird der Magnet zerbrochen, so tritt auf der einen Bruchfläche positiver, auf der anderen negativer Magnetismus hervor, und die Mengen daselbst sind gleich gross, wenn durch die Erschütterungen beim Bruch nicht eine Veränderung in der Magnetisirung hervorgerufen ist. Auf der Flächeneinheit der einen Bruchfläche sei die magnetische Masse $+\sigma$ vorhanden. Für jeden Punkt in der Bruchfläche hat σ einen bestimmten Werth, der von der Lage des Punktes und der Bruchfläche abhängig ist. Auf der Bruchfläche sei die Normale nach aussen construirt; σ ist dann abhängig von den Coordinaten x, y, z des Punktes und von der Richtung der Normalen, welche mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus l, m, n sind.

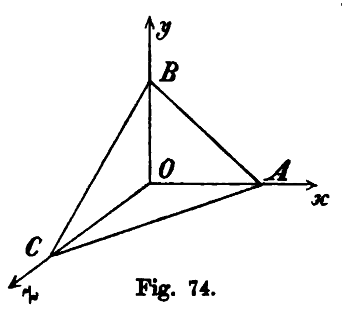


Fig. 74.

$ABC = dS$ (Fig. 74) sei ein Element der positiven Bruchfläche, O sei im Magneten ein Punkt, der der Bruchfläche unendlich nahe liegt. A, B, C sind Punkte, in denen die Fläche dS von den durch O zu den Axen parallelen Linien Ox, Oy, Oz getroffen wird. Die Fläche OBC, welche zum Tetraëder $OABC$ gehört, kann als negative Bruchfläche angesehen werden. Der Magnet sei in den Richtungen OA, OB und OC mit den Componenten A, B, C magnetisirt.

Die Fläche ABC des Tetraëder hat dann positive Ladung, die Flächen OBC u. s. w. haben negative Ladungen. Die Oberflächendichte auf einer zur x-Axe senkrechten Flächeneinheit sei A, jede Flächeneinheit von OBC enthält also die magnetische Masse $-A$. Ebenso möge die Flächeneinheit auf OAC und OBA bezw. die magnetischen Massen $-B$ und $-C$ enthalten. Die Lage der Fläche ABC ist durch die Cosinus l, m, n der Winkel bestimmt, welche die Normale der Fläche mit den Axen bildet; es ist $OBC = l.dS$, $OAC = m.dS$, $OBA = n.dS$. Ist h das von O auf die Fläche ABC gefällte Loth und wird die in der Volumeneinheit vorhandene Menge des Magnetismus mit ϱ bezeichnet, so ist die gesammte im Tetraëder enthaltene magnetische Masse

$$(\sigma - lA - mB - nC)\,dS + \tfrac{1}{3} h \varrho\, dS.$$

Da nun die gesammte magnetische Masse in einem Magneten Null ist, und die Höhe h des Tetraëders als unendlich klein angenommen wird, so haben wir

(b) $$\sigma = Al + Bm + Cn.$$

Ist demnach die Oberflächendichte auf drei durch einen Punkt gelegten zu einander rechtwinkligen Flächenelementen bekannt, so bestimmt sich aus (b) die Dichte für eine beliebige durch den betrachteten Punkt gelegte Fläche. Setzen wir

(c) $J^2 = A^2 + B^2 + C^2$ und $A = J\lambda,\ B = J\mu,\ C = J\nu,$

wo

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

ist, so ergiebt sich aus (b)

$$\sigma = J(l\lambda + m\mu + n\nu).$$

J ist *die Intensität* oder *Stärke der Magnetisirung*. Die Richtung der Intensität bildet mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus λ, μ, ν sind.

Wird $l\lambda + m\mu + n\nu = \cos\varepsilon$ gesetzt, wo ε der Winkel zwischen der Intensität der Magnetisirung und der Normale des Flächenelementes ist, so haben wir

$$\sigma = J\cos\varepsilon,$$

d. h. σ ist die Componente der Intensität der Magnetisirung nach der Normale des Oberflächenelementes. σ erhält seinen

grössten Werth für $\varepsilon = 0$, d. h. wenn die Richtung der Intensität der Magnetisirung mit der Normalen des Oberflächenelementes, auf welchem die Dichte σ ist, zusammenfällt. Durch jeden Punkt in einem Magneten kann ein Schnitt gelegt werden, für welchen die Oberflächendichte ein Maximum ist. In die Richtung der Normalen dieses Schnittes fällt die Intensität der Magnetisirung J. Für eine Schnittfläche, deren Normalen mit der Richtung der Magnetisirung zusammenfällt, ist $\sigma = J$; d. h. die Menge von Magnetismus auf der Flächeneinheit dieses Schnittes ist J. Wir construiren ein Parallelepiped, dessen eine Endfläche dS in der betrachteten Schnittfläche liegt, und dessen zur Schnittfläche senkrechte Kanten ds sind, so hat das Parallelepiped das magnetische Moment $J.dS.ds$. *Demnach ist die Intensität J der Magnetisirung gleich dem Verhältniss des Momentes des Magneten zum Volumen desselben.*

Der magnetische Zustand eines Magneten ist durch die Componenten A, B und C der Magnetisirung definirt. Nach (b) wird durch die Componenten die Dichte σ auf der Oberfläche des Magneten bestimmt. Im Innern des Magneten kann ausserdem freier Magnetismus vorhanden sein. Ist OO' (Fig. 75) ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten dx, dy, dz im Innern des Magneten und sind A, B, C die Componenten der Intensität der Magnetisirung im Punkte O, so enthält OA' die magnetische Masse $-A\,dy\,dz$, während $O'A$ die Masse

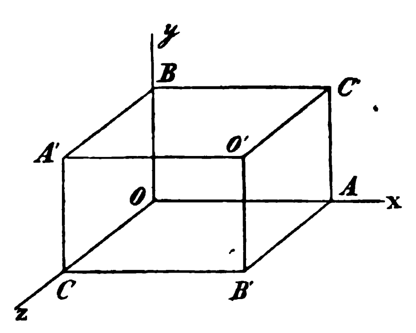


Fig. 75.

$$(A + \partial A / \partial x \,.\, dx)\,dy\,dz$$

enthält. Für die anderen Flächen gelten analoge Ausdrücke. Die in der Volumeneinheit enthaltene Menge des Magnetismus sei ϱ, so haben wir, da der gesammte Magnetismus im Parallelepiped Null ist,

$$(\partial A/\partial x + \partial B/\partial y + \partial C/\partial z + \varrho)\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Daraus ergiebt sich, dass

(e) $$\varrho = -(\partial A/\partial x + \partial B/\partial y + \partial C/\partial z).$$

Während wir A, B und C als die natürlichen Ausdrücke für die wirkliche Magnetisirung bezeichnen können, bestimmen ϱ und σ den freien Magnetismus.

§ 69. Das magnetische Potential.

Die Kraft, mit welcher ein Magnet auf einen Pol mit der magnetischen Masse Eins wirkt, heisst die *magnetische Kraft*, deren Componenten mit α, β und γ bezeichnet werden. Diese sind in derselben Weise durch das Potential bestimmt wie die Componenten der electrischen Kraft. In gegebenen Punkten seien die magnetischen Massen m, m', m'' ... vorhanden; der Pol P, für den das Potential bestimmt werden soll, habe von den Punkten bezw. die Abstände r, r', r'', r''' ... Dann ist das Potential

$$V = m/r + m'/r' + m''/r'' + \ldots,$$

wo $m + m' + m'' + \ldots = 0$ ist.

Ist N ein Nordpol mit dem Magnetismus $+m$ (Fig. 76) und S ein Südpol mit dem Magnetismus $-m$ und ist P der Punkt, für welchen das Potential bestimmt werden soll und dessen Abstände vom Nord- und Südpol bezw. r und r' sind, so haben wir

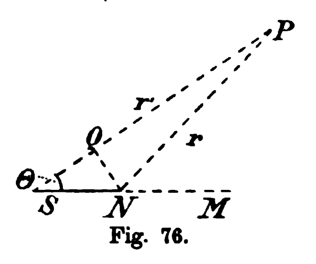


Fig. 76.

$$V = m/r - m/r' = m(r' - r)/rr'.$$

Ist die Länge l des Magneten sehr klein im Vergleich zu r und r', so ergiebt sich, wenn $lm = \mathfrak{M}$ und $\sphericalangle PSN = \Theta$ gesetzt wird

(a) $$V = \mathfrak{M} \cos \Theta / r^2.$$

$\mathfrak{M} = lm$ heisst das *Moment* des Magneten. SNM ist die *magnetische Axe*, welche positiv vom Süd- zum Nordpol gerechnet wird.

Wir bestimmen nun *das Potential eines Magneten*, dessen Magnetisirungscomponenten A, B und C gegeben sind. Die

Coordinaten in Bezug auf einen willkürlich gewählten Anfangspunkt seien ξ, η, ζ; A, B und C sind dann Functionen dieser drei Coordinaten. Ein Parallelepiped mit den Kanten $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ hat das Moment $A\, d\eta\, d\zeta . d\xi$, wenn nur zunächst die durch A bestimmte Magnetisirung berücksichtigt wird. Hat der Punkt P, für welchen das Potential bestimmt werden soll, die Coordinaten x, y, z und den Abstand r vom Punkte ξ, η, ζ, so ist

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2, \ \cos\Theta = (x - \xi)/r.$$

Das von der Magnetisirungscomponente A herrührende Potential des Elementes $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ist nach (a)

$$A\, d\xi\, d\eta\, d\zeta / r^2 . (x - \xi)/r.$$

B und C bringen die Potentiale

$$B\, d\xi\, d\eta\, d\zeta / r^2 . (y - \eta)/r, \quad C\, d\xi\, d\eta\, d\zeta / r^2 . (z - \zeta)/r$$

hervor. Die Summe dieser drei Potentiale integrirt über den ganzen Magneten ergiebt das Gesammtpotential V.

$$\text{(b)} \quad V = \int\int\int [A(x-\xi) + B(y-\eta) + C(z-\zeta)]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta / r^3.$$

Da

$$r\, \partial r/\partial x = x - \xi, \quad r\, \partial r/\partial y = y - \eta, \quad r\, \partial r/\partial z = z - \zeta$$

ist, so haben wir

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} V = -\int\int\int \big(A . \partial(1/r)/\partial x + B . \partial(1/r)/\partial y \\ \qquad + C . \partial(1/r)/\partial z\big)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{cases}$$

Setzen wir

$$\psi_1 = \int\int\int A/r . d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad \psi_2 = \int\int\int B/r . d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$
$$\psi_3 = \int\int\int C/r . d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

so ergiebt sich

$$\text{(d)} \quad V = -(\partial\psi_1/\partial x + \partial\psi_2/\partial y + \partial\psi_3/\partial z),$$

da die Magnetisirungscomponenten A, B und C von den Coordinaten x, y, z des Punktes P unabhängig sind.

Zum Zwecke einer anderen allgemeineren Transformation benutzen wir die Gleichungen

$$r . \partial r/\partial\xi = -(x-\xi), \ r . \partial r/\partial\eta = -(y-\eta), \ r . \partial r/\partial\zeta = -(z-\zeta)$$

und erhalten aus (b)

$$\text{(e)} \quad V = \int\int\int [A . \partial(1/r)/\partial\xi + B . \partial(1/r)/\partial\eta + C . \partial(1/r)/\partial\zeta]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Die Normale des Oberflächenelementes bilde mit den Axen Winkel, deren Cosinus l, m, n sind. Durch theilweise Integration ergiebt sich

$$\text{(f)}\quad \begin{cases} V = \int\int (Al + Bm + Cn)/r . dS \\ -\int\int\int (\partial A/\partial \xi + \partial B/\partial \eta + \partial C/\partial \zeta) . d\xi\, d\eta\, d\zeta / r. \end{cases}$$

In Rücksicht auf § 68 (b) und (e) erhalten wir aus (f)

$$\text{(g)}\qquad V = \int\int \sigma\, dS/r + \int\int\int \varrho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta / r.$$

Die Richtigkeit der letzten Gleichung erhellt sofort aus der Bedeutung von σ und ϱ.

Die Componenten α, β, γ der magnetischen Kraft werden ebenso wie in der Electricitätslehre durch

$$\text{(h)}\qquad \alpha = -\partial V/\partial x, \quad \beta = -\partial V/\partial y, \quad \gamma = -\partial V/\partial z$$

ausgedrückt. Die Kraft N, welche in der durch das Linienelement $d\nu$ bestimmten Richtung wirkt, ist

$$N = -\partial V/\partial \nu.$$

Ist das Potential im Innern des Magneten V_i, ausserhalb desselben V_a, so haben wir an der Oberfläche

$$\overline{V_i} = \overline{V_a}.$$

Ist ν_i die ins Innere des Magneten, ν_a die nach Aussen vom Magneten gezogene Normale eines Oberflächenelementes, in welchem die Dichte σ ist, so haben wir nach den allgemeinen Gesetzen des Potentials [vergl. § 14 (l)], die wir hier anwenden dürfen,

$$\text{(i)}\qquad \partial V_i/\partial \nu_i + \partial V_a/\partial \nu_a + 4\pi\sigma = 0.$$

Für jeden Punkt im Innern des Magneten ist

$$\text{(k)}\qquad \nabla^2 V_i + 4\pi\varrho = 0,$$

oder nach Einführung des für ϱ in § 68 (e) gegebenen Werthes

$$\text{(l)}\qquad \nabla^2 V_i = 4\pi(\partial A/\partial x + \partial B/\partial y + \partial C/\partial z),$$

wenn ϱ und A, B, C als Functionen von x, y und z betrachtet werden. Ausserhalb des Magneten dagegen ist

$$\text{(m)}\qquad \nabla^2 V_a = 0.$$

Ist S eine geschlossene Oberfläche, ν die nach aussen gezogene

Normale derselben und M der ganze von der Fläche umschlossene Magnetismus, so haben wir nach § 14 (c)

$$4\pi M = -\int\int \partial V/\partial \nu . dS,$$

oder, wenn die magnetische Kraft in der Richtung der Normalen der Flächen mit $\mathfrak{H}_n$ bezeichnet wird,

(n) $$4\pi M = \int\int \mathfrak{H}_n dS.$$

In dieser Gleichung sind (i) und (k) als specielle Fälle enthalten.

§ 70. Das Potential einer magnetischen Kugel.

Wenn die Magnetisirungscomponenten gegebene Functionen der Coordinaten, und ξ, η, ζ die Punkte im Innern des Magneten sind, so erhalten wir das Potential am leichtesten durch Benutzung der Formel § 69 (d). Sind A, B und C constant, so handelt es sich darum, das Potential eines Körpers von constanter Raumdichte zu bestimmen. Wir setzen demnach

(a) $$\psi = \int\int\int d\xi . d\eta . d\zeta / r$$

und erhalten dann

(b) $$V = -(A . \partial\psi/\partial x + B . \partial\psi/\partial y + C . \partial\psi/\partial z).$$

Das Potential einer Kugel, deren Componenten der Magnetisirung A, B, C sind, soll hiernach bestimmt werden. Der Anfangspunkt des Coordinatensystems liege im Kugelmittelpunkt. ψ hat verschiedene Werthe, je nachdem der Punkt, für den das Potential bestimmt werden soll, ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt. Nach der üblichen Bezeichnungsweise haben wir nach § 13 (c) und (d)

$$\psi_a = 4\pi R^3/3r; \quad \psi_i = 2\pi(R^2 - r^2/3),$$

wenn R der Radius der Kugel ist.

Wird das magnetische Potential ausserhalb der Kugelfläche mit V_a, für Punkte innerhalb derselben mit V_i bezeichnet, so wird

(c), (d) $$\begin{cases} V_a = 4\pi/3 . R^3/r^3 . (Ax + By + Cz); \\ V_i = 4\pi/3 . (Ax + By + Cz). \end{cases}$$

J sei die Intensität der Magnetisirung, deren Richtung mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus λ, μ, ν sind. Θ sei der

Winkel zwischen der Richtung von J und dem Abstande r. Dann ist

$$\lambda x/r + \mu y/r + \nu z/r = \cos\Theta$$

und

(e) $$V_a = 4\pi/3 . R^3 J \cos\Theta/r^2; \quad V_i = 4\pi/3 . Jr\cos\Theta.$$

Demnach ist das Potential ausserhalb des Magneten dasselbe Potential, welches ein unendlich kleiner Magnet vom Momente $\mathfrak{M} = 4\pi/3 . R^3 J$ hervorbringt [vergl. § 69 (a)].

Liegt die x-Axe in der Richtung der Intensität der Magnetisirung, so ist das Potential im Innern des Magneten

$$V_i = 4\pi/3 . Jx.$$

Die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ im Innern der Kugel ist also constant und zwar

(f) $$\mathfrak{H} = -4\pi/3 . J.$$

Ausserhalb der Kugel zerlegen wir die Kraft in zwei Componenten, von denen die eine P in der Richtung des Abstandes r, die andere Q senkrecht zum Abstande wirkt. Dann ergiebt sich

$$P = -\partial V_a/\partial r, \quad Q = -1/r . \partial V_a/\partial\Theta,$$

oder

$$P = 8\pi/3 . R^3 J\cos\Theta/r^3 = 2\mathfrak{M}/r^3 . \cos\Theta;$$

$$Q = 4\pi/3 . R^3 J\sin\Theta/r^3 = \mathfrak{M}/r^3 . \sin\Theta.$$

Nach § 68 ist die Oberflächendichte σ durch

$$\sigma = J\cos\Theta$$

bestimmt.

Die resultirende Kraft F wird

$$F = \mathfrak{M}/r^3 . \sqrt{1 + 3\cos^2\Theta}.$$

Ferner ist

$$tg\Theta = 2Q/P.$$

Ist φ der Winkel zwischen der Richtung der Kraft F und der Richtung von r, so haben wir

$$tg\varphi = Q/P = \tfrac{1}{2} tg\Theta.$$

§ 71. Die Kräfte, welche auf einen Magneten wirken.

Die magnetischen Kräfte eines Magneten, deren Componeten mit α, β, γ bezeichnet werden, sind Functionen der

Coordinaten. Ein anderer Magnet habe die Magnetisirungscomponenten A, B, C, es soll seine Wirkung auf den ersten Magneten ermittelt werden. Wir betrachten zunächst das unendlich kleine Parallelepiped OO' in Figur 77; auf der Seitenfläche OA' ist die magnetische Masse $-A\,dy\,dz$ vorhanden, auf welche in der Richtung der positiven x-Axe die Kraft $-A\,dy\,dz\,\alpha$ wirkt. Auf die Seitenfläche AO', welche die magnetische Masse $A\,dy\,dz$ hat, wirkt in der Richtung der positiven x-Axe die Kraft

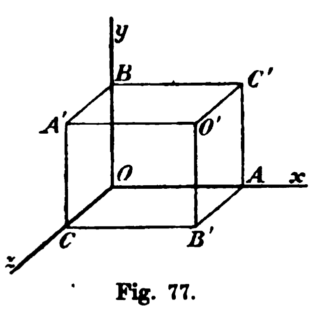


Fig. 77.

$$(\alpha + \partial\alpha/\partial x . dx)\,A\,dy\,dz.$$

Die Resultirende dieser beiden Kräfte ist

$$A . \partial\alpha/\partial x . dx\,dy\,dz.$$

Das Flächenelement OB' hat die magnetische Masse $-B\,dx\,dz$, BO' hat die Masse $B\,dx\,dz$. Auf die erstere wirkt in der Richtung der positiven x-Axe die Kraft $-B\,dx\,dz . \alpha$, auf die letztere die Kraft $+B(\alpha + \partial\alpha/\partial y . dy)\,dx\,dz$. Die Resultirende dieser beiden Kräfte ist

$$B . \partial\alpha/\partial y . dx\,dy\,dz.$$

In Bezug auf die Flächenelemente OC' und $O'C$ erhalten wir die Resultirende

$$C . \partial\alpha/\partial z . dx\,dy\,dz.$$

Wir bilden die Summe der drei Resultirenden, integriren über den ganzen vom Magneten eingenommenen Raum und erhalten für die Kraft X, welche den Magneten in der Richtung der x-Axe zu bewegen sucht

$$\text{(a)} \quad X = \int\int\int (A . \partial\alpha/\partial x + B . \partial\alpha/\partial y + C . \partial\alpha/\partial z)\,dx\,dy\,dz.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für die Kräfte Y und Z.

Wenn die magnetische Kraft, deren Componenten α, β, γ sind, von einem Systeme von Magneten herrührt, die im Punkte x, y, z das Potential V hervorbringen, so haben wir

$$\alpha = -\partial V/\partial x, \quad \beta = -\partial V/\partial y, \quad \gamma = -\partial V/\partial z.$$

Dann ist auch

$$\partial\alpha/\partial y = \partial\beta/\partial x, \quad \partial\alpha/\partial z = \partial\gamma/\partial x$$

und demnach

(b) $X = \int\int\int(A.\partial\alpha/\partial x + B.\partial\beta/\partial x + C.\partial\gamma/\partial x)\,dx\,dy\,dz.$

Wir bestimmen jetzt das *Moment der Kräfte*, welche den Magneten um eine der Coordinatenaxen, z. B. um die x-Axe, zu drehen suchen, unter der Voraussetzung, dass die magnetischen Kräfte constant sind. Der Punkt O (Fig. 77) habe die Coordinaten x, y, z. Auf die Fläche BO' wirkt in der Richtung der z-Axe eine Kraft, deren Moment in Bezug auf die x-Axe ist

$$B\,dx\,dz.\gamma.(y + dy).$$

Die auf OB' wirkende Kraft hat in Bezug auf dieselbe Axe das Moment

$$-B\,dx\,dz.\gamma.y.$$

Bei Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung ist das resultirende Moment

$$B\gamma\,dx\,dz.dy.$$

Die auf die Flächen $O'C$ und OC' wirkenden Kräfte bringen das Moment

$$-C\beta\,dx\,dy.dz$$

hervor. Das Moment L, welches den Magneten um die x-Axe zu drehen sucht, ist

(c) $$L = \int\int\int(B\gamma - C\beta)\,dx\,dy\,dz.$$

Die Drehungsmomente M und N in Bezug auf die beiden anderen Axen werden durch analoge Ausdrücke bestimmt.

Ist der Magnet nur der Einwirkung des Erdmagnetismus unterworfen, so darf man die magnetische Kraft, sowohl der Grösse als auch der Richtung nach, als constant ansehen. α, β, γ sind dann von x, y, z unabhängig, also ist

$$X = Y = Z = 0.$$

Der Schwerpunkt eines Magneten bewegt sich nicht unter der Einwirkung des Erdmagnetismus. Dagegen wirkt ein Drehungsmoment auf ihn, welches in folgender Weise bestimmt werden kann.

Das magnetische Moment des Magneten sei $\mathfrak{M}$; die Richtung desselben gegen die Coordinatenaxen sei durch die Winkel, deren Cosinus l, m und n sind, bestimmt. Wir haben dann

$$\mathfrak{M}l = \iiint A.d\tau, \quad \mathfrak{M}m = \iiint B.d\tau, \quad \mathfrak{M}n = \iiint C.d\tau.$$

Dann wird

$$L = \mathfrak{M}(\gamma m - \beta n); \quad M = \mathfrak{M}(\alpha n - \gamma l); \quad N = \mathfrak{M}(\beta l - \alpha m).$$

Daraus folgt, dass

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = 0 \quad \text{und} \quad Ll + Mm + Nn = 0$$

ist, d. h. *das resultirende Moment steht sowohl senkrecht zur magnetischen Kraft als auch zur magnetischen Axe des Magneten.* Ist die Richtung der Kraft der x-Axe parallel, liegt ferner die magnetische Axe in der xy-Ebene und bildet dieselbe mit der x-Axe den Winkel Θ, so wird

$$\text{(d)} \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = -\mathfrak{M}\alpha . \sin\Theta.$$

Ist der Magnet um eine verticale Axe drehbar, so ist das Moment, welches den Winkel Θ zwischen der magnetischen Axe und dem magnetischen Meridian zu vergrössern sucht, $-\mathfrak{M}H.\sin\Theta$, wo H die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus bedeutet. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Magneten, J das Trägheitsmoment desselben, so haben wir nach § 22 (c)

$$d(J\omega) = -\mathfrak{M}H.\sin\Theta.dt,$$

oder, da $\omega = d\Theta/dt = \dot{\Theta}$,

$$\text{(e)} \qquad J\ddot{\Theta} = -\mathfrak{M}H.\sin\Theta.$$

Ist der Winkel Θ sehr klein, so ergiebt sich für die Schwingungsdauer des Magneten nach § 22 (e)

$$\text{(f)} \qquad \tau = \pi\sqrt{J/\mathfrak{M}H}.$$

§ 72. Potentielle Energie eines Magneten.

Unter der potentiellen Energie eines Magneten versteht man die Arbeit, welche zur Ueberführung eines Magneten von der Stelle, wo keine magnetischen Kräfte wirken, zum Punkte mit dem magnetischen Potentiale V nöthig ist. Wir betrachten zunächst ein unendlich kleines Parallelepiped (Fig. 78) mit den Magnetisirungscomponenten A, B, C. Um

die magnetische Oberfläche OA' zur Stelle, wo das Potential V ist, zu schaffen, ist die Arbeit $-A.dy\,dz.V$ nöthig. Die Fläche $O'A$ gelangt bei der Bewegung zu einer Stelle, wo das Potential

$$V + \partial V/\partial x.dx$$

ist und die geleistete Arbeit beträgt

$$A.dy\,dz.(V + \partial V/\partial x.dx).$$

Für diese zwei Flächenelemente beträgt also die Arbeit

$$A.\partial V/\partial x.dx\,dy\,dz.$$

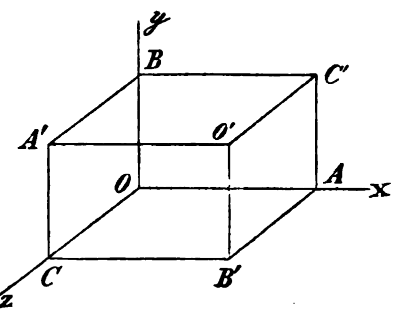


Fig. 78.

Werden die zwei übrigen Flächenpaare in derselben Weise behandelt, so ist die gesammte Arbeit W zur Ueberführung des Magneten

$$\text{(a)} \quad W = \int\int\int (A.\partial V/\partial x + B.\partial V/\partial y + C.\partial V/\partial z)\,dx\,dy\,dz,$$

oder, da $\alpha = -\partial V/\partial x$, $\beta = -\partial V/\partial y$, $\gamma = -\partial V/\partial z$, die Componenten der magnetischen Kraft sind,

$$\text{(b)} \quad W = -\int\int\int (A\alpha + B\beta + C\gamma)\,dx\,dy\,dz.$$

Wir wenden diese Gleichung auf einen Magneten an, der nur der Einwirkung des Erdmagnetismus unterworfen ist. Der Magnet habe das Moment $\mathfrak{M}$; die Richtung der magnetischen Axe bilde mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus l, m, n sind. Wir haben dann

$$\int\int\int A.dx\,dy\,dz = l\mathfrak{M}, \quad \int\int\int B.dx\,dy\,dz = m\mathfrak{M},$$
$$\int\int\int C.dx\,dy\,dz = n\mathfrak{M}$$
$$W = -\mathfrak{M}(l\alpha + m\beta + n\gamma).$$

Die magnetische Kraft sei $\mathfrak{H}$ und ihre Richtung bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν, dann wird

$$W = -\mathfrak{M}\mathfrak{H}(l\lambda + m\mu + n\nu).$$

Θ sei der Winkel zwischen der magnetischen Axe des Magneten und der magnetischen Kraft, so ist

$$\text{(c)} \quad W = -\mathfrak{M}\mathfrak{H}.\cos\Theta.$$

Ist die Richtung der Kraft der x-Axe parallel, wie in § 71, und liegt die magnetische Axe in der xy-Ebene, so ist die zur Drehung des Magneten um den Winkel $d\Theta$ erforderliche Arbeit

$$dW = + \mathfrak{M}\mathfrak{H} \,.\, \sin\Theta \,.\, d\Theta.$$

Dies stimmt mit § 71 (d) überein.

Wir betrachten jetzt einen sehr kleinen Magneten, der sich in der Nähe eines sehr starken Magneten befindet. Ist der erstere hinreichend frei beweglich, so dreht er sich so, dass seine magnetische Axe der Richtung der magnetischen Kraft parallel ist. In diesem Falle ist $\Theta = 0$, und die potentielle Energie W wird

$$W = - \mathfrak{M}\mathfrak{H}.$$

Da die Bewegung des kleinen Magneten auf Kosten der potentiellen Energie geschieht, so bewegt er sich in solcher Weise, dass W abnimmt. Dieses geschieht der letzten Gleichung nach, wenn $\mathfrak{H}$ zunimmt; der Magnet bewegt sich also in der Richtung, in welcher die magnetische Kraft wächst. Ein magnetisches Partikel strebt also nach der Stelle zu gelangen, wo die magnetische Kraft am grössten ist. Dagegen bewegen sich die diamagnetischen Körper nach den Stellen, wo die magnetische Kraft ihr Minimum hat.

Um die einem Systeme von Magneten innewohnende magnetische Energie zu finden, verfahren wir folgendermaassen. Das Potential in jedem Punkte innerhalb des Systems wächst proportional der Grösse der Magnetisirungscomponenten. Die Magnetisirungscomponenten mögen nun in solcher Weise anwachsen, dass sie in den aufeinander folgenden Zeitpunkten immer dasselbe Vielfache ihrer endlichen Grösse erhalten. Unter diesen Bedingungen wächst das Potential in demselben Verhältniss. Sind ursprünglich die Magnetisirungscomponenten Null, so ist auch das Potential im Anfange gleich Null. Die endlichen Werthe der Magnetisirungscomponenten seien A, B, C. In einem bestimmten Zeitpunkte während des Anwachsens der Magnetisirungscomponenten seien die letzteren nA, nB, nC, wo n ein echter Bruch ist. Zu derselben Zeit ist das Potential in irgend einem Punkte gleich nV. Wachsen die

Magnetisirungscomponenten bezw. um $A.dn$, $B.dn$, $C.dn$, so wächst das Potential in dem betrachteten Punkte um Vdn. Werden aber A, B, C vermehrt bezw. um $A.dn$, $B.dn$, $C.dn$, so ist dazu nach (a) die Arbeit

$$\int\int\int(A.dn.n\partial V/\partial x + B.dn.n\partial V/\partial y + C.dn.n\partial V/\partial z)dx\,dy\,dz$$
$$= n.dn\int\int\int(A.\partial V/\partial x + B.\partial V/\partial y + C.\partial V/\partial z)\,dx\,dy\,dz$$

erforderlich. Wächst nun n von 0 bis 1 an, so ist $\int_0^1 n\,dn = \frac{1}{2}$ und die gesammte Arbeit wird

(d) $W = \frac{1}{2}\int\int\int(A.\partial V/\partial x + B.\partial V/\partial y + C.\partial V/\partial z)\,dx\,dy\,dz,$

oder durch Einführung der Componenten der magnetischen Kraft

(e) $$W = -\frac{1}{2}\int\int\int(A\alpha + B\beta + C\gamma)\,dx\,dy\,dz.$$

Die Energie eines magnetischen Systems kann auch in anderer Weise ausgedrückt werden. Dieselbe Betrachtung, durch welche wir vorhin zu einem Ausdrucke für die Energie gelangt sind, zeigt, dass

(f) $$W = \frac{1}{2}\int\sigma.V.dS + \frac{1}{2}\int\int\int\varrho.V.dx\,dy\,dz$$

ist, wo σ und ϱ bezw. die Oberflächen- und Volumendichte bedeuten.

Sind V und die ersten Differentialquotienten von V stetig veränderlich, so ist $\sigma = 0$, und wir haben dann

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int\varrho.V.dx\,dy\,dz.$$

Nun ist

$$\nabla^2 V + 4\pi\varrho = 0$$

und demnach

$$W = -1/8\pi.\int\int\int V(\partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial y^2 + \partial^2 V/\partial z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Durch theilweise Integration über den ganzen unendlichen Raum folgt hieraus

$$W = 1/8\pi.\int\int\int[(\partial V/\partial x)^2 + (\partial V/\partial y)^2 + (\partial V/\partial z)^2]\,dx\,dy\,dz,$$

oder

(g) $$W = 1/8\pi.\int\int\int(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Für die dielectrische Polarisation gelten ganz ähnliche Ausdrücke (vergl. § 61).

§ 73. Die magnetische Vertheilung.

Jedes in ein magnetisches Feld gebrachte Stück weichen Eisens wird durch Induction magnetisch. Wir nehmen an, dass die Intensität der Magnetisirung an jedem Punkte eine Function der gesammten in dem betrachteten Punkte wirkenden magnetischen Kraft ist. Die Intensität der Magnetisirung möge der magnetischen Kraft proportional sein; wir haben dann

(a) $$A = k\alpha, \quad B = k\beta, \quad C = k\gamma,$$

wo k eine Constante ist. Die magnetisirende Kraft rührt theils von den im Felde vorhandenen permanenten Magneten, theils von den im weichen Eisen von diesen durch Vertheilung geschaffenen magnetischen Massen her. Den ersteren möge das Potential V, den letzteren das Potential U zugehören, so dass

$$A = -k.\partial(V + U)/\partial x, \quad B = -k.\partial(V + U)/\partial y,$$
$$C = -k.\partial(V + U)/\partial z.$$

Es ist aber ausserhalb der Massen der permanenten Magnete $\nabla^2 V = 0$ und also

$$\partial A/\partial x + \partial B/\partial y + \partial C/\partial z = -k\nabla^2 U,$$

oder, da nach § 68 (e)

$$\varrho = -(\partial A/\partial x + \partial B/\partial y + \partial C/\partial z)$$

ist, so wird

$$\nabla^2 U - \varrho/k = 0.$$

Da das Potential U von den Componenten der Magnetisirung A, B, C herrührt, so ist innerhalb des weichen Eisens

$$\nabla^2 U + 4\pi\varrho = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir

(b) $$(1 + 4\pi k)\varrho = 0,$$

d. h. es ist $\varrho = 0$; *im Innern des weichen Eisenstückes ist also kein freier Magnetismus vorhanden.* Die magnetische Masse befindet sich also auf der Oberfläche des Eisens, für welche die Oberflächendichte σ des Magnetismus bestimmt werden muss.

Wir benutzen zu diesem Zwecke die Gleichung

$$4\pi\sigma + \partial(V + U_i)/\partial \nu_i + \partial(V + U_a)/\partial \nu_a = 0,$$

wo v_a und v_i die von einem beliebigen Punkte auf der Oberfläche des Eisens bezw. nach aussen und innen gezogenen Normalen sind. U_i und U_a sind die von dem vertheilten Magnetismus herrührenden Werthe des Potentials innerhalb und ausserhalb des Eisens. Wir haben nun

$$\partial V/\partial v_i = -\partial V/\partial v_a, \text{ also } 4\pi\sigma + \partial U_i/\partial v_i + \partial U_a/\partial v_a = 0.$$

Dicht an der Oberfläche des weichen Eisens ist die magnetisirende Kraft in der Richtung v_i gleich $-\partial(V + U_i)/\partial v_i$. Der freie Magnetismus auf dem entsprechenden Oberflächenelement dS ist also

$$\sigma . dS = k . \partial(V + U_i)/\partial v_i . dS.$$

Demnach wird

$$\text{(c)} \qquad 4\pi k . \partial V/\partial v_i + (1 + 4\pi k)\partial U_i/\partial v_i + \partial U_a/\partial v_a = 0.$$

In Verbindung mit den Gleichungen

$$\text{(d)} \qquad \nabla^2 U_i = 0, \quad \nabla^2 U_a = 0$$

dient die Relation (c) zur Bestimmung der Potentiale U_i und U_a.

Als Beispiel der ausgeführten Theorie behandeln wir die Magnetisirung einer Kugel unter der Einwirkung einer constanten magnetisirenden Kraft $\mathfrak{H}$, welche in der Richtung der x-Axe wirkt. Die Intensität der Magnetisirung der Kugel in der Richtung der x-Axe sei A; die von der Magnetisirung herrührende und in der Richtung der x-Axe wirkende Kraft ist nach § 70 (f) gleich $-4\pi/3 . A$. Nach der Gleichung (a) haben wir also

$$A = k(\mathfrak{H} - 4\pi/3 . A)$$

und demnach

$$A = k\mathfrak{H}/(1 + 4\pi/3 . k).$$

In diesem Falle ist nach § 70 (e)

$$U_i = 4\pi/3 . Ax; \quad U_a = 4\pi/3 . R^3 A . \cos\Theta/r^2.$$

Diese Werthe genügen der Gleichung (c), indem $V = -\mathfrak{H}x$ ist.

§ 74. Magnetische Kraftlinien.

Ist M der freie Magnetismus innerhalb einer geschlossenen Fläche und $\mathfrak{H}_n$ die Componente der magnetischen Kraft in der Richtung der Normalen der Fläche, so haben wir nach § 69

$$\text{(a)} \qquad 4\pi . M = \int\int \mathfrak{H}_n . dS.$$

Bringen wir über die Pole eines horizontal liegenden Magneten ein Blatt Papier und streuen wir Eisenfeilspähne auf dasselbe, so ordnen sich die letzteren in Curven an, die als *magnetische Kraftlinien* bezeichnet werden. DE (Fig. 79) sei eine kleine Fläche von der Grösse dS; vom Umfange derselben gehen Kraftlinien aus, welche eine *Kraftröhre* begrenzen. Ist $D'E' = dS'$ ein anderer Schnitt durch die Kraftröhre, so kann auf den begrenzten Theil der Kraftröhre das in der Gleichung (a) enthaltene Theorem angewandt werden.

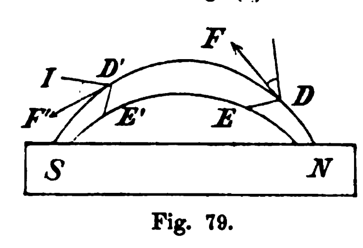


Fig. 79.

Da die Richtung der magnetischen Kraft mit der Richtung der Kraftlinien zusammenfällt, so ist die Normalkraft überall an der Röhre Null, ausgenommen an den Endflächen DE und $D'E'$. Die in DE wirkende Kraft sei $\mathfrak{H}$, die an $D'E'$ wirkende $\mathfrak{H}'$; die Winkel zwischen der Richtung der Kraft und den Richtungen der Normalen auf DE und $D'E'$ seien bezw. Θ und Θ'. Da im Innern der Röhre kein freier Magnetismus vorhanden ist, so haben wir

$$-\mathfrak{H}.dS.\cos\Theta + \mathfrak{H}'.dS'.\cos\Theta' = 0.$$

Sind die Schnitte dS und dS' senkrecht zu den Kraftlinien, so wird

$$\mathfrak{H}/\mathfrak{H}' = dS'/dS.$$

Die Kraft ist also dem Querschnitt der Kraftröhre verkehrt proportional. Aus dem gegenseitigen Abstande der Kraftlinien erhalten wir eine Vorstellung über die Grösse der magnetischen Kraft im Felde.

Eine magnetische Kraftröhre kann nicht in sich selbst zurückkehren und einen hohlen Ring bilden. Im entgegengesetzten Falle würde die Arbeit von Null verschieden sein, welche von den magnetischen Kräften bei der Ueberführung einer magnetischen Masse 1 von einem Punkte auf einer geschlossenen Linie zurück zu demselben Punkte geleistet wird. Ist ds ein Element der Kraftröhre, so würde also die Arbeit sein

$$\int \mathfrak{H}.ds > 0,$$

wenn die Bewegungsrichtung mit der Kraftrichtung zusammenfällt. Ist das magnetische Potential V, so haben wir aber

$$\mathfrak{H} = -dV/ds$$

und also für eine geschlossene Linie

$$\int dV/ds . ds = V - V = 0,$$

da das Potential eine eindeutige Function des Ortes ist.

Jede magnetische Kraftröhre muss an der Oberfläche eines Magneten beginnen und an einer solchen endigen. Endet das Rohr mit dem Querschnitte PQ (Fig. 80), so dass eine magnetische Kraft im Rohre $TUQP$ vorhanden ist, während dieselbe ausserhalb des Rohres in R und S Null ist, so wenden wir die Gleichung (a) auf den Raum $TUQSRP$ an. Da eine magnetische Kraft in der Fläche TU wirkt, aber nicht im Raume $PQSR$, so ist das Oberflächenintegral über $TUQSRP$ nicht Null. In der geschlossenen Oberfläche müsste also Magnetismus vorhanden sein, was gegen die Voraussetzung streitet. Jede magnetische Kraftröhre endet also in der Oberfläche eines Magneten.

R S P Q T U

Fig. 80.

Um die Grösse und Richtung der magnetischen Kräfte zu veranschaulichen, benutzte Faraday die magnetischen Kraftlinien; er nahm an, *dass die Kraftlinien in den Magneten hinein fortgesetzt würden.* Seine Betrachtungsweise ist in der That von sehr grosser Bedeutung geworden. Zerbricht man einen Magneten und stellt die Bruchflächen in geringem Abstande einander gegenüber, so wirkt eine starke magnetische Kraft im Raume $PQRU$ (Fig. 81). Diese Kraft rührt theils her von dem freien Magnetismus im Innern des Magneten und auf der ursprünglichen Oberfläche desselben, theils von dem freien Magnetismus auf den neugebildeten Flächen. Die aus der ersteren Ursache sich ergebende Kraft ist vom Nordpol n zum Südpol s gerichtet, während die von der letzteren Ursache herrührende Kraft von s nach n gerichtet ist. Die letztere Kraft ist in Wirklichkeit die stärkere, so dass man mit einem gewissen Rechte sagen kann, die magnetische Kraftröhre wird durch das Innere des Magneten auf dem Wege $D'F'FD$ (Fig. 81) fortgesetzt.

Ist S (Fig. 82) eine ausserhalb des Magneten geschlossene Fläche, welche also keinen Magneten, weder ganz noch theil-

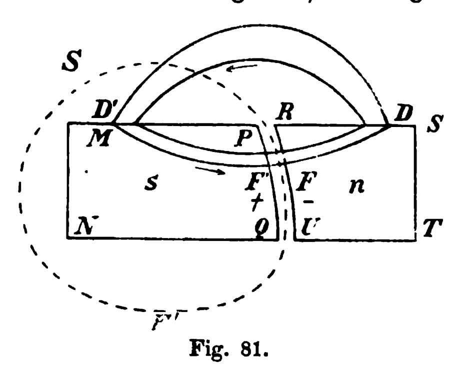


Fig. 81.

weise, umschliesst, und welche also keinen Magnetismus enthält, so haben wir nach § 14

$$\int\int \mathfrak{H}_n \,.\, dS = 0.$$

Man pflegt dieses folgendermassen auszudrücken: das Integral $\int \mathfrak{H}_n . dS$, welches über einen Theil der Fläche ausgedehnt wird, kann in die Theile $\mathfrak{H}_{n_1} . dS_1$, $\mathfrak{H}_{n_2} . dS_2$ u. s. w. zerlegt werden. Alle Producte $\mathfrak{H}_n . dS$ seien gleich gross und jedes sei

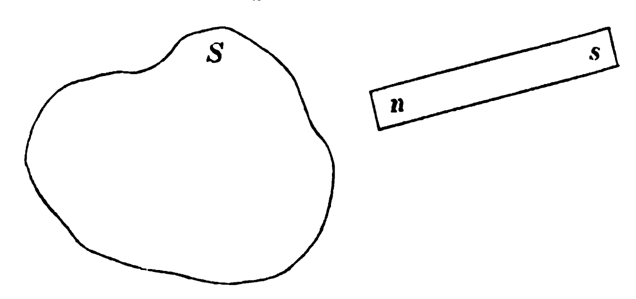


Fig. 82.

gleich der Einheit. Da das Product $\mathfrak{H}_n . dS$ für dieselbe Röhre oder Kraftlinie constant ist, so giebt $\int \mathfrak{H}_n . dS$ *die Zahl der Kraftlinien an*, welche die Fläche durchsetzen. *Ist das Integral Null, so treten ebensoviel Kraftlinien in die Fläche ein wie aus derselben austreten.*

Dasselbe gilt von einer Fläche, welche einen oder mehrere

Magnete umschliesst, denn die Summe des Magnetismus in jedem Magneten ist Null. Dagegen gilt der Satz nicht, wenn die Fläche einen Magneten durchschneidet. Wird indessen der Magnet in zwei Theile $MNQP$ (Fig. 81) und $RSTU$ zerlegt und befinden sich diese Theile unendlich nahe bei einander, so gilt der Satz für jedes der beiden Stücke, wenn die betrachtete Fläche den einen Theil umschliesst, den anderen Theil aber ausschliesst. Wenn nun die betrachtete Theilung des Magneten keine Störung in der Magnetisirung desselben hervorgebracht hat, so kann der Satz folgendermaassen ausgedrückt werden.

Die Componenten der magnetischen Kraft sind α, β, γ. In dem ausserhalb der Spalte liegenden Theil der Fläche wirkt keine zweite magnetische Kraft; dagegen bringen der freie Magnetismus $+\sigma$ auf einem Elemente dS von PQ (Fig. 81) und $-\sigma$ auf dem entsprechenden Elemente von RU eine Kraft hervor, welche in folgender Weise ermittelt werden kann. Nach § 13 übt eine Fläche mit der Dichte σ auf eine sehr nahe liegende Masseneinheit die anziehende Kraft $2\pi\sigma$ aus. Bei den magnetischen Massen ergiebt sich eine abstossende Kraft $2\pi\sigma$. Sind zwei parallele Flächen vorhanden, von denen die eine die magnetische Dichte σ, die andere die Dichte $-\sigma$ hat, so ist die zwischen den Flächen wirkende magnetische Kraft $4\pi\sigma$. Die nach aussen gerichtete Normale des Flächenelementes dS bilde mit den Axen Winkel, deren Cosinus l, m, n sind, so haben wir, wenn A, B, C die Magnetisirungscomponenten sind

$$\sigma = lA + mB + nC.$$

Die magnetische Kraft in der Richtung der Normale ist

$$l\alpha + m\beta + n\gamma.$$

Da das Oberflächenintegral in dem betrachteten Falle Null sein muss, so wird

$$\int\int (l\alpha + m\beta + n\gamma + 4\pi\sigma)\, dS = 0,$$

oder nach § 68 (b)

$$\int [l(\alpha + 4\pi A) + m(\beta + 4\pi B) + n(\gamma + 4\pi C)]\, dS = 0.$$

Ist S (Fig. 82) eine ausserhalb des Magneten geschlossene Fläche, welche also keinen Magneten, weder ganz noch theil-

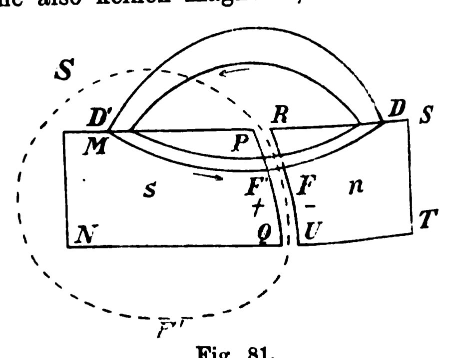


Fig. 81.

weise, umschliesst, und welche also keinen Magnetismus enthält, so haben wir nach § 14

$$\int\int \mathfrak{H}_n \cdot dS = 0.$$

Man pflegt dieses folgendermassen auszudrücken: das Integral $\int \mathfrak{H}_n . dS$, welches über einen Theil der Fläche ausgedehnt wird, kann in die Theile $\mathfrak{H}_{n_1} . dS_1$, $\mathfrak{H}_{n_2} . dS_2$ u. s. w. zerlegt werden. Alle Producte $\mathfrak{H}_n . dS$ seien gleich gross und jedes sei

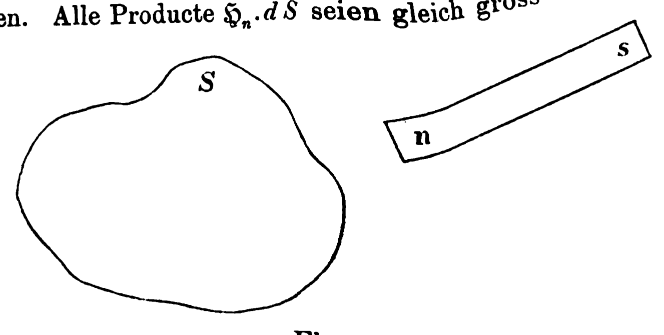


Fig. 82.

gleich der Einheit. Da das Product $\mathfrak{H}_n . dS$ für dieselbe Röhre oder Kraftlinie constant ist, so giebt $\int \mathfrak{H}_n . dS$ *die Zahl der Kraftlinien an,* welche die Fläche durchsetzen. *Ist das Integral Null, so treten ebensoviel Kraftlinien in die Fläche ein* [illegible] *aus derselben austreten.*

Dasselbe gilt von einer [illegible] he einen oder [illegible]

Magnete umschliesst, denn die Summe des [illegible] jedem Magneten ist Null. Dagegen gilt der Satz [illegible] die Fläche einen Magneten durchschneidet. [illegible] der Magnet in zwei Theile $MNQP$ (Fig. [illegible] und [illegible] zerlegt und befinden sich diese Theile unendlich [illegible] so gilt der Satz für jedes der beiden Stücke, wenn [illegible] trachtete Fläche den einen Theil umschliesst, [illegible] Theil aber ausschliesst. Wenn nun die [illegible] des Magneten keine Störung in der [illegible] hervorgebracht hat, so kann der Satz [illegible] gedrückt werden.

Die Componenten der magnetischen Kraft [illegible] In dem ausserhalb der Spalte liegenden Theil [illegible] keine zweite magnetische Kraft: dagegen [illegible] Magnetismus $+\sigma$ auf einem Elemente [illegible] und $-\sigma$ auf dem entsprechenden Elemente [illegible] hervor, welche in folgender Weise ermittelt [illegible] § 13 übt eine Fläche mit der Dichte σ an [illegible] liegende Masseneinheit die anziehende Kraft [illegible] den magnetischen Massen ergiebt sich eine [illegible] $2\pi\sigma$. Sind zwei parallele Flächen vorhanden [illegible] eine die magnetische Dichte σ, die andere [illegible] so ist die zwischen den Flächen wirkende [illegible] $4\pi\sigma$. Die nach aussen gerichtete Normale [illegible] elementes dS bilde mit den Axen Winkel [illegible] n sind, so haben wir, wenn A, B, C die [illegible] ponenten sind

$$\sigma = lA + mB + [illegible]$$

Die magnetische Kraft in der Richtung [illegible]

$$l\alpha + m\beta + [illegible]$$

Da das Oberflächenintegral in der [illegible] sein muss, so wird

$$\int\int (l\alpha + m [illegible]$$

oder nach § 68 (b)

$$\int [l(\alpha + 4\pi A) + m [illegible]$$

Wir setzen

(b) $$a = \alpha + 4\pi A, \quad b = \beta + 4\pi B, \quad c = \gamma + 4\pi C$$

und erhalten

(c) $$\int (a l + b m + c n) dS = 0.$$

a, b, c sind die Componenten der *magnetischen Induction.* Werden also die Richtungen der Kraftlinien durch die Richtungen der Resultanten der magnetischen Induction bestimmt, so erkennt man, dass *die Kraftlinien durch den Magneten selbst fortgesetzt gedacht werden können, und dass sie also in sich selbst zurücklaufen.* Die Gleichung (c) zeigt nämlich, dass ebenso viel Linien in eine Fläche eintreten als von ihr ausgehen. Denken wir uns durch eine in sich selbst geschlossene Raumcurve s eine willkürliche Fläche S gelegt, und bestimmen wir die magnetische Induction, deren Componenten a, b, c sind, so ist die Grösse

$$N = \int (a l + b m + c n) dS$$

durch die Randcurve s der Fläche S allein bestimmt. Man sagt: *die Curve s umschliesst die Anzahl N magnetischer Kraftlinien.*

Aus den Gleichungen (b) folgt, dass

$$\begin{aligned} &\partial a / \partial x + \partial b / \partial y + \partial c / \partial z \\ &= \partial \alpha / \partial x + \partial \beta / \partial y + \partial \gamma / \partial z + 4\pi(\partial A / \partial x + \partial B / \partial y + \partial C / \partial z) \\ &= -\nabla^2 V - 4\pi \varrho. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\partial a / \partial x + \partial b / \partial y + \partial c / \partial z = 0.$$

§ 75. Die Gleichung der Kraftlinien.

Wir entwickeln noch die Gleichung der Kraftlinien für einen kleinen geradlinigen Magneten NS (Fig. 83), welcher in der Längsrichtung mit der Intensität J magnetisirt ist. S sei der Südpol, N sei der Nordpol. In den ebenen Endflächen S und N, deren Grösse dA sei, ist freier Magnetismus vorhanden; am Nordende $J.dA$, am Südende $-J.dA$. Die Mitte des Magneten sei der Coordinatenanfangspunkt, die x-Axe falle mit der Längsrichtung des Magneten zusammen. Auf einen

Punkt P, dessen Coordinaten x und y sind, wirkt eine magnetische Kraft, deren Componenten α und β bestimmt werden

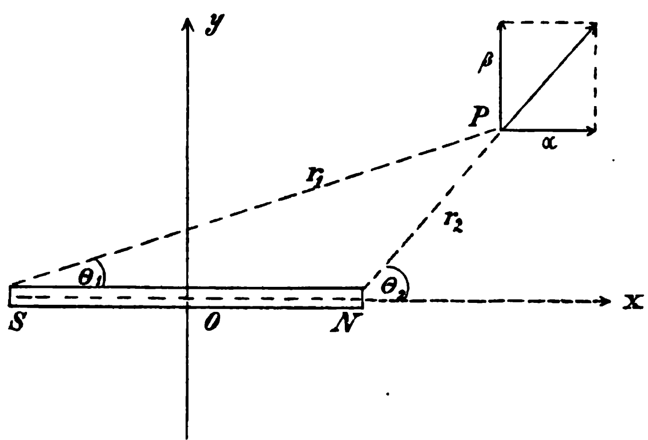


Fig. 83.

sollen. $2l$ sei die Länge des Magneten, ferner sei $PS = r_1$, $PN = r_2$ und $J.dA = q$, so haben wir

$$\alpha = q.(x-l)/r_2^3 - q.(x+l)/r_1^3, \quad \beta = q.y/r_2^3 - q.y/r_1^3$$

Sind dx und dy die Projectionen eines Elementes der Kraftlinien, so haben wir

$$dy/dx = \beta/\alpha$$

oder

$$\text{(a)}\quad (x-l)/r_2^3.dy - (x+l)/r_1^3.dy = y/r_2^3.dx - y/r_1^3.dx.$$

Setzen wir $\sphericalangle PSx = \Theta_1$ und $\sphericalangle PNx = \Theta_2$, so ist

$$\cos\Theta_1 = (x+l)/r_1 \text{ und } \cos\Theta_2 = (x-l)/r_2.$$

Erhalten x und y bezw. den Zuwachs dx und dy, so erhält $\cos\Theta$ den Zuwachs $d\cos\Theta$, und es ist

$$d\cos\Theta_1 = \left(1/r_1 - (x+l)^2/r_1^3\right)dx - (x+l)y/r_1^3.dy$$
$$= y^2/r_1^3.dx - (x+l)y/r_1^3.dy.$$

In derselben Weise ergiebt sich

$$d\cos\Theta_2 = y^2/r_2^3.dx - (x-l)y/r_2^3.dy.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (a) wird

$$d(\cos\Theta_1 - \cos\Theta_2) = 0$$

oder, wenn mit c eine Constante bezeichnet wird

$$\cos\Theta_1 - \cos\Theta_2 = c.$$

Dieses ist die Gleichung für die Kraftlinien.

§ 76. **Die magnetische Induction.**

Die Componenten der magnetischen Induction sind

$$a = \alpha + 4\pi A, \quad b = \beta + 4\pi B, \quad c = \gamma + 4\pi C.$$

Werden a, b und c als Stromcomponenten betrachtet, so haben sie mit den Strömungscomponenten einer incompressiblen Flüssigkeit eine Eigenschaft [vergl. § 41 (e)] gemeinsam, indem

$$\partial a / \partial x + \partial b / \partial y + \partial c / \partial z = 0,$$

oder, was dasselbe aussagt,

$$\int (a\,l + b\,m + c\,n)\,d\,S = 0.$$

Ist $\mathfrak{B}$ die Resultante von a, b, c und ist ε der Winkel zwischen $\mathfrak{B}$ und der Normalen auf dem Oberflächenelemente $d\,S$ der geschlossenen Fläche S, so haben wir

$$\int \mathfrak{B} \,.\, \cos\varepsilon \,.\, d\,S = 0.$$

$E\,F = d\,S$ (Fig. 84) sei ein Element der Oberfläche des Magneten und auf $d\,S$ sei der Magnetismus $\sigma . d\,S$ vorhanden. Die Induction ausserhalb EF in der Richtung $E\,E'$ sei $\mathfrak{B}_a$ und innerhalb der Oberfläche in derselben Richtung $\mathfrak{B}_i$. Auf dem Umfange des Elementes $E\,F$ werden Lothe errichtet, und wir legen die Flächen $E'F'$ und $E''F''$ parallel zu $E\,F$, dann ist

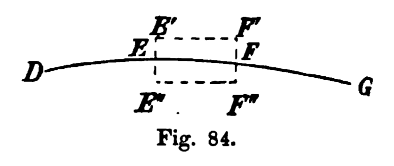


Fig. 84.

$$(\mathfrak{B}_i - \mathfrak{B}_a) \,.\, d\,S = 0 \text{ oder } \mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_a.$$

Ausserhalb der Oberfläche ist $\mathfrak{B}_a$ gleich der magnetischen Kraft in der Richtung $E\,E'$; dieselbe wird, wenn das Potential ausserhalb der Oberfläche V_a und die Normale $E\,E'$ gleich $d\,\nu_a$ ist,

$$\mathfrak{B}_a = -\,\partial\,V_a / \partial\,\nu_a.$$

V_i sei das Potential innerhalb der Fläche. Die Induction $\mathfrak{B}_i$ ist dann nach § 74

$$\mathfrak{B}_i = \partial V_i / \partial v_i + 4 \pi \sigma,$$

und also haben wir

$$\partial V_i / \partial v_i + \partial V_a / \partial v_a + 4 \pi \sigma = 0.$$

Dieses ist dieselbe Gleichung wie § 69 (i). Ist der betrachtete Körper ein Stück Eisen mit der Magnetisirungsconstanten k, so haben wir

$$A = k \alpha, \quad B = k \beta, \quad C = k \gamma, \quad \mu = 1 + 4 \pi k,$$

$$a = \mu \alpha, \quad b = \mu \beta, \quad c = \mu \gamma.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$\partial a / \partial x + \partial b / \partial y + \partial c / \partial z = \mu . \nabla^2 V_i = 0$$

im Innern des Eisen ist. Dort ist also kein freier Magnetismus vorhanden. Die magnetische Induction hat in senkrechter Richtung zur Oberfläche auf beiden Seiten derselben den gleichen Werth, d. h. wir haben [vergl. § 73 (c)]

$$\mu \partial (U_i + V) / \partial v_i = - \partial (U_a + V) / \partial v_a.$$

Die Grösse μ, welche das Verhältniss der magnetischen Induction zur magnetischen Kraft angiebt, kann als *magnetische inductive Capacität (magnetische Permeabilität)* bezeichnet werden. Der *Inductionscoefficient* oder die *Magnetisirungsconstante* μ ist gleich Eins im leeren Raume, dort ist $k = 0$; für die *paramagnetischen* Körper ist $\mu > 1$, für die *diamagnetischen* Körper ist $\mu < 1$.

§ 77. **Magnetische Lamellen.**

Eine dünne Stahlplatte sei so magnetisirt, dass die eine Seitenfläche Süd-, die andere Nordmagnetismus hat. In einem beliebigen Punkte A in der Seitenfläche N (Fig. 85) sei eine Normale construirt, welche die Fläche S in B schneide. Die Magnetisirung sei von der Beschaffenheit, dass $-\sigma$ die Oberflächendichte des Magnetismus im Punkte B ist und $+\sigma$ die Oberflächendichte in A. Wir setzen $AB = e$ und nennen $\sigma e = \Phi$ das *Moment der Fläche* an der betrachteten Stelle. Ist die Dicke der Platte unendlich klein, während die Ober-

flächendichte unendlich gross ist, so hat Φ einen endlichen Werth, und wir haben eine magnetische „*Lamelle*".

Das Potential einer solchen Lamelle kann in folgender Weise ausgedrückt werden. LM (Fig. 86) sei die Lamelle, dS ein Flächenelement auf der positiven Seite der Fläche,

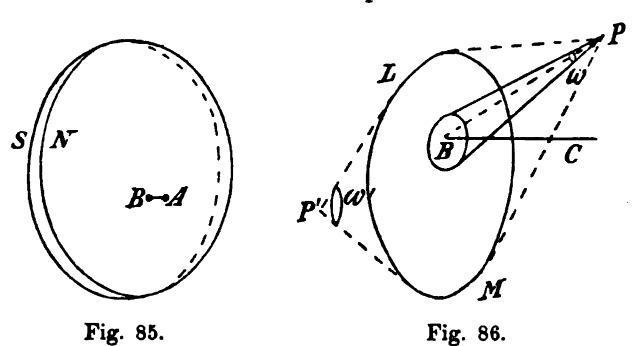


Fig. 85. Fig. 86.

BC sei die Normale zu diesem Flächenelement und P der Punkt, für welchen das Potential bestimmt werden soll. Der Winkel zwischen BC und BP werde mit ε bezeichnet. Der von dS begrenzte Theil der Lamelle ergiebt nach § 69 im Punkte P das Potential

$$dV = \sigma \, . \, dS \, . \, e \, . \cos \varepsilon \, / \, r^2.$$

Wir haben demnach

$$\text{(a)} \qquad V = \Phi \, . \int\!\!\int \cos \varepsilon \, . \, dS \, / \, r^2,$$

wo das Integral über die ganze Fläche zu erstrecken ist, bei einer Lamelle von durchweg constantem Momente. Wird der räumliche Winkel, welcher durch P und dS bestimmt ist, $d\omega$ genannt, so ist

$$dS \, . \cos \varepsilon = r^2 \, d\omega,$$

wenn $BP = r$ gesetzt wird.

Also wird

$$dV = \sigma . \, e . \, d\omega = \Phi . \, d\omega$$

und demnach

$$\text{(b)} \qquad V = \Phi \, . \, \omega,$$

wo ω der *räumliche Winkel* ist, unter welchem von P aus die Lamelle erscheint. ω können wir auch als *scheinbare Grösse der Lamelle* im Punkte P bezeichnen.

Läge der Punkt, für welchen das Potential bestimmt werden soll, auf der entgegengesetzten Seite der Fläche, etwa in P' und ist dann ω' der durch P' und die Begrenzung der Lamelle bestimmte räumliche Winkel, so haben wir

$$V' = -\Phi . \omega'.$$

Nähern sich die Punkte P und P' der Lamelle bis sie zuletzt unendlich nahe bei einander, aber auf entgegengesetzten Seiten der Lamelle liegen, so ist

$$V' = -\Phi . (4\pi - \omega), \tag{c}$$

da 4π die gesammte Winkelöffnung um einen Punkt herum ist. Also haben wir

$$V - V' = 4\pi . \Phi.$$

Ist PQP' (Fig. 87) eine Curve, welche die Lamelle nicht schneidet und deren Endpunkte unendlich nahe bei einander auf entgegengesetzten Seiten der Lamelle liegen, so ist die Arbeit der magnetischen Kräfte, welche zur Ueberführung eines Poles mit der Einheit des Magnetismus auf dem Wege PQP' erforderlich ist, gleich $4\pi\Phi$. Dieser Satz gilt auch dann, wenn Magneten vorhanden sind, welche auf den Pol wirken mit Kräften, die ein eindeutiges Potential haben. Die Arbeit, welche die von den Magneten herrührenden Kräfte bei der Bewegung des Einheitspoles in der Curve PQP' leisten, ist Null; denn die Curve PQP' kann als geschlossene Curve betrachtet werden, da P und P' unendlich benachbarte Punkte sind.

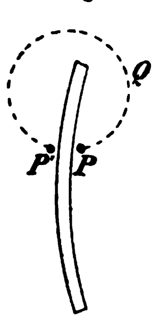


Fig. 87.

Nachdem wir einen Ausdruck für das Potential einer magnetischen Lamelle erhalten haben, bestimmen wir die Kraft, mit welcher die Lamelle auf einen Magnetpol mit der Einheit des Magnetismus wirkt. Die Normale der Lamelle bilde mit den Axen Winkel, deren Cosinus l, m, n sind; ein Punkt in der Lamelle habe die Coordinaten ξ, η, ζ, und der Punkt ausserhalb der Lamelle, für welchen das Potential berechnet werden soll, habe die Coordinaten x, y, z. Wir haben dann

$$\cos \varepsilon = l.(x-\xi)/r + m.(y-\eta)/r + n.(z-\zeta)/r,$$

wo

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

ist. Nach der Gleichung (a) ist das Potential

$$V = \Phi.\int\int [(x-\xi).l + (y-\eta)m + (z-\zeta)n]/r^3.dS.$$

Da

$$\partial r^{-1}/\partial \xi = (x-\xi)/r^3$$

ist, so erhalten wir

$$V = \Phi\int\int (l.\partial r^{-1}/\partial \xi + m.\partial r^{-1}/\partial \eta + n.\partial r^{-1}/\partial \zeta) dS.$$

Die Componente der magnetischen Kraft in der Richtung der x-Axe sei α; es ist dann

$$\text{(d)} \qquad \alpha = -\partial V/\partial x$$

und

$$\alpha = +\Phi.\int\int (l.\partial^2 r^{-1}/\partial \xi^2 + m.\partial^2 r^{-1}/\partial \xi \partial \eta + n.\partial^2 r^{-1}/\partial \xi \partial \zeta) dS,$$

weil

$$\partial r^{-1}/\partial x = -\partial r^{-1}/\partial \xi$$

ist. Wenn die Lamelle nicht durch den Punkt x, y, z geht, so wird r niemals Null und wir haben dann

$$\partial^2 r^{-1}/\partial \xi^2 + \partial^2 r^{-1}/\partial \eta^2 + \partial^2 r^{-1}/\partial \zeta^2 = 0,$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{aligned} &\alpha = +\Phi.\int\int [m.\partial^2 r^{-1}/\partial \eta \partial \xi \\ &+ n.\partial^2 r^{-1}/\partial \zeta \partial \xi - l(\partial^2 r^{-1}/\partial \eta^2 + \partial^2 r^{-1}/\partial \zeta^2)] dS. \end{aligned} \right.$$

Nach dem Theorem § 6 (f) ist

$$\text{(f)} \left\{ \begin{aligned} &\int (X.d\xi/ds + Y.d\eta/ds + Z.d\zeta/ds) ds \\ &= \int\int [l(\partial Z/\partial \eta - \partial Y/\partial \zeta) + m(\partial X/\partial \zeta - \partial Z/\partial \xi) \\ &\qquad + n(\partial Y/\partial \xi - \partial X/\partial \eta)] dS. \end{aligned} \right.$$

Wir setzen

$$X = 0, \quad Y = +\Phi.\partial r^{-1}/\partial \zeta, \quad Z = -\Phi.\partial r^{-1}/\partial \eta,$$

wodurch die rechten Seiten der Gleichungen (e) und (f) identisch werden und erhalten

$$\text{(g)} \quad \alpha = \Phi.\int \partial r^{-1}/\partial \zeta.d\eta/ds - \partial r^{-1}/\partial \eta.d\zeta/ds) ds.$$

Analoge Ausdrücke gelten für β und γ. Durch Ausführung der Differentiation ergiebt sich

(h) $\alpha = \Phi . \int [(z - \zeta) / r^3 . d\eta / ds - (y - \eta) / r^3 . d\zeta / ds] ds.$

Durch die Randcurve und das Moment der magnetischen Lamelle ist also die Kraft bestimmt. Dieses ergiebt sich schon aus dem Umstande, dass das Potential durch den räumlichen Winkel und durch das Moment der Lamelle bestimmt ist.

Um die geometrische Bedeutung der Gleichung (h) zu finden, stellen wir folgende Betrachtung an. Der Punkt O (Fig. 88) habe die Coordinaten ξ, η, ζ; Oy und Oz seien bezw. die Richtungen der y- und z-Axe. Das Element ds sei der z-Axe parallel und dargestellt durch $OA = d\zeta$; es ist also $d\eta = 0$. Der Punkt P, für den das Potential gesucht wird, liege in yz-Ebene, und es sei $OP = r$. Wir setzen $AOP = \Theta$ und haben $y - \eta = r . \sin \Theta$. Die von $ds = OA$ ausgehende magnetische Kraft ist

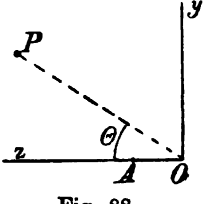


Fig. 88.

(i) $$\alpha = - \Phi . ds . \sin \Theta / r^2;$$

sie steht senkrecht zur yz-Ebene. Die Richtung der Kraft kann folgendermaassen bestimmt werden. *Hält man die rechte Hand in der Richtung von ds, so dass die innere Handfläche gegen den Pol P gekehrt ist, so giebt die Richtung des Daumens die Kraftrichtung an.*

Zum Schlusse bestimmen wir die Arbeit, welche erforderlich ist, um eine magnetische Lamelle vom unendlich fernen Punkte nach einer Stelle zu bringen, wo das magnetische Potential gleich V ist. Die Lamelle sei in Elemente dS zerlegt. Um das mit dem Südmagnetismus $\sigma . dS$ belegte Flächenelement an die betrachtete Stelle zu bringen, ist die Arbeit $- \sigma . dS . V$ erforderlich. Um das zugehörige nordmagnetische Flächenelement an seine Stelle zu schaffen, ist die Arbeit

$$(V + dV / d\nu . e) \sigma . dS$$

nöthig, wenn mit ν die Normale zum Flächenelement dS bezeichnet wird. Demnach ist die gesuchte Arbeit

$$A = \int\int dV / d\nu . e\sigma . dS = \Phi . \int\int dV / d\nu . dS.$$

Da nun

$$dV/d\nu = -(l\alpha + m\beta + n\gamma)$$

ist, so erhalten wir für die gesuchte Arbeit

$$A = -\Phi.\int\int(l\alpha + m\beta + n\gamma)\,dS.$$

Ist N die von der Randcurve der Lamelle umschlossene Zahl der Kraftlinien, so ergiebt sich

$$A = -\Phi.N.$$

Neunter Abschnitt.

Electromagnetismus.

§ 78. Das Gesetz von Biot und Savart.

Oersted fand, dass der electrische Strom eine Wirkung auf den Magneten ausübt; die Gesetze für die magnetische Kraft, welche von einem electrischen Strome ausgeht, sind von Biot und Savart gefunden. AB (Fig. 89) sei ein Leiter, der von einem Strome durchflossen wird, welcher durch die in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt fliessende Electricitätsmenge gemessen wird. Im Punkte P sei die magnetische Masse μ vorhanden, und der Stromleiter AB sei in unendlich kleine Theile ds zerlegt. Ist $CD = ds$ ein unendlich kleiner Theil des Stromleiters, $CP = r$ und Θ der Winkel zwischen r und der Stromrichtung in CD, so steht die Richtung der Kraft senkrecht zu der durch r und ds bestimmten Ebene. *Bringt man die rechte Hand in die Richtung des Stromes und kehrt die innere Handfläche nach dem Magnetpol, so ist die Richtung der*

Fig. 89.

Kraft, welche das Stromelement auf den Pol ausübt, durch die Richtung des Daumens gegeben. Die Grösse der Kraft K ist

(a) $$K = \mu . i . ds / r^2 . \sin \Theta.$$

Die magnetische Kraft, welche von einem beliebigen Systeme electrischer Ströme ausgeht, deren Richtung, Stärke und Lage im Raume bekannt sind, kann nach (a) berechnet werden.

Bildet der Strom einen *geschlossenen Kreislauf*, und ist die Intensität des Stromes in allen Punkten des Leiters dieselbe, so können wir die Kraft, welche vom Strome ausgeht und auch das Potential, welches der Strom hervorbringt, bestimmen. Die vom Stromelemente ausgehende Kraft ist derjenigen gleich, die ein Element von derselben Länge ausübt, das der Randcurve einer magnetischen Lamelle angehört, deren Moment der Stromstärke gleich ist. Dieses ergiebt sich aus der Vergleichung der Formeln (a) und § 77 (i).

Das Potential V eines geschlossenen Stromes von der Stärke i ist nach § 77 (b) in einem Punkte P

(b) $$V = i\omega,$$

wenn ω der *räumliche Winkel* ist, unter dem von P aus der Stromkreis gesehen wird. Sind α, β, γ die Componenten der in P wirkenden magnetischen Kraft, so haben wir nach § 77 (h)

(c) $$\begin{cases} \alpha = i . \int \left((z - \zeta) / r^3 . d\eta / ds - (y - \eta) / r^3 . d\zeta / ds\right) ds, \\ \beta = i . \int \left((x - \xi) / r^3 . d\zeta / ds - (z - \zeta) / r^3 . d\xi / ds\right) ds, \\ \gamma = i . \int \left((y - \eta) / r^3 . d\xi / ds - (x - \xi) / r^3 . d\eta / ds\right) ds. \end{cases}$$

Ist ABC (Fig. 90) ein Leiter, welchen ein Strom i in der durch den Pfeil angegebenen Richtung durchfliesst und umkreist ein Pol mit der magnetischen Masse 1 den Strom in der Richtung, welche durch Anlegen der rechten Hand in der früher angegebenen Weise gefunden wird, so ist nach (b) die von den magnetischen Kräften beim Durchlaufen der Bahn $DFED$ geleistete Arbeit $4\pi i$. Umkreist eine solche Bahn mehrere Ströme i, i', i'' u. s. w., so leisten die von den Strömen ausgehenden magnetischen Kräfte bei der betrachteten Bewegung die Arbeit A

(d) $$A = 4\pi(i + i' + i'' + \ldots),$$

wobei die Ströme, welche in entgegengesetzter Richtung fliessen, negativ zu rechnen sind. Demnach ist das Potential, welches ein electrischer Strom in einem Punkte F hervorbringt, nicht allein durch die Lage des Punktes F bestimmt. Bringt man einen Pol mit der Einheit des Magnetismus vom unendlich fernen Punkte auf der Bahn GF nach F (Fig. 90), so wird die Arbeit V geleistet, welche das Potential im Punkte F angiebt. Umkreist der Pol dann den Strom auf der Bahn $FEDF$, so wird die Arbeit $4\pi i$ geleistet, und das Potential in F ist jetzt $V + 4\pi i$. Wenn der Pol n mal den Strom in derselben Weise umkreist hat, so ist das Potential in F gleich $V + 4\pi n i$. Demnach hat das Potential im Punkte F unendlich viele Werthe, die Differentialquotienten des Potentials in Bezug auf x, y, z sind jedoch vollständig bestimmt.

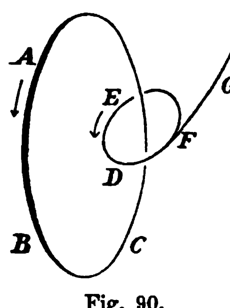


Fig. 90.

Umläuft ein Pol mit der magnetischen Masse μ einmal den Strom, so ist die dabei geleistete Arbeit $4\pi i\mu$; umkreist ein ganzer Magnet einmal den Strom und kehrt derselbe zu seiner Anfangslage zurück, so ist die geleistete Arbeit $4\pi i\Sigma\mu$, wo $\Sigma\mu$ die Summe des Magnetismus im Magneten bezeichnet. Da aber für jeden Magneten $\Sigma\mu = 0$ ist, so ist die geleistete Arbeit in dem letzten Falle gleich Null.

Da ein electrischer Strom durch eine magnetische Lamelle ersetzt wird, so können wir das magnetische Moment eines unendlich kleinen geschlossenen Stromes angeben. Ist i die Stromstärke, so hat die entsprechende Lamelle das Moment $\sigma e = i$. dS sei die Fläche der Lamelle, so haben wir

$$i \, . \, dS = \sigma e \, . \, dS.$$

σdS ist die magnetische Masse auf der einen Seite der Lamelle, e ist der Abstand der Flächen. Demnach ist das magnetische Moment des Stromes gleich dem Producte aus der Stromstärke und der vom Strome umlaufenen Fläche.

§ 79. Stromsysteme.

Ein Stromleiter sei um einen *Cylinder* gewickelt, so dass die Abstände der einzelnen Windungen gleich sind. Wir bestimmen näherungsweise die magnetische Wirkung des Systems auf folgende Weise. Ist L die Länge des Cylinders, N die Anzahl der Windungen und i die Stromstärke, so ist der über der Längeneinheit des Cylinders fliessende Strom Ni/L, und also der über der Strecke dx fliessende $Ni.dx/L$. Ein Theil des Cylinders von der Länge dx kann durch eine magnetische Lamelle von der Dicke dx und der Oberflächendichte σ ersetzt werden, wenn

(a) $$\sigma . dx = Ni . dx / L \text{ und } \sigma = Ni / L$$

ist. Wird dieses für die ganze Länge des Cylinders ausgeführt, so heben sich überall die Wirkungen der positiven und negativen Belegungen auf, mit Ausnahme der Endflächen des Cylinders. Fliesst der Strom in der in Fig. 91 angedeuteten Weise, so erhält A negativen und B positiven Magnetismus. Das betrachtete Stromsystem pflegt man als *Solenoid* zu bezeichnen. Ausserhalb des Cylinders wirken nur die von den Polen A und B ausgehenden magnetischen Kräfte. Ist die Länge des Solenoids gross im Verhältniss zum Durchmesser, so verschwindet die magnetische Kraft in der Nähe der Mitte ausserhalb der Windungen. Die Kraft im Innern des Solenoids wird folgendermaassen bestimmt. Die Gerade CD (Fig. 91) sei parallel der Axe des Solenoids, CF und DE seien senkrecht zur Oberfläche desselben, und die Gerade FE sei parallel mit CD. Wir setzen voraus, dass die magnetische Kraft γ im Innern des Solenoids der Axe desselben parallel, und dass ausserhalb desselben keine magnetische Kraft wirkt. Ein Pol mit der magnetischen Masse Eins durchlaufe die geschlossene Bahn $CDEF$. Die von den magnetischen Kräften geleistete Arbeit ist $\gamma . dx$, wenn $CD = dx$ gesetzt wird. Nach § 78 (d) haben wir

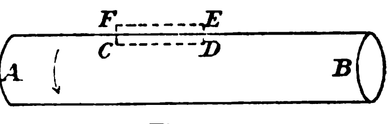


Fig. 91.

(b) $$\gamma . dx = 4\pi . Ni . dx / L, \quad \gamma = 4\pi Ni / L.$$

Bezeichnen wir die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit mit N_1, so ist

$$\gamma = 4\pi N_1 i,$$

d. h. *die magnetische Kraft* (Anzahl der Kraftlinien pro Quadratcentimeter) *im Innern des Solenoids, und zwar nahe der Mitte desselben, wird bestimmt durch das Product aus der Stromstärke* i *in die Zahl* N_1 *der Windungen pro Längeneinheit des Solenoids.*

Wir wollen jetzt die magnetische Kraft im Innern einer Kugel bestimmen, auf dessen Oberfläche ein Stromleiter gewickelt ist. Auf eine *Kugel* vom Radius R wird ein Stromleiter gewickelt, so dass die Ebenen der Windungen parallel sind und den Abstand a von einander haben. $ABCD$ und $EFGH$ (Fig. 92) seien zwei der Windungen. Ist die Stromstärke i, so kann die einzelne Windung durch eine magnetische Lamelle mit der Oberflächendichte s ersetzt werden, in dem $as = i$ ist. Die Wirkung der positiven Belegung auf der Fläche BC wird fast aufgehoben durch die Wirkung der negativen Belegung auf der Fläche EH; es bleibt nur die Wirkung des Kreisringgebietes mit der Breite BE übrig. Der in diesem Gebiete vorhandene Magnetismus sei mit der Dichte σ auf der Kugelzone $BFGC$ ausgebreitet. Wir haben $BE . s = BF . \sigma$ oder

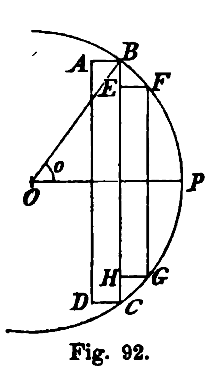


Fig. 92.

$$\sigma / s = BE / BF = \cos\Theta,$$

wenn Θ der Winkel zwischen dem Radius OB und der zur Ebene der Windungen senkrechten Linie OP ist. Demnach wird

$$\sigma = i / a . \cos\Theta.$$

Nach § 70 (f) wirkt im Innern der Kugel die magnetische Kraft

$$F = -\tfrac{4}{3}\pi i / a,$$

indem i/a die Intensität J der Magnetisirung angiebt.

Sind N Windungen vorhanden, so haben wir

$$F = -\tfrac{2}{3}\pi . Ni / R,$$

d. h. *die Kraft im Innern der Kugel ist direct proportional dem Producte aus der Stromstärke i in die Windungszahl N und umgekehrt proportional dem Radius R der Kugel.* Zu demselben Resultate kommen wir auch, wenn wir uns daran erinnern, dass die Kugel sich wie ein mit der Intensität $J = i/a$ magnetisirter Eisenkörper verhält.

Auf diesem Wege kann man ein fast constantes magnetisches Feld herstellen, welches bei der Construction der Messinstrumente zur Bestimmung der electrischen Stromstärke Anwendung finden kann.

Bildet das Solenoid einen *geschlossenen Ring*, so erhalten wir ein Strömungssystem, welches sehr häufig Anwendung findet. AB (Fig. 93) sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte O und mit dem Radius r; der Mittelpunkt O habe von der Geraden CD, welche in der Ebene des Kreises liegt, den Abstand R. Rotirt der Kreis um die Axe CD, so beschreibt er eine ringförmige Oberfläche. Auf dem Ringe befinden sich N Windungen aus Kupferdraht, durch welchen der Strom i fliesst. Wir ersetzen die einzelnen Windungen durch magnetische Lamellen und bestimmen die magnetische Kraft im Innern des Ringes. Einfacher gelangen wir jedoch zum Resultate, wenn wir einen Einheitspol auf einem Kreise mit dem Radius R sich um die Axe CD bewegen lassen. Die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$, welche im Innern des Ringes wirkt, leistet dann die Arbeit $2\pi R\mathfrak{H}$, wenn der Einheitspol einen Umlauf ausgeführt hat. Diese Arbeit ist aber gleich $4\pi Ni$, wenn die Kreisbahn des Poles im Innern des Ringes liegt; die Arbeit ist aber gleich Null, wenn die Bahn ausserhalb des Ringes liegt.

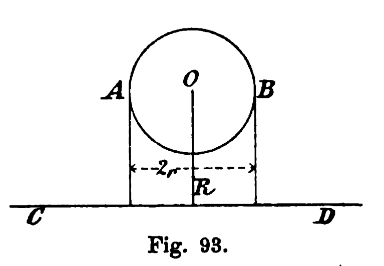


Fig. 93.

Im ersteren Falle haben wir also

$$2\pi R\mathfrak{H} = 4\pi Ni$$

und

$$\mathfrak{H} = 2Ni/R,$$

während im letzteren Falle $\mathfrak{H} = 0$ ist.

§ 80. Die electromagnetischen Grundgleichungen.

Bislang haben wir die Bahn des electrischen Strom geometrische Linie betrachtet, in Wirklichkeit erfüllt de jederzeit einen Raum. Immerhin wird der Strom durch Componenten nach den Coordinatenaxen bestimmt. Ist $dy.dz$ ein zur x-Axe senkrechtes Flächenelement, und durch dasselbe in der Zeit dt die Electricitätsmenge $u.dy.d$ in positiver Richtung, so ist u die Stromcomponente nac Richtung der x-Axe. Die Stromcomponenten nach den tungen der beiden anderen Axen werden mit v und w zeichnet. Werden durch den Punkt O (Fig. 94), dessen dinaten x, y, z sind, Oy und Oz paralle entsprechenden Coordinatenaxen gez und wird das Rechteck $OBDC$ const dessen Seiten dy und dz sind, so fliess Strom $u.dy.dz$ durch das Element OB Werden die Componenten der magnetis Kraft mit α, β, γ bezeichnet und be sich ein Pol mit der magnetischen Mas um das Rechteck in der Richtung OBD so ist die von den magnetischen Kräften geleistete Arbeit

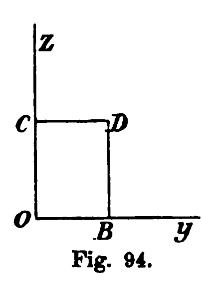


Fig. 94.

$$\beta.dy + (\gamma + \partial\gamma/\partial y.dy).dz - (\beta + \partial\beta/\partial z.dz).dy - \gamma.d$$
$$= (\partial\gamma/\partial y - \partial\beta/\partial z).dy.dz.$$

Diese Arbeit ist nach § 78 (d) gleich $4\pi.u.dy.dz$. Demn erhalten wir die Gleichungen

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 4\pi u = (\partial\gamma/\partial y - \partial\beta/\partial z), \quad 4\pi v = (\partial\alpha/\partial z - \partial\gamma/\partial x), \\ 4\pi w = (\partial\beta/\partial x - \partial\alpha/\partial y). \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist der Strom durch die magneti Kraft bestimmt. In einem stromlosen Gebiete haben wir $u =$ $v = 0$, $w = 0$, also

$$\partial\gamma/\partial y = \partial\beta/\partial z, \quad \partial\alpha/\partial z = \partial\gamma/\partial x, \quad \partial\beta/\partial x = \partial\alpha/\partial y$$

oder

$$\alpha.dx + \beta.dy + \gamma.dz = -d\Gamma.$$

Ist also kein Strom vorhanden, so haben die magnetischen Kr ein Potential. In diesem Falle rühren die Kräfte Magneten her.

Nach den Formeln (a) ist die magnetische Kraft durch lie Strömungscomponenten allein nicht bestimmt. Sind u, v, w gegeben und α, β, γ so bestimmt, dass die Gleichungen (a) erfüllt sind, so werden diese Gleichungen auch befriedigt, wenn vir an Stelle von α, β, γ

$$\alpha' = \alpha + \partial V / \partial x, \quad \beta' = \beta + \partial V / \partial y, \quad \gamma' = \gamma + \partial V / \partial z$$

etzen, wo V eine willkürliche Function ist. V ist das Potential der im Raume vorhandenen Magnete.

Wir fügen einige einfache Beispiele hinzu:

a) Die Richtung der magnetischen Kraft sei der z-Axe parallel, nd ihre Grösse sei eine Function es Abstandes r von dieser Axe Fig. 95). Wir erhalten dann aus er Gleichung (a)

$$4\pi u = + d\gamma / dr . y / r,$$

$$4\pi v = - d\gamma / dr . x / r, \quad w = 0.$$

Fig. 95.

er Strom ist der x-y-Ebene parallel und senkrecht zu r. Die Stromstärke J ist

$$J = u \cos (u J) + v \cos (v J),$$

$$J = - u . y / r + v . x / r = - 1 / 4\pi . d\gamma / dr.$$

γ innerhalb eines Cylinders mit dem Radius $OA = r_1$ g. 95) constant, und ausserhalb eines Cylinders mit dem dius r_2 gleich Null, so ist die Stromstärke für die Längenheit des Cylinders

$$\int_{r_1}^{r_2} J . dr = - 1 / 4\pi . \int_{r_1}^{r_2} d\gamma / dr . dr = \gamma / 4\pi,$$

s mit § 79 (b) übereinstimmt.

b) Ist die Stromstärke gegeben, so kann man durch Integration der Gleichungen (a) die magnetische Kraft finden. ınd v seien Null und w sei eine Function des Abstandes r der z-Axe. Wir haben dann nach (a)

$$0 = \partial\gamma / \partial y - \partial\beta / \partial z, \quad 0 = \partial\alpha / \partial z - \partial\gamma / \partial x,$$

$$4\pi w = \partial\beta / \partial x - \partial\alpha / \partial y.$$

Die Gleichungen sind erfüllt bei der Annahme, dass $\gamma = 0$ ist und ferner α und β Functionen von x und y allein sind. Die magnetische Kraft sei zerlegt in zwei Componenten, von denen die eine R in der Richtung der Verlängerung von r wirkt, die andere S senkrecht zu r steht. Es ist dann

$$\alpha = R.x/r - S.y/r, \quad \beta = R.y/r + S.x/r$$

und also

$$4\pi w = dS/dr + S/r = 1/r.d(Sr)/dr.$$

Ist der Stromleiter ein von zwei coaxialen Cylindern begrenztes Rohr mit den Radien R_1 und R_2, und ist w constant im Leiter, so haben wir, wenn C_1, C_2, C_3 constante Grössen sind,

$$S_1 r = C_1, \quad 2\pi w r^2 + C_2 = S_2 r, \quad S_3 r = C_3.$$

Die erste dieser Gleichungen gilt für den Hohlraum, die zweite für den Leiter und die dritte ausserhalb des Leiters. S_1 muss nach der Natur der Aufgabe in der Axe einen endlichen Werth haben; es ist also $C_1 = 0$. Da die magnetische Kraft sich continuirlich ändert, so ist $S_2 = 0$ für $r = R_1$ und wir haben also

$$C_2 = -2\pi w R_1^2, \quad S_2 = 2\pi w r - 2\pi w R_1^2/r.$$

Für $r = R_2$ haben wir $S_2 = S_3$ und also

$$C_3/R_2 = 2\pi w R_2 - 2\pi w R_1^2/R_2,$$
$$S_3 = 2\pi w(R_2^2 - R_1^2)/r.$$

Da $\pi w(R_2^2 - R_1^2)$ gleich der ganzen Stromstärke i im Leiter ist, so haben wir

$$S_3 = 2i/r.$$

Ein unendlich langer geradliniger Strom übt also eine magnetische Kraft aus, welche dem Abstande des betrachteten Punktes von der Stromlinie umgekehrt proportional ist.

§ 81. Die Stromsysteme im Allgemeinen.

Zwischen den Stromcomponenten und den Componenten der magnetischen Kraft bestehen nach § 80 (a) die Gleichungen

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 4\pi u = \partial\gamma/\partial y - \partial\beta/\partial z, \quad 4\pi v = \partial\alpha/\partial z - \partial\gamma/\partial x, \\ 4\pi w = \partial\beta/\partial x - \partial\alpha/\partial y. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass

(b) $$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$$

ist. Diese Gleichung stimmt mit der *Continuitätsgleichung* in der Mechanik überein und sagt aus, *dass die ganze in einem geschlossenen Raume enthaltene Electricitätsmenge eine unveränderliche Grösse ist.* Aus (b) ergiebt sich, dass *der Strom, dessen Componenten u, v, w sind, sich wie eine incompressible Flüssigkeit bewegt.* Eine Aufhäufung der Electricität kann also nicht stattfinden, dieselbe kann sich nur bewegen. Dieses streitet scheinbar gegen die Erfahrung; um bei unserer Betrachtungsweise stehen zu bleiben, müssen wir mit Faraday annehmen, dass eine *electrische Polarisation* oder eine *electrische Verschiebung* stattfindet, deren Componenten mit f, g, h bezeichnet werden sollen. Erfährt die eine der Componenten, z. B. f, in der Zeit dt den Zuwachs df, so ist $df/dt = \dot{f}$ die Electricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch die zur x-Axe senkrechte Flächeneinheit in Folge der Aenderung der Polarisation hindurchgeht. Sind p, q, r die Componenten des electrischen Stromes, welcher von der Strömung der Electricität durch den Körper herrührt, so haben wir

(c) $$u = p + df/dt, \quad v = q + dg/dt, \quad w = r + dh/dt.$$

u, v, w sind die Componenten des wirklichen electrischen Stromes, welcher sich aus dem vom Körper fortgeleiteten Strome und aus dem von der Aenderung der Polarisation oder der electrischen Verschiebung herrührenden Strome zusammensetzt.

Sind die Stromcomponenten endlich, so ändern sich die magnetischen Kraftcomponenten stetig, wofern keine Magnete in dem betrachteten Raume vorhanden sind. Die zur Oberfläche der Magnete senkrechte Kraftcomponente ist im Allgemeinen discontinuirlich. Wir nehmen an, dass unendlich starke Ströme in Wirklichkeit nicht vorkommen, doch betrachten wir bisweilen die Strömung in einer Fläche; wir müssen dann annehmen, dass die Stromcomponenten in der Fläche unendlich sind. Beim Uebergang von der einen Seite der Fläche zur anderen ändern sich in diesem Falle die mit der Fläche parallelen Kraftcomponenten unstetig. Sind α_1 und α_2 diese

Kraftcomponenten und ist J die Electricitätsmenge, welche durch eine zu den Componenten senkrechte Längeneinheit strömt, so haben wir nach § 78 (d)

(d) $$4\pi J = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Dasselbe ergiebt sich auch aus (a). Wir betrachten zuerst zwei Flächen, deren Gleichungen $z = c_1$ und $z = c_2$ sind und erhalten aus den beiden ersten Gleichungen (a)

$$4\pi.\int_{c_1}^{c_2} u.dz = \int_{c_1}^{c_2} \partial\gamma / \partial y.dz - \beta_2 + \beta_1,$$

$$4\pi.\int_{c_1}^{c_2} v.dz = \alpha_2 - \alpha_1 - \int_{c_1}^{c_2} \partial\gamma / \partial x.dz.$$

β_1 und β_2 sind die Componenten der magnetischen Kraft nach der Richtung der y-Axe zu beiden Seiten der ebenen Fläche; α_2 und α_1 haben ähnliche Bedeutung. Wird $c_2 - c_1 = c$ unendlich klein, ferner u und v unendlich gross, so sind

$$\int_{c_1}^{c_2} u\,dz \text{ und } \int_{c_1}^{c_2} v\,dz$$

die Electricitätsmengen, welche in einer Fläche strömen. Gleichzeitig verschwinden dabei die Integrale auf der rechten Seite, und für die Differenz zwischen den magnetischen Kraftcomponenten auf den entgegengesetzten Seiten der Fläche erhalten wir denselben Werth wie in (d).

§ 82. Die Wirkung electrischer Ströme auf einander.

Die Arbeit, welche erforderlich ist, um zwei von den Strömen i und i' durchflossene Leiter A und B (Fig. 96) einander zu nähern, kann in folgender Weise bestimmt werden. Der Strom A habe eine unveränderliche Lage; während B demselben aus unendlicher Ferne genähert wird. B wird durch eine magnetische Lamelle mit der Oberflächendichte σ und der Dicke e ersetzt. CDE sei eine gerade Linie, welche die Lamelle senkrecht durchschneidet und zwar an der negativen Seite in C, an der positiven in D. Ein Flächenelement dS' in C enthält die magnetische Masse $-\sigma dS'$. V sei das Potential,

welches A in C hervorbringt, so ist die dem Elemente dS' in C entsprechende Arbeit $-V\sigma.dS'$. Setzen wir $CD = d\nu$, so ist die Arbeit, welche dem um D liegenden Elemente dS' entspricht, gleich

$$(V + \partial V/\partial\nu.d\nu).\sigma.dS'.$$

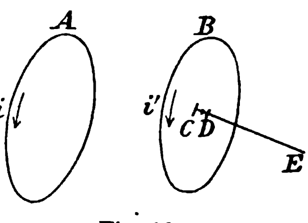


Fig. 96.

Die von dem betrachteten Theile der Lamelle herrührende Arbeit ist demnach $\partial V/\partial\nu.d\nu.\sigma.dS'$. Es ist aber $d\nu.\sigma = i'$, also ist die Arbeit für die ganze Lamelle

(a) $$W = i'.\int\int\partial V/\partial\nu.dS'.$$

Die in der Richtung CE wirkende Kraft ist $-\partial V/\partial\nu$. CE bilde mit den Axen Winkel, deren Cosinus l', m', n' seien, so haben wir

(b) $$W = -i'.\int\int(l'\alpha + m'\beta + n'\gamma)\,dS'.$$

Die Grössen α, β, γ sind in § 78 (c) bestimmt und können in der Form

$$\alpha = i\int(\partial r^{-1}/\partial y.d\zeta/ds - \partial r^{-1}/\partial z.d\eta/ds)\,ds,$$
$$\beta = i\int(\partial r^{-1}/\partial z.d\xi/ds - \partial r^{-1}/\partial x.d\zeta/ds)\,ds,$$
$$\gamma = i\int(\partial r^{-1}/\partial x.d\eta/ds - \partial r^{-1}/\partial y.d\xi/ds)\,ds$$

dargestellt werden.

Nach dem Theorem § 6 (f) ist

$$\int(X.dx/ds' + Y.dy/ds' + Z.dz/ds')\,ds'$$
$$= \int\int[l'(\partial Z/\partial y - \partial Y/\partial z) + m'(\partial X/\partial z - \partial Z/\partial x)$$
$$+ n'(\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y)]\,dS'.$$

Wir setzen nun

$$X = \int ii'/r.d\xi/ds.ds, \quad Y = \int ii'/r.d\eta/ds.ds,$$
$$Z = \int ii'/r.d\zeta/ds.ds$$

und erhalten

$$ii'\int\int(d\xi/ds.dx/ds' + d\eta/ds.dy/ds' + d\zeta/ds.dz/ds')\,ds\,ds'/r$$
$$= \int\int\int ii'[l'(\partial r^{-1}/\partial y.d\zeta/ds - \partial r^{-1}/\partial z.d\eta/ds)$$
$$+ m'(\partial r^{-1}/\partial z.d\xi/ds - \partial r^{-1}/\partial x.d\zeta/ds)$$
$$+ n'(\partial r^{-1}/\partial x.d\eta/ds - \partial r^{-1}/\partial y.d\xi/ds)]\,ds\,dS'$$

oder

$$ii'\int\int(d\xi/ds.dx/ds' + d\eta/ds.dy/ds' + d\zeta/ds.dz/ds')\,ds\,ds'/r$$
$$= \int\int i'(l'\alpha + m'\beta + n'\gamma)\,dS' = -W.$$

Also wird nach (b)

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} W = -ii'\int\int(d\xi/ds.dx/ds' + d\eta/ds.dy/ds' \\ \qquad + d\zeta/ds.dz/ds')\,ds\,ds'/r, \end{cases}$$

wo ds ein Element des einen Leiters, ds' ein Element des anderen Leiters ist.

Wir bezeichnen den Winkel zwischen zwei Elementen ds und ds' mit ε und erhalten F. E. Neumann's Ausdruck für die *potentielle Energie zweier electrischer Ströme*

$$\text{(d)}\qquad W = -ii'.\int\int \cos\varepsilon/r.\,ds\,ds'.$$

Wird die magnetische Kraft, welche senkrecht zu einer willkürlichen durch den Stromkreis B gelegten Fläche ist, mit $\mathfrak{H}'$ bezeichnet, so haben wir nach (a)

$$\text{(e)}\qquad W = -i'.\int\mathfrak{H}'.dS' = -i'N,$$

wenn mit N in der Ausdrucksweise Faraday's die Anzahl der Kraftlinien bezeichnet wird, welche vom Stromleiter umschlossen werden. *Die potentielle Energie eines Stromes ist also gleich dem negativen Producte aus der Stromstärke und der Anzahl der Kraftlinien, welche vom Stromleiter umschlossen werden.* Hieraus folgt, dass ein Strom sich immer so zu bewegen sucht, dass die Zahl der von ihm umschlossenen Kraftlinien möglichst gross wird. Die Kraftlinien verlaufen in der Richtung, in welcher sich ein Nordpol unter der Einwirkung des Stromes bewegt (vergl. § 74). Der vorhin ausgesprochene Satz ist nur bewiesen unter der Voraussetzung, dass die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ von einem anderen Strome ausgeht. Weil aber Ströme und Magnete äquivalent sind, so ist der Satz allgemein gültig. Da die durch den Stromkreis B gelegte Fläche willkürlich gewählt werden kann, so ist die Energie W allein von der Randcurve abhängig.

Die Kraft, welche auf ein Element $AB = ds$ des Stromes ABC (Fig. 97) wirkt, kann folgendermaassen bestimmt werden. Der Leiter ABC bewege sich so, dass AB nach $A'B'$ gelangt, wobei AA' und BB' senkrecht zu AB sein mögen. Ist $AA' = dp$,

so hat die vom Leiter umschlossene Fläche den Zuwachs $ds.dp$ erhalten. Ist die magnetische Kraft in A gleich $\mathfrak{H}$ und bildet ihre Richtung mit der Normalen der Fläche $ABB'A'$ den Winkel α, so ist die zur Fläche normale Componente K der Kraft gleich $K = \mathfrak{H} \cos \alpha$. Der Zuwachs an potentieller Energie für den Stromleiter ist also nach (e)

$$dW = -iK.ds.dp,$$

wenn i die Stromstärke ist. Um die betrachtete Bewegung hervorzubringen, muss also auf ds in der Richtung AA' eine Kraft X wirken, welche bestimmt ist durch

Fig. 97.

$$X.dp = -iK.ds.dp, \quad X = -iK.ds.$$

In der betrachteten Richtung wirkt also auf das Stromelement die Kraft $-iK.ds$ und wird das Stromelement sich selbst überlassen, so ist seine Bewegungsrichtung sowohl senkrecht zur Richtung der magnetischen Kraft als auch senkrecht zu seiner eigenen Richtung. Die Bewegungsrichtung wird durch Anlegen der rechten Hand an den Strom bestimmt (vergl. § 78).

Hieraus folgt ferner, dass die Kraft, welche auf ein Element ds des Stromes i wirkt, senkrecht ist zu der durch den Strom und die Richtung der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ bestimmten Ebene. Wird der Winkel zwischen der Kraftrichtung und Stromrichtung mit φ bezeichnet, so ist die Kraft gleich

$$\mathfrak{H} i.ds.\sin\varphi.$$

§ 83. Das Messen der Stromstärke oder der Electricitätsmenge.

a) *Constante Ströme.*

Zum Messen constanter Ströme wird in der Regel ein Apparat benutzt, welcher aus parallelen kreisförmigen Leitern besteht, durch welche der Strom fliesst, dessen Stärke bestimmt werden soll. Ein Magnet, dessen Dimensionen klein im Verhältniss zum Radius der Windungen sind, ist in der Mitte des Apparates aufgehängt, welcher so aufgestellt wird, dass die Windungen dem magnetischen Meridian parallel sind.

Der Strom ruft eine magnetische Kraft von der Stärke Gi hervor, welche zur Richtung der erdmagnetischen Kraft senkrecht ist, deren Horizontalcomponente mit H bezeichnet wird. G ist von der Construction des Galvanometers abhängig. Ist G constant in dem Raume, in dem sich der Magnet bewegt, so ist der Winkel φ, um welchen der Magnet aus seiner ursprünglichen Ruhelage durch den electrischen Strom gedreht wird, bestimmt durch

(a) $$\operatorname{tg}\varphi = Gi/H, \quad i = H/G . \operatorname{tg}\varphi,$$

d. h. *die Stromstärke ist in dem betrachteten Falle der Tangente des Ablenkungswinkels proportional.*

b) *Variable Ströme.*

Die Stärke sehr kurz dauernder Ströme in jedem Augenblicke zu bestimmen ist sehr schwierig, dagegen ist es leicht, die gesammte Electricitätsmenge Q zu finden, welche durch den Leiter strömt. Das Moment, welches den Magneten um die senkrechte Axe zu drehen sucht, ist nach § 71 (d) $-\mathfrak{M}\alpha \sin\Theta$, wenn $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment des Magneten, α die magnetische Kraft und Θ der Winkel zwischen den Richtungen von $\mathfrak{M}$ und α ist. Setzen wir $\alpha = Gi$, wo G die Constante des Galvanometers ist, und ferner $\Theta = \frac{1}{2}\pi$, so ist die vom Strome auf den Magneten ausgeübte *Directionskraft* gleich $\mathfrak{M}Gi$. Das gesammte Moment, welches der Strom hervorbringt, ist also

$$\int \mathfrak{M}Gi . dt = \mathfrak{M}G . Q,$$

wenn $Q = \int i . dt$ gesetzt wird. Q ist die ganze durch den Leiter in Folge des Stromstosses sich bewegende Electricitätsmenge.

Ist J das Trägheitsmoment des Magneten und ω die Winkelgeschwindigkeit desselben, so ist $J\omega$ das Moment der Bewegungsmenge. Wir erhalten also die Gleichung

(b) $$\mathfrak{M}GQ = J\omega.$$

Wird die Schwingungsdauer des Magneten mit τ bezeichnet, so ist nach § 71 (f)

(c), (d) $$\tau = \pi . \sqrt{J/\mathfrak{M}H} \quad \text{und also} \quad Q = H\tau^2\omega/G\pi^2.$$

Die kinetische Energie $\frac{1}{2} J\omega^2$, welche der Magnet durch den Stromstoss erhalten hat, dreht denselben um den Winkel Θ, wobei die potentielle Energie des Magneten nach § 72 (c) von $-\mathfrak{M}H$ bis $-\mathfrak{M}H\cos\Theta$ wächst; die dabei verbrauchte Arbeit ist $\mathfrak{M}H(1-\cos\Theta)$. Wir haben also

$$\tfrac{1}{2} J\omega^2 = 2\mathfrak{M}H\sin^2(\Theta/2),$$

oder, wenn Θ sehr klein ist,

$$\text{(e)} \qquad \Theta = \tau\omega/\pi \quad \text{und} \quad Q = H\tau/\pi G.\Theta,$$

d. h. *wenn keine Dämpfung stattfindet, so ist für kleine Ablenkungswinkel die durch den Querschnitt der Leitung geflossene Electricitätsmenge dem Ablenkungswinkel proportional.*

c) *Dämpfung.*

Die Ausschläge des Magneten nehmen im Allgemeinen ziemlich schnell ab, wenn Dämpfung stattfindet, welche namentlich von dem Luftwiderstande und der Wirkung der Ströme herrührt, welche durch die Bewegung des Magneten in den benachbarten Conductoren inducirt werden. Findet keine Dämpfung statt, so hat man für sehr kleine Schwingungen nach § 71 (e) und (f)

$$d^2\Theta/dt^2 = -\pi^2/\tau^2.\Theta,$$

wo τ also die Schwingungsdauer ist, wenn keine Dämpfung stattfindet. Die Dämpfung möge der Winkelgeschwindigkeit $d\Theta/dt$ des Magneten proportional sein. Bei Berücksichtigung der Dämpfung haben wir dann zur Bestimmung der Grösse des Ausschlages Θ die Differentialgleichung

$$\text{(f)} \qquad \ddot{\Theta} + 2m\dot{\Theta} + \pi^2/\tau^2.\Theta = 0.$$

Der Factor m hängt ab von der Grösse und Beschaffenheit des schwingenden Magneten, von der Dichte der Luft und von der Grösse, Beschaffenheit und Lage der Metallmassen, in welchen Ströme inducirt werden. Wir setzen $\pi/\tau = n$ und $\Theta = e^{\alpha t}$, so muss

$$\alpha^2 + 2m\alpha + n^2 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = -m \pm \sqrt{n^2 - m^2}\sqrt{-1}$$

sein, indem vorausgesetzt wird, dass $n > m$ ist. Wenn

$$\text{(g)} \qquad n^2 - m^2 = \pi^2/\tau_1^2$$

gesetzt wird, so erhalten wir

$$\Theta = \left(A \sin(\pi t/\tau_1) + B \cos(\pi t/\tau_1)\right) . e^{-mt}.$$

Zur Zeit $t = 0$ sei $\Theta = 0$, so wird

$$\Theta = A . e^{-mt} . \sin(\pi t/\tau_1).$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $d\Theta/dt = \omega$ und also wird

$$\Theta = \tau_1 \omega/\pi . e^{-mt} . \sin(\pi t/\tau_1).$$

Um die Grösse des Ausschlages zu finden, wird $d\Theta/dt = 0$ gesetzt, wodurch sich ergiebt

(h) $$\operatorname{tg}(\pi t/\tau_1) = \pi/m\tau_1.$$

Ist τ_0 die kleinste Wurzel dieser Gleichung, so sind die folgenden Wurzeln $\tau_0 + \tau_1$, $\tau_0 + 2\tau_1$, ... Die Schwingungen sind also isochron. Werden die Ausschläge mit Θ_1, Θ_2, Θ_3 ... bezeichnet, so haben wir

$$\Theta_1 = \tau_1 \omega/\pi . e^{-m\tau_0} . \sin(\pi\tau_0/\tau_1),$$
$$\Theta_2 = -\tau_1 \omega/\pi . e^{-m(\tau_0+\tau_1)} . \sin(\pi\tau_0/\tau_1),$$
$$\Theta_3 = \tau_1 \omega/\pi . e^{-m(\tau_0+2\tau_1)} . \sin(\pi\tau_0/\tau_1)$$

. . . .

Wird die Ruhestellung mit A_0 bezeichnet, der erste Umkehrpunkt mit A_1, der zweite mit A_2 u. s. w., so ist das Verhältniss zwischen den Schwingungen $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ gleich

$$(\Theta_1 - \Theta_2):(\Theta_3 - \Theta_2) \text{ und } (\Theta_1 - \Theta_2)/(\Theta_3 - \Theta_2) = e^{m\tau_1}.$$

Wir setzen $m\tau_1 = \lambda$ und haben

(i) $$\lambda = \log\text{nat}\,[(\Theta_1 - \Theta_2)/(\Theta_3 - \Theta_2)].$$

λ ist das *logarithmische Decrement,* welches aus einer Reihe von Schwingungen sehr genau bestimmt werden kann. Nach (g) ist die *Schwingungsdauer* τ_1

(k) $$\tau_1 = \tau . \sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}.$$

Die Schwingungsdauer wird also durch die Dämpfung vergrössert. Setzen wir in (h) $t = \tau_0$, so wird

$$\operatorname{tg}(\pi\tau_0/\tau_1) = \pi/m\tau_1 \text{ und } \pi\tau_0/\tau_1 = \operatorname{arctg}(\pi/\lambda),$$
$$m\tau_0 = \lambda/\pi . \operatorname{arctg}(\pi/\lambda),$$
$$\sin(\pi\tau_0/\tau_1) = 1/\sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}.$$

Demnach erhalten wir weiter

$$\Theta_1 = \tau_1 \omega / \pi . e^{-\lambda/\pi . \operatorname{arctg}(\pi/\lambda)} . 1 / \sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}$$

und

(l) $$\omega = \pi \Theta_1 / \tau_1 . \sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2} . e^{\lambda/\pi . \operatorname{arctg}(\pi/\lambda)}.$$

Aus (d) und (k) erhalten wir

$$Q = H \tau_1^2 / G \pi^2 . \omega / (1 + \lambda^2/\pi^2)$$

und bei Berücksichtigung der Gleichung (l)

(m) $$Q = \Theta_1 . H \tau_1 / G \pi . e^{\lambda/\pi . \operatorname{arctg}(\pi/\lambda)} . 1 / \sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}.$$

Um die Electricitätsmenge zu bestimmen, welche ein electrischer Strom, dessen Dauer klein im Vergleich zur Schwingungsdauer des Magneten ist, durch einen Leiter schickt, muss man zunächst das logarithmische Decrement und die Schwingungsdauer des Magneten ermitteln. Durch diese Grössen in Verbindung mit dem Werthe für die Stärke des Erdmagnetismus und der Constanten des Galvanometers ist die gesuchte Grösse Q bestimmt.

Wird $\operatorname{arctg} \pi/\lambda = \frac{1}{2}\pi - x$ gesetzt, so ist $\operatorname{tg} x = \lambda/\pi$. Ist λ sehr klein, so haben wir $x = \lambda/\pi$ und $\operatorname{arctg}(\pi/\lambda) = \frac{1}{2}\pi - \lambda/\pi$. Ist die Dämpfung gering, so kann man die höheren Potenzen in der Reihenentwicklung fortlassen und hat dann

$$e^{\lambda/\pi . \operatorname{arctg}(\pi/\lambda)} = 1 + \lambda/2$$

und

$$Q = \Theta_1 . H \tau_1 / G \pi . (1 + \lambda/2).$$

§ 84. Die Gesetze von Ohm und Joule.

Wir haben bisher den electrischen Strom als gegeben betrachtet und nicht weiter die Frage der Entstehung und Erhaltung desselben erörtert. Hier fehlt es in Wirklichkeit auch in mancher Beziehung an Klarheit, und wir wollen feststellen, was sich mit Sicherheit aus den Beobachtungen ergiebt. Durch die sogenannten galvanischen Elemente kann ein fast constanter Strom hergestellt und unterhalten werden. Soll in einem Leiter ein constanter Strom fliessen, so muss zur Erhaltung desselben eine electromotorische Kraft in der Stromrichtung wirken. Ist u die Electricitätsmenge, welche in der

Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit der yz-Ebene in der Richtung der x-Axe strömt, so können wir setzen

$$u = C.X,$$

wenn C das *Leitungsvermögen* und X die Componente der electromotorischen Kraft in der Richtung der x-Axe ist. C hängt von der Beschaffenheit des Leiters ab und möge nach allen Richtungen im Leiter denselben Werth haben. Sind die Strom- und Kraftcomponenten in den beiden anderen Richtungen bezw. v, w und Y, Z, so ist

$$\text{(a)} \qquad u = CX, \quad v = CY, \quad w = CZ.$$

Demnach ist

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = C(\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z).$$

Ist der *stationäre Bewegungszustand* des electrischen Stromes eingetreten, so ist die linke Seite dieser Gleichung Null, dasselbe gilt für die rechte Seite. Haben die electromotorischen Kräfte ein Potential V, so ist also

$$\text{(b)} \qquad \nabla^2 V = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, *dass keine freie Electricität innerhalb des Leiters vorhanden ist, sobald der Strom stationär geworden ist.* Die electromotorischen Kräfte müssen also von der freien Electricität auf der Oberfläche der Leiter herrühren.

ABC (Fig. 98) sei ein electrischer Leiter. Wir betrachten ein Stück desselben, welches von den unendlich kleinen Schnittflächen $AA' = S$ und $BB' = S$ begrenzt ist, deren Abstand l ebenfalls unendlich klein ist. AB sei der x-Axe parallel, die Stromcomponente u ist gleich CX und durch den Querschnitt S strömt also die Electricitätsmenge

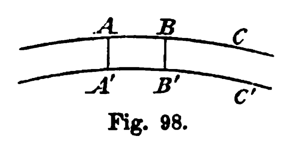


Fig. 98.

$$i = uS = CX.S.$$

Sind V und V' bezw. die Potentiale in A und B, so haben wir

$$i = C.S.(V - V')/l$$

und ferner

$$\text{(c)} \qquad i = (V - V')/(l/CS) = (V - V')/R.$$

R ist der *Leitungswiderstand*, welcher *direct proportional der Länge des Leiters ist und indirect proportional dem Querschnitte desselben und der Leitungsfähigkeit des Körpers, aus welchem der Leiter hergestellt ist.* $V - V'$ ist der *Potentialunterschied* zwischen A und B. Die Gleichung (c) stellt das *Ohm'sche Gesetz dar, nach welchem die Stromstärke der Potentialdifferenz direct, dem Widerstande indirect proportional ist.*

In der Zeit dt fliesst die Electricitätsmenge $i.dt$ durch den Querschnitt AA' und bewegt sich unter dem Einflusse der electromotorischen Kraft X von A nach B. Die geleistete Arbeit ist dann

$$i.dt.X.l = i.dt.(V - V').$$

In der Zeiteinheit wird in dem betrachteten Theile des Leiters von den electromotorischen Kräften die Arbeit

$$A = i(V - V') = i^2 R \tag{d}$$

geleistet. Diese Arbeit wird im Leiter in Wärme verwandelt. *Die in einem Leiter entwickelte Wärmemenge ist also dem Quadrate der Stromstärke und dem Widerstande des Leiters proportional.* Dieser Satz ist von Joule durch den Versuch erwiesen und von Clausius auf theoretischem Wege abgeleitet.

Zehnter Abschnitt.

Induction.

§ 85. Die Induction.

Faraday hat zuerst gezeigt, dass in einem Leiter ein Strom entsteht, wenn in der Nähe desselben ein von einem Strome durchflossener Leiter oder ein Magnet bewegt wird. F. E. Neumann hat die Gesetze für diese inducirten Ströme gefunden. Faraday hat später selbst ein Verfahren zur Bestimmung der Richtung und Stärke des inducirten Stromes angegeben, welches wegen seiner Anschaulichkeit grossen Vor-

zug besitzt. ABC sei ein geschlossener Leiter (Fig. 99) und DE, $D'E'$ u. s. w. seien die vom Leiter umschlossenen Kraftlinien. Bezeichnen wir mit dS ein Element einer Fläche, welche den Leiter zur Randcurve hat, mit α, β, γ die Componenten der magnetischen Kraft (vergl. § 71) und sind l, m, n die Cosinus der Winkel, welche die Normale auf dS mit den Axen bildet, so entsteht im Leiter eine electromotorische Kraft, wenn das Integral N

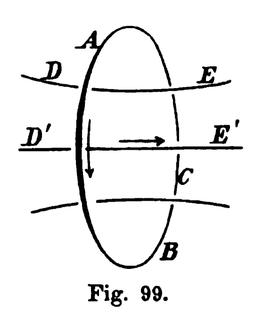


Fig. 99.

$$\text{(a)} \qquad N = \int (\alpha l + \beta m + \gamma n) \, dS$$

seinen Werth ändert. Befinden sich innerhalb des Kreisstromes magnetisirbare Körper, welche eine grössere Permeabilität der Kraftlinien als die Luft haben, so treten an Stelle der Componenten der magnetischen Kraft die Componenten der magnetischen Induction. Im Leiter entsteht dann eine electromotorische Kraft, wenn das Integral (vergl. § 74)

$$N = \int (a l + b m + c n) \, dS$$

seinen Werth ändert. *Der inducirte Strom tritt auf, wenn die Zahl der durch den geschlossenen Leiter tretenden Kraftlinien geändert wird.* Der inducirte Strom sucht die Zahl der umschlossenen Kraftlinien zu vermindern, denn der inducirte Strom hat stets eine solche Richtung, dass seine eigenen Kraftlinien entgegengesetzt gerichtet sind den vorher existirenden Kraftlinien. Werden die in der Figur 99 durch den Pfeil angedeuteten Richtungen als die positiven betrachtet, so wirkt die inducirte electromotorische Kraft in negativer Richtung.

Nach dem Lenz'schen Gesetze sucht der durch die Bewegung des Stromkreises inducirte Strom durch seine electrodynamische Wirkung die Bewegung zu verhindern, durch welche er erzeugt worden ist.

Um die Grösse der inducirten electromotorischen Kraft zu bestimmen, denken wir uns, dass die Stromstärke in einem gegebenen Augenblicke gleich i ist. Bewegen wir den Leiter im magnetischen Felde, so müssen wir nach § 82 die Arbeit $-i.dN$ verrichten, indem zugleich die Energiemenge $Ri^2.dt$

in Wärme verwandelt wird, wenn R der Widerstand des Stromes ist. Somit haben wir

$$-i.dN = Ri^2.dt$$

und also, weil Ri die electromotorische Kraft e ist,

$$e = -dN/dt, \tag{b}$$

d. h. *die inducirte electromotorische Kraft ist gleich der in der Zeiteinheit erfolgten Abnahme der Anzahl der Kraftlinien, welche vom Stromkreise umschlossen werden.*

Die inducirte electromotorische Kraft hängt von der Grösse der magnetischen Induction ab, welche die Componenten a, b, c hat, nicht von der magnetischen Kraft, deren Componenten α, β, γ sind. Wenn keine Magnete in der Nähe sich befinden und der Raum den Magnetisirungscoefficienten $k = 0$ (vergl. § 76) hat, so fallen Induction und magnetische Kraft zusammen und a, b, c können durch α, β, γ ersetzt werden.

Ist z. B. im Kreise ABC zur Zeit t ein Strom von der Stärke i vorhanden, so ist die Anzahl N der in positiver Richtung durch den Kreis tretenden Kraftlinien $N = Li$. L ist die Anzahl der Kraftlinien, wenn die Stromstärke Eins ist. L wird als *Coefficient der Selbstinduction* bezeichnet. Nimmt der Strom ab, so entsteht eine electromotorische Kraft

$$e = -d(Li)/dt. \tag{c}$$

Wird mit R der Widerstand bezeichnet, so haben wir nach dem Ohm'schen Gesetze $e = Ri$, und also

$$Ri = -d(Li)/dt = -L.di/dt, \tag{d}$$

wofern der Coefficient der Selbstinduction L eine constante Grösse ist. Der Coefficient L der Selbstinduction hängt übrigens von der Permeabilität des Raumes ab, ferner von der Gestalt des Leiters.

Ist i_0 die Stromstärke zur Zeit $t = 0$, so wird

$$i = i_0 . e^{-R/L.t}. \tag{e}$$

Die Stromstärke nimmt also um so schneller ab, je grösser der Widerstand und je kleiner der Coefficient L der Selbstinduction ist.

Aus (c) erhalten wir

$$\int_0^\infty e\,i\,d\,t = -L\int_0^\infty i.d\,i = \tfrac{1}{2}L\,i_0^2.$$

Nach § 84 (d) giebt die linke Seite dieser Gleichung einen Ausdruck für die Arbeit, welche als Wärme im Leiter auftritt. Demnach erhalten wir für die kinetische Energie T, welche ein Stromleiter mit der Stromstärke i und der Selbstinduction L besitzt,

(f) $$T = \tfrac{1}{2}L\,i^2.$$

Die kinetische Energie des Stromkreises ist also gleich dem halben Producte aus dem Selbstinductionscoefficienten L in das Quadrat der Stromstärke i.

Sind ABC und $A'B'C'$ (Fig. 100) zwei Stromleiter bezw. mit den Stromstärken i_1 und i_2, so erzeugt der erstere Strom durch seinen eigenen Leiter Kraftlinien, deren Zahl $L_1 i_1$ ist. Demnächst ruft der Strom i_2 die Anzahl $M_{21} i_2$ von Kraftlinien hervor, welche ebenfalls ABC durchsetzen. Die gesammte Zahl der von ABC umschlossenen Kraftlinien ist also

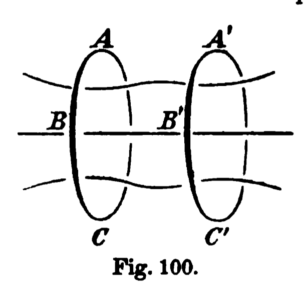


Fig. 100.

(g) $$N_1 = L_1 i_1 + M_{21} i_2.$$

Die Anzahl N_2 der von $A'B'C'$ umschlossenen Kraftlinien ist

(h) $$N_2 = L_2 i_2 + M_{12} i_1.$$

Nach § 82 und nach den am Beginn dieses Paragraphen angestellten Betrachtungen ist in der üblichen Bezeichnungsweise

$$\int (l_2 a_1 + m_2 b_1 + n_2 c_1)\,dS_2 = i_1 \int \cos\varepsilon / r \,.\, ds_1\, ds_2,$$

$$\int (l_1 a_2 + m_1 b_2 + n_1 c_2)\,dS_1 = i_2 \int \cos\varepsilon / r \,.\, ds_1\, ds_2.$$

Das Integral in Bezug auf dS_2 ist $i_1 M_{12}$, und das Integral in Bezug auf dS_1 ist $i_2 M_{21}$. Nach § 82 haben wir

$$M_{12} = M_{21} = \int \cos\varepsilon / r \,.\, ds_1\, ds_2.$$

$M_{12} = M_{21}$ ist der *Coefficient der gegenseitigen Induction beider Stromkreise.*

Sind R_1 und R_2 bezw. die Widerstände in den Leitern ABC und $A'B'C'$, so wird

$$R_1 i_1 = e_1 = -dN_1/dt = -L_1 . di_1/dt - M_{21} . di_2/dt,$$
$$R_2 i_2 = e_2 = -dN_2/dt = -L_2 . di_2/dt - M_{12} . di_1/dt.$$

Wir haben demnach für die *electrokinetische Energie* T eines Systems von zwei Leitern, die von den Strömen i_1 und i_2 durchflossen werden,

$$T = \int_0^\infty (e_1 i_1 + e_2 i_2)\, dt = \tfrac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_{12} i_1 i_2 + \tfrac{1}{2} L_2 i_2^2.$$

Für die electrokinetische Energie T eines beliebigen Systems von Leitern finden wir in derselben Weise

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} T = \tfrac{1}{2}(L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + L_3 i_3^2 + \ldots + 2 M_{12} i_1 i_2 \\ \qquad + 2 M_{13} i_1 i_3 + 2 M_{23} i_2 i_3 + \ldots). \end{cases}$$

Wenn mit N_1, N_2, $N_3 \ldots$ die Zahlen der bezw. von den Leitern $1, 2, 3 \ldots$ umschlossenen Kraftlinien bezeichnet werden, sodass z. B.

$$N_1 = L_1 i_1 + M_{21} i_2 + M_{31} i_3 + \ldots\ldots,$$

erhalten wir als Ausdruck für die electrokinetische Energie T

$$\text{(k)} \qquad T = \tfrac{1}{2}(N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3 + \ldots) = \tfrac{1}{2} \Sigma N i,$$

d. h. *die electrokinetische Energie eines Systems von Strömen ist gleich der Summe der Producte aus der Zahl der von jedem Leiter umschlossenen Kraftlinien in die im Leiter vorhandene Stromstärke.*

Electrische Ströme entstehen nicht nur, wenn die Nachbarströme ihre Stärke, sondern auch wenn dieselben ihre Lage ändern, also wenn M_{12}, $M_{13} \ldots$ variiren. Endlich kann auch der Leiter seine Gestalt ändern. In allen Fällen wird der inducirte Strom durch die Aenderung in der Anzahl der vom Leiter umschlossenen Kraftlinien bestimmt.

§ 86. Die Inductionscoefficienten.

Bei der Untersuchung veränderlicher electrischer Ströme, welche durch Drahtrollen fliessen, sind die Inductionen zwischen den einzelnen Windungen in einer Rolle und zwischen

den verschiedenen Rollen von grosser Bedeutung. Die Berechnung dieser Induction ist meist sehr schwierig; wir wollen einen einfachen Fall betrachten. Zwei kreisförmige Leiter mit dem Radius r_1 und r_2 seien gegeben (Fig. 101). Die Leiter haben eine gemeinschaftliche Axe und den gegenseitigen Abstand b. Es sei $r_2 > r_1$. Wir berechnen das Integral

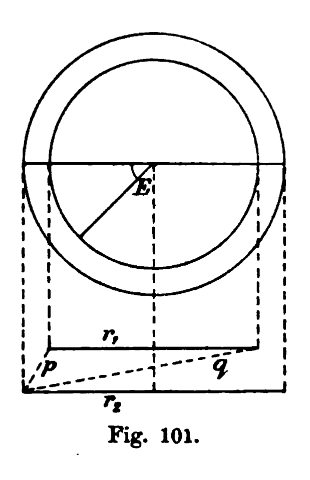


Fig. 101.

$$M_{12} = \int ds_2 \int ds_1 / r \,.\cos \varepsilon.$$

Zunächst wird das Integral m

$$m = \int ds_1 / r \,.\cos \varepsilon$$

bestimmt. Wir haben

$$r^2 = b^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \,.\cos \varepsilon + r_1^2.$$

Ist p der kleinste, q der grösste Abstand zwischen den Punkten der beiden Kreisperipherien, so wird

$$p^2 = b^2 + (r_2 - r_1)^2, \quad q^2 = b^2 + (r_2 + r_1)^2, \quad q^2 - p^2 = 4 r_1 r_2,$$
$$r^2 = p^2 + (q^2 - p^2)\sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

und

$$m = 2\int_0^\pi r_1 \,.\cos\varepsilon \,.\, d\varepsilon \,/\, \sqrt{p^2 + (q^2 - p^2)\sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon}.$$

Ist α ein kleiner Winkel, welcher so gewählt ist, dass $q\alpha$ sehr gross gegen p ist, so können wir setzen

$$m = 2\int_0^\alpha r_1 . d\varepsilon / \sqrt{p^2 + q^2 . \varepsilon^2/4} + 2\int_\alpha^\pi r_1 . d\varepsilon . (1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon) / q \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

$$m = 4 r_1 / q . \left[\int_0^\alpha d\varepsilon / \sqrt{4p^2/q^2 + \varepsilon^2} + \int_\alpha^\pi d\varepsilon / 2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon - \int_\alpha^\pi \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon . d\varepsilon\right],$$

$$m = 4 r_1 / q \,.\, [\log(2 r_1 \alpha / p) - \log(\alpha / 4) - 2],$$

$$m = 4 r_1 / q \,.\, [\log(8 r_1 / p) - 2] = 2\,[\log(8 r_1 / p) - 2].$$

Also ist ferner

$$M_{12} = 4\pi r_2 (\log(8 r_1 / p) - 2).$$

Nach den Voraussetzungen ist es gestattet $r_1 = r_2 = R$ zu setzen, sodass

(a) $$M_{12} = 4\pi R \left(\log (8 R / p) - 2\right)$$

wird. Sind zwei Drahtrollen mit den Windungszahlen n_1 und n_2 vorhanden, und ist der Mittelwerth von $\log p$ für die zwei Windungssysteme gleich $\log P$, so haben wir

(b) $$M_{12} = 4 n_1 n_2 \pi R \left(\log (8 R / P) - 2\right).$$

Für den Selbstinductionscoefficienten L einer einzelnen Rolle ergiebt sich unter denselben Voraussetzungen, wenn mit n die Anzahl der Windungen bezeichnet wird

(c) $$L = 4\pi n^2 R \left(\log (8 R / P) - 2\right).$$

Auf die Berechnung des Inductionscoefficienten können wir hier nicht weiter eingehen; in den meisten Fällen wird derselbe durch den Versuch nach den folgenden Methoden bestimmt.

Methoden zur Bestimmung des Coefficienten der Induction.

a) Ist der Inductionscoefficient M zweier Drahtrollen L_1 und L_2 bekannt, so kann man den Inductionscoefficienten M' für zwei andere Drahtrollen L_1' und L_2' in folgender Weise bestimmen.

L_1 und L_2 (Fig. 102) seien die gegebenen Rollen, L_1' und L_2' sollen untersucht werden. Vom galvanischen Element E

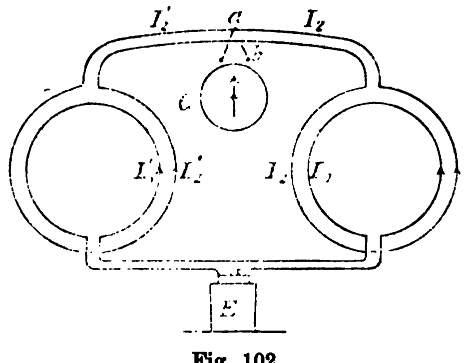


Fig. 102.

geht ein Strom durch die Rollen L_1 und L_1'. Die Rollen L_2 und L_2' werden mit einander verbunden und von den Punkten

a und b führen Leitungen zum Galvanometer G. Geht durch L_1 und L_1' der Strom J, welcher plötzlich unterbrochen wird, so entstehen die electromotorischen Kräfte e und e' in L_2 und L_2'. J_2 und J_2' seien die Intensitäten der inducirten Ströme in L_2 und L_2', so haben wir

$$e = -d(L_2 J_2 + MJ)/dt, \quad e' = -d(L_2' J_2' + M'J)/dt,$$

wenn die Selbstinductionscoefficienten mit L_2 und L_2' bezeichnet werden. Bei Anwendung des Kirchhoff'schen Gesetzes auf die Stromkreise $L_2 G$ und $L_2' G$ ergiebt sich, dass

$$-d(L_2 J_2 + MJ)/dt = R_2 J_2 + G(J_2 - J_2'),$$
$$-d(L_2' J_2' + M'J)/dt = R_2' J_2' - G(J_2 - J_2')$$

ist, wenn mit G der Widerstand des Galvanometers, mit R_2 und R_2' die Widerstände der Drahtrollen L_2 und L_2' bezeichnet werden. Wir multipliciren diese Gleichungen mit dt und integriren von $t = 0$ bis $t = \tau$, wo τ eine sehr kurze Zeit ist. Im Augenblicke $t = 0$ wird der Strom J unterbrochen, dadurch wird im Stromkreise $L_2' G L_2$ ein Strom inducirt, der in sehr kurzer Zeit τ im Kreise L_2 die Electricitätsmenge C_2, in L_2' die Electricitätsmenge C_2' und im Galvanometer also die Electricitätsmenge $C_2 - C_2'$ in Bewegung setzt. Zur Zeit $t = 0$ ist $J = J$ und $J_2 = J_2' = C_2 = C_2' = 0$, zur Zeit $t = \tau$ ist der Strom $J = 0$ und der Inductionsstrom ist ebenfalls verschwunden, also $J_2 = J_2' = 0$. Demnach haben wir

$$MJ = R_2 C_2 + G(C_2 - C_2'), \quad M'J = R_2' C_2' - G(C_2 - C_2').$$
$$C_2 - C_2' = J(M/R_2 - M'/R_2')/(1 + G/R_2 + G/R_2').$$

$C_2 - C_2'$ ist die durch das Galvanometer fliessende inducirte Electricitätsmenge, der sogenannte *Integralstrom*.

Das Galvanometer giebt keinen Ausschlag, wenn die Widerstände der Gleichung

$$M'/M = R_2'/R_2$$

genügen.

b) Die Vergleichung zwischen zwei Selbstinductionscoefficienten kann auch folgendermaassen angestellt werden. $ABCD$ (Fig. 103) sei eine Wheatstone'sche Drahtcombination, im

Leiter BD sei ein Galvanometer eingeschaltet. L_1 und L_2 sind zwei Drahtrollen, welche zu den Leitern AB und BC gehören und deren Selbstinductionscoefficienten verglichen werden sollen. Der bei A eintretende und bei C austretende Strom vertheilt

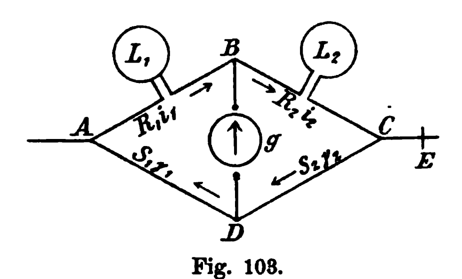


Fig. 103.

sich in den Leitern und veranlasst einen Ausschlag der Galvanometernadel. Die Widerstände R_1, R_2, S_1 und S_2 bezw. in AB, BC, AD und DC seien so gewählt, dass kein Strom durch das Galvanometer fliesst; dann haben wir

$$R_1 / R_2 = S_1 / S_2.$$

Durch Unterbrechung der Leitung bei E entsteht durch Induction eine electromotorische Kraft in L_1 und L_2. In Folge dessen fliesst durch das Galvanometer ein Strom von der Stärke g. i_1, i_2, γ_1 und γ_2 seien bezw. die Stromstärken in den Leitern AB, BC, AD und DC, wobei $i_1 = \gamma_1$, $i_2 = \gamma_2$ ist. Wir haben dann

$$- d(L_1 i_1) / dt = (R_1 + S_1) i_1 + Gg,$$
$$- d(L_2 i_2) / dt = (R_2 + S_2) i_2 - Gg.$$

In dem Augenblicke $t = 0$, wo die Leitung bei E unterbrochen wird, war derselbe Strom i_0 in AB und BC, demnach ist

$$L_1 i_0 = (R_1 + S_1) \int_0^\tau i_1 . dt + G \int_0^\tau g . dt;$$

$$L_2 i_0 = (R_2 + S_2) \int_0^\tau i_2 . dt - G \int_0^\tau g . dt,$$

wenn mit τ eine sehr kurze Zeit bezeichnet wird. Der Strom g bringt keinen Ausschlag im Galvanometer hervor, wenn

$$\int_0^\tau g\,.\,dt = 0 \text{ ist.}$$

Da $i_1 = i_2 + g$ ist, so haben wir auch $i_1 = i_2$, wenn kein Strom durch das Galvanometer fliesst, und ferner

$$L_1 / L_2 = (R_1 + S_1) / (R_2 + S_2).$$

In Rücksicht auf das Verhältniss $R_1 : R_2 = S_1 : S_2$ ergiebt sich

$$L_1 / L_2 = R_1 / R_2,$$

d. h. *die Selbstinductionscoefficienten der Rollen verhalten sich wie die Widerstände der beiden Zweige, in welchen die Rollen eingeschaltet sind.*

Wenn also weder für einen constanten noch für einen variablen Strom, der durch die Rollen L_1 und L_2 geht, die Nadel des Galvanometers einen Ausschlag giebt, so haben wir durch die angestellte Betrachtung ein Mittel erhalten, das Verhältniss zwischen den Coefficienten L_1 und L_2 festzustellen.

§ 87. Die Widerstandsmessung.

Die Stärke des electrischen Stromes ist durch seine magnetischen Wirkungen bestimmt; ebenso haben wir die electromotorische Kraft durch die Aenderung der Anzahl der Kraftlinien definirt, welche der Leiter umschliesst. Mit Hülfe des Ohm'schen Gesetzes kann nun in jedem Leiter der Leitungswiderstand bestimmt werden. Viele verschiedene Methoden sind zur Widerstandsmessung benutzt worden, wir beschränken uns darauf, die einfachsten Beobachtungsmethoden zu beschreiben.

W. Weber hat neben anderen Methoden auch eine Drahtrolle benutzt, die um eine verticale Axe gedreht wird. Dieselbe steht zunächst senkrecht zum magnetischen Meridian und wird dann um 180° gedreht. Der Draht steht mit einem Galvanometer in Verbindung; der gesammte Widerstand sei R. Bildet in einem bestimmten Augenblicke die Windungsebene der Drahtrolle einen Winkel φ mit dem magnetischen Meridian,

so ist die Anzahl der Kraftlinien, welche durch die Windungen der Rolle gehen, gleich $SH \sin \varphi$, wenn der gesammte Flächeninhalt der Windungen mit S und die horizontale Intensität des Erdmagnetismus mit H bezeichnet wird. Ist ferner L der Selbstinductionscoefficient der Rolle und des Galvanometers, und ist i die Stromstärke, so haben wir

$$\text{(a)} \qquad - d(SH \sin \varphi) / dt - d(Li) / dt = Ri.$$

Da φ bei der Bewegung abnimmt von $+ \frac{1}{2}\pi$ bis $- \frac{1}{2}\pi$, während i Null ist sowohl bei Beginn der Bewegung als auch gleich nach dem Aufhören derselben, so haben wir

$$\text{(b)} \qquad 2SH = RQ,$$

wenn mit Q die gesammte Electricitätsmenge bezeichnet wird, welche durch den Leiter geflossen ist. Wird Q nach der in § 83 beschriebenen Methode gemessen, so haben wir

$$R = 2SG\sqrt{\pi^2 + \lambda^2} / (\tau_1 \Theta_1 e^{\lambda/\pi . \operatorname{arctg} \pi/\lambda}).$$

Die Kenntniss der Grösse der Intensität des Erdmagnetismus ist also bei der Berechnung des Widerstandes nicht erforderlich.

Sir Thomson's (Lord Kelvin's) Methode.

Die oben erwähnte Drahtrolle dreht sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω, so haben wir nach (a)

$$- SH\omega \cos \varphi - L . di / dt = Ri.$$

Das Integral der Gleichung lautet

$$i = i_0 . e^{-Rt/L} - A . \cos(\varphi - \alpha).$$

Dauert die Bewegung längere Zeit, so verschwindet das exponentielle Glied; wir nehmen also keine Rücksicht auf dasselbe. Zur Bestimmung von A und α ergiebt sich

$$\text{(c)} \qquad A = SH\omega / (R \cos \alpha + L\omega \sin \alpha); \quad \operatorname{tg} \alpha = L\omega / R$$

und also

$$A = SH\omega / R\sqrt{1 + L^2\omega^2 / R^2} = SH\omega / R . \cos \alpha.$$

Hieraus erkennt man, *dass die Selbstinduction scheinbar den Widerstand vermehrt.*

Ist ON (Fig. 104) der magnetische Meridian und die Linie OM senkrecht zu demselben, so wirkt die Drahtrolle auf eine in ihrem Centrum angebrachte Magnetnadel mit der Kraft Gi, welche die Richtung der zur Ebene der Drahtwindungen senkrechten Strecke OP hat. Diese Kraft hat die Componenten $OM = a$ und $ON = b$, und zwar ist $a = Gi \,.\, \cos\varphi$, $b = Gi \,.\, \sin\varphi$. Die Mittelwerthe dieser Kräfte seien mit a_1 und b_1 bezeichnet. Wir haben dann

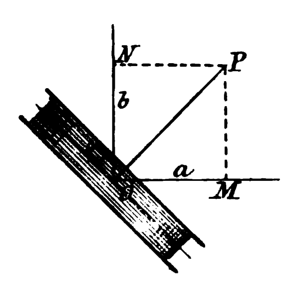


Fig. 104.

$$a_1 = 1/2\pi \,.\int_0^{2\pi} Gi \,.\cos\varphi \,.\, d\varphi;$$

$$b_1 = 1/2\pi \,.\int_0^{2\pi} Gi \,.\sin\varphi \,.\, d\varphi.$$

Nun ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \alpha).\cos\varphi.d\varphi = \pi.\cos\alpha, \quad \int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \alpha).\sin\varphi.d\varphi = \pi.\sin\alpha$$

und

$$a_1 = -\tfrac{1}{2} G A.\cos\alpha, \quad b_1 = -\tfrac{1}{2} G A.\sin\alpha.$$

Ein in der Mitte der Rolle angebrachter Magnet wird aus der Meridianebene nach derselben Seite gedreht, nach welcher sich die Rolle bewegt. Wird der Drehungswinkel mit Θ bezeichnet, so haben wir

$$\operatorname{tg}\Theta = -a_1 / (H + b_1) = G A \cos\alpha / (2H - G A \sin\alpha)$$

oder durch Einführung des Werthes für A

$$\operatorname{tg}\Theta = G S\omega \cos^2\alpha / (2R - G S\omega \sin\alpha \cos\alpha).$$

Diese Gleichung dient in Verbindung mit (c) zur Bestimmung des Widerstandes R. Ist α sehr klein, so haben wir

$$R = G S\omega / 2 \operatorname{tg}\Theta.$$

L. Lorenz' Methode.

Eine Metallscheibe ABC (Fig. 105) mit dem Radius a drehe sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Axe; aussen um die Scheibe herum sei eine Drahtrolle EF gelegt,

welche von einem electrischen Strome von der Stärke i durchflossen wird, der von der galvanischen Batterie H herrührt. Der Strom ruft eine magnetische Kraft hervor, deren zur Ebene der Scheibe senkrechte Componente gleich mi gesetzt werden kann, wo m eine Function des Abstandes vom Scheibencentrum O ist. Rotirt die Scheibe von B nach A und fliesst der Strom in EF in derselben Richtung, so ist die in der Scheibe inducirte electromotorische Kraft vom Mittelpunkte

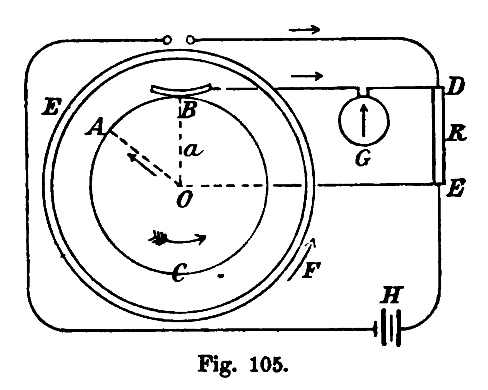


Fig. 105.

nach der Peripherie gerichtet. In einem Punkte B wird eine Feder angebracht, die durch die Leitung $BGDEO$ mit einem Stifte verbunden ist, welcher die Scheibe im Mittelpunkte berührt. DE ist der Leiter, dessen Widerstand R bestimmt werden soll. Leitet man den Batteriestrom auch durch den Leiter DE, so kann man durch Veränderung der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe erreichen, dass kein Strom durch die Leitung fliesst, welche R mit der Scheibe verbindet. In diesem Falle zeigt die Nadel des Galvanometers keine Ablenkung. Wir haben dann, wenn mit e die in der Scheibe inducirte electromotorische Kraft bezeichnet wird,

$$e = Ri,$$

wo mit i der durch den Widerstand R fliessende Strom bezeichnet wird. Zur Bestimmung von e denken wir uns die Scheibe durch einen Ring BAC und einen geradlinigen Leiter OA ersetzt. Der Kreislauf $OAGDEO$ wird in die beiden Theile OAB und $BGDEOB$ zerlegt. Die Anzahl der durch

den letzteren gehenden Kraftlinien wird bei der Bewegung nicht geändert, dagegen erhält die Anzahl der durch den ersteren Theil gehenden Kraftlinien in der Zeiteinheit den Zuwachs

$$\int_0^a m\, i\, r\, \omega . dr = i\, \omega \int_0^a m\, r . d\, r.$$

Dieser Zuwachs stellt die inducirte electromotorische Kraft dar. Wir haben also

$$R\, i = i\, \omega \int_0^a m\, r . d\, r, \quad R = \omega \int_0^a m\, r . d\, r.$$

Ist n die Anzahl der Umdrehungen der Scheibe in der Secunde, so ist $\omega = 2\pi n$ und

$$R = n \int_0^a m . 2\pi\, r . d\, r.$$

Das Integral giebt den Coefficienten M der Induction, welche die Rolle EF auf die Scheibe ABC ausübt, oder auch die Zahl der Kraftlinien, welche die Scheibe durchsetzen, wenn in der Rolle EF der Strom Eins fliesst. Demnach ist

$$R = n M.$$

Zur Bestimmung ist also die Feststellung der Zahl n der Umdrehungen erforderlich, bei denen kein Strom durch G fliesst.

§ 88. Die Grundgleichungen für die Induction.

Wir haben bisher die im Leiter s inducirte electromotorische Kraft durch die Aenderung der Anzahl N der Kraftlinien bestimmt, welche von s umschlossen werden. N ist die Anzahl der Kraftlinien, welche eine beliebige durch den Leiter S gelegte Fläche durchsetzen; N muss also durch den Leiter allein bestimmt sein. Demnach können drei Grössen F, G, H so bestimmt werden, dass das Randintegral

$$\int (F . dx / ds + G . dy / ds + H . dz / ds)\, ds$$

gleich dem Flächenintegral

$$N = \int\int (a l + b m + c n)\, dS$$

ist. Dazu ist erforderlich, dass nach § 6 (f)

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} a = \partial H / \partial y - \partial G / \partial z, \quad b = \partial F / \partial z - \partial H / \partial x, \\ \qquad c = \partial G / \partial x - \partial F / \partial y. \end{cases}$$

Wir erhalten diese Bedingungsgleichungen auch durch die Annahme, dass z. B. dS gleich dem Flächenelemente $dy\,dz$ ist, welches durch $OBDC$ (Fig. 106) dargestellt ist. Das Randintegral wird dann

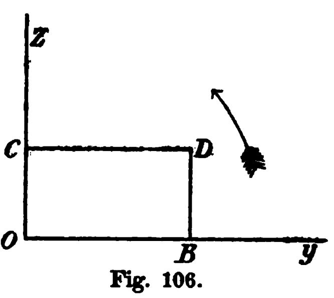


Fig. 106.

$$G\,dy + (H + \partial H / \partial y . dy)\,dz$$
$$-(G + \partial G / \partial z . dz)\,dy - H\,dz$$
$$= (\partial H / \partial y - \partial G / \partial z)\,dy\,dz.$$

Da das Oberflächenintegral hier $a.dy\,dz$ ist, so gelangt man zu der ersten der Gleichungen (a).

Werden die Gleichungen (a) aufgelöst gedacht in Rücksicht auf F, G, H, so haben wir

$$\text{(b)} \qquad N = \int (F.dx / ds + G.dy / ds + H.dz / ds)\,ds.$$

Ist der betrachtete Theil des Raumes in Ruhe, so ist die inducirte electromotorische Kraft e bestimmt durch

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} e = -dN / dt = -\int (dF / dt . dx / ds + dG / dt . dy / ds \\ \qquad + dH / dt . dz / ds)\,ds. \end{cases}$$

Wird

$$\text{(d)} \qquad P = -dF / dt, \quad Q = -dG / dt, \quad R = -dH / dt$$

gesetzt, so kann man P, Q, R als die Componenten der electromotorischen Kraft $\mathfrak{E}$ betrachten, und wenn die Integration längs des ganzen Leiters ausgeführt wird, erhält man als Ausdruck für die gesammte inducirte electromotorische Kraft

$$\text{(e)} \qquad e = \int (P . dx + Q . dy + R . dz).$$

Diese Componenten können auch direct durch Variationen in der Grösse der magnetischen Induction bestimmt werden, deren Componenten a, b, c sind. Man erhält nämlich aus (a) und (d)

$$\text{(f)} \quad \begin{cases} -da / dt = \partial R / \partial y - \partial Q / \partial z, \\ -db / dt = \partial P / \partial z - \partial R / \partial x, \\ -dc / dt = \partial Q / \partial x - \partial P / \partial y. \end{cases}$$

Wir denken uns, dass der electrische Strom, wie in § 81 bemerkt ist, aus zwei Theilen besteht; nämlich aus dem eigentlichen Strome, welcher der electromotorischen Kraft proportional ist, deren Componenten mit p, q, r bezeichnet sind, und aus den Aenderungen in der electrischen Polarisation, deren Componenten f, g, h sind. Wir erhalten demnach für die Componenten der gesammten electrischen Strömung

$$u = p + df/dt, \quad v = q + dg/dt, \quad w = r + dh/dt.$$

Ist C die Leitungsfähigkeit, so haben wir

$$\text{(g)} \qquad p = CP, \quad q = CQ, \quad r = CR$$

und

$$\text{(h)} \qquad f = kP/4\pi, \quad g = kQ/4\pi, \quad h = kR/4\pi,$$

wenn k die Dielectricitätsconstante in electromagnetischem Maasse ist. Demnach wird

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} u = CP + k/4\pi . dP/dt, \quad v = CQ + k/4\pi . dQ/dt, \\ w = CR + k/4\pi . dR/dt. \end{cases}$$

Nach § 76 bestehen zwischen den Componenten der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$ und denen der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ die Gleichungen

$$\text{(k)} \qquad a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta, \quad c = \mu\gamma,$$

wo μ die Permeabilität der Substanz ist.

Zwischen der magnetischen Kraft und den Stromcomponenten haben wir folgenden Zusammenhang gefunden (vergl. § 80)

$$\text{(l)} \quad \begin{cases} 4\pi u = \partial\gamma/\partial y - \partial\beta/\partial z, \quad 4\pi v = \partial\alpha/\partial z - \partial\gamma/\partial x, \\ 4\pi w = \partial\beta/\partial x - \partial\alpha/\partial y. \end{cases}$$

§ 89. Die electrokinetische Energie.

Die electrokinetische Energie eines beliebigen Systems von Leitern ist nach § 85 (k) ausgedrückt durch

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma Ni.$$

In Rücksicht auf § 88 (b) erhalten wir

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma \int (Fi . dx/ds + Gi . dy/ds + Hi . dz/ds) ds.$$

Sind u, v, w die Stromcomponenten, so ergiebt sich für einen Strom i, dessen Querschnitt A ist,

$$i = A \,.\, \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

und zugleich $i \,.\, dx / ds = uA$ u. s. w. Setzen wir

$$dx\,dy\,dz = A \,.\, ds\,,$$

so ergiebt sich

(b) $$T = \tfrac{1}{2} \int\!\!\int\!\!\int (Fu + Gv + Hw)\, dx\,dy\,dz.$$

Werden hier u, v, w nach § 88 (l) durch die Componenten der magnetischen Kraft ausgedrückt, so haben wir

$$T = 1/8\pi \,.\, \int\!\!\int\!\!\int [F(\partial\gamma/\partial y - \partial\beta/\partial z) + G(\partial\alpha/\partial z - \partial\gamma/\partial x) + H(\partial\beta/\partial x - \partial\alpha/\partial y)] \,.\, dx\,dy\,dz.$$

Werden die einzelnen Glieder partiell über den ganzen unendlichen Raum integrirt, so ergiebt sich, da α, β, γ an den Grenzen von der dritten Ordnung unendlich klein sind, dass

$$\int\!\!\int\!\!\int H \,.\, \partial\alpha / \partial y \,.\, dx\,dy\,dz = - \int\!\!\int\!\!\int \alpha \,.\, \partial H / \partial y \,.\, dx\,dy\,dz$$

und

$$\int\!\!\int\!\!\int G \,.\, \partial\alpha / \partial z \,.\, dx\,dy\,dz = - \int\!\!\int\!\!\int \alpha \,.\, \partial G / \partial z \,.\, dx\,dy\,dz$$

wird. Für die übrigen Integrale gelten analoge Ausdrücke.

Mit Rücksicht auf § 88 (a) erhalten wir also

(c) $$T = 1/8\pi \,.\, \int\!\!\int\!\!\int (\alpha a + \beta b + \gamma c)\, dx\,dy\,dz.$$

Wenn keine Magnete im Raume, oder wenn keine Körper, welche eine merkliche Magnetisirung erhalten können, vorhanden sind, so wird $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$, und

(d) $$T = 1/8\pi \,.\, \int\!\!\int\!\!\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dx\,dy\,dz.$$

§ 90. Absolute Einheiten.

In der Physik nehmen wir allgemein als Einheiten der *Länge*, *Masse* und *Zeit* bezw. *Centimeter*, *Gramm* und *Secunde*. Diese Einheiten werden auch in der Electricitätslehre benutzt und wir wollen jetzt die wichtigsten electrischen und magnetischen Grössen durch diese Einheiten ausdrücken, welche

bezw. durch die Symbole L, M und T bezeichnet werden (vergl. Einleitung).

a) *Das electrostatische System.*

In der Electrostatik ist die Kraft $\mathfrak{F}$, mit welcher zwei electrische Massen e_1 und e_2 auf einander wirken, ausgedrückt durch (vergl. § 53)

$$\mathfrak{F} = e_1 e_2 / r^2,$$

wo r der Abstand der Massen ist. Ist $e_1 = e_2 = e$, so haben wir $e = r\sqrt{\mathfrak{F}}$, demnach sind die Dimensionen einer Electricitätsmenge e

$$[e] = [L L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Die electrische Kraft F, welche auf die electrische Masse Eins wirkt, hat die Dimensionen der Grösse e/r^2, also

$$[F] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} / L^2] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Das electrostatische Potential Ψ (vergl. § 54) hat die Dimensionen der Grösse e/r, also

$$[\Psi] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} / L] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Die Capacität C [vergl. § 55 (g)] hat die Dimensionen der Grösse e/Ψ, also

$$[C] = [L].$$

Die Capacität hat also die Dimension einer Länge.

Die Oberflächendichte σ (vergl. § 54) ist die auf der Flächeneinheit vorhandene Electricitätsmenge, also

$$[\sigma] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} / L^2] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Die Oberflächendichte hat also dieselben Dimensionen wie die electrische Kraft [vergl. § 55 (e)]. Da die *electrische Verschiebung* (vergl. § 65) oder *Polarisation* die Electricitätsmenge ist, welche sich durch die Oberflächeneinheit eines Isolators bewegt, so sind ihre Dimensionen ebenfalls $[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$. Das Verhältniss zwischen der electrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und der electrischen Kraft ist ausgedrückt durch $K/4\pi$, wo K die Dielectricitätsconstante ist. K ist also eine Zahl.

Die electrische Energie W [vergl. § 61 (a)] wird durch das Product aus der Potentialdifferenz und der Electricitätsmenge gemessen. Demnach ist

$$[W] = [L^2 M T^{-2}].$$

Dies sind zugleich die Dimensionen für alle anderen Formen der Energie.

b) *Das electromagnetische System.*

Zwei Pole mit den magnetischen Massen μ_1 und μ_2 stossen sich ab mit der Kraft F [vergl. 68 (a)]

$$F = \mu_1 \mu_2 / r^2.$$

Demnach hat die magnetische Masse im electromagnetischen Systeme dieselben Dimensionen, welche die Electricitätsmenge im electrostatischen Systeme hat. Dieses Verhältniss besteht durchgehends zwischen den beiden Systemen für entsprechende Grössen in der Electrostatik und dem Magnetismus; auf die einzelnen Fälle gehen wir daher nicht ein.

Die Dimensionen der *electrischen Stromstärke* bestimmen wir nach dem Gesetze von Biot und Savart (vergl. § 78). Nach demselben ist die Kraft K, mit welcher ein Stromelement ds auf einen Pol mit der magnetischen Masse μ wirkt

$$K = \mu \,.\, i\, ds \,.\, \sin\Theta / r^2.$$

Da K eine mechanische Kraft ist, so sind die Dimensionen der Stromstärke i

$$[i] = \left[\frac{L M T^{-2} L^2}{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} . L}\right] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Da die *Electricitätsmenge* q betrachtet werden kann als ein Product aus Stromstärke und Zeit, so haben wir

$$[q] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Die *electromotorische Kraft* e, welche in einem geschlossenen Leiter entsteht, haben wir definirt [vergl. § 85 (b)] durch

$$e = - dN / dt,$$

wo $N = \int\int (al + bm + cn)\, dS$ ist.

Da die magnetische Induction nach der Definition dieselben Dimensionen hat wie die magnetische Kraft, so sind die Dimensionen der electromotorischen Kraft

$$[T^{-1}.L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.L^2] = [L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}].$$

In diesem Systeme wird die electromotorische Kraft pro Längeneinheit des Leiters als Maass für die *electrische Kraft* angesehen, deren Componenten P, Q, R sind. Die Dimensionen der electrischen Kraft sind demnach

$$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}/L] = [L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}].$$

Nach dem Ohm'schen Gesetze ist der *Leitungswiderstand* gleich dem Verhältnisse zwischen der electromotorischen Kraft im Leiter und der Stromstärke; der Leitungswiderstand hat also die Dimensionen

$$\left[\frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}}{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}}\right] = [LT^{-1}],$$

d. h. *seine Dimensionen sind gleich denen einer Geschwindigkeit.*

Die *electrische Oberflächendichte* wie auch die *electrische Polarisation* haben dieselben Dimensionen wie eine Electricitätsmenge dividirt durch einen Flächeninhalt, also

$$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}/L^2] = [L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}].$$

Nach § 88 (h) hat die *Dielectricitätsconstante* k in diesem Systeme dieselben Dimensionen wie das Verhältniss zwischen der dielectrischen Polarisation und der electrischen Kraft, also

$$[L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}/L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}] = [L^{-2}T^2].$$

c) *Die Vergleichung zwischen den beiden Systemen.*

Bestimmt man dieselbe Electricitätsmenge sowohl electrostatisch, z. B. durch die Coulomb'sche Drehwaage, als auch electromagnetisch durch ein Galvanometer, so hat man zwei Werthe für dieselbe Grösse. Nach dem ersten Maasse wird die Menge ausgedrückt durch $e.[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$, und nach dem

letzteren durch $q\,[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$; das Verhältniss V zwischen diesen Werthen ist

$$V = e\,/\,q\,.\,[L T^{-1}].$$

Das Verhältniss giebt also eine Geschwindigkeit, welche zuerst von Weber und Kohlrausch gemessen ist, und für welche der Werth $V = 3{,}1\,.\,10^{10}$ gefunden ist, welcher nahe mit der Geschwindigkeit $3{,}0\,.\,10^{10}$ des Lichtes in der Luft übereinstimmt. Spätere Untersuchungen haben es wahrscheinlich gemacht, dass V wirklich gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Auf solche Weise ist also gezeigt, dass *eine electromagnetische Electricitätseinheit gleich V electrostatischen Einheiten ist.*

Wenn eine gewisse Electricitätsmenge durch ein Stück AB eines Leiters strömt, so bringt sie Wärme im Leiter hervor, deren äquivalente Energiemenge unabhängig von dem angewandten Maasssysteme sein muss. $e\,.\,\Psi_s$ ist die Energie im electrostatischen Maasse und $q\,\Psi_m$ im electromagnetischen Maasse, wenn bezw. Ψ_s und Ψ_m der Spannungsunterschied zwischen A und B ist, wobei Ψ_s im electrostatischen Maasse, Ψ_m dagegen im electromagnetischen Maasse zu nehmen ist. Demnach ist $e\,\Psi_s = q\,\Psi_m$. Wir haben gezeigt, dass $e = Vq$ ist, also wird $\Psi_m = \Psi_s\,.\,V$, d. h. *eine electrostatische Spannungseinheit ist gleich V electromagnetischen Spannungseinheiten.*

Wird die electrische Kraft im electrostatischen Systeme mit F_s, im electromagnetischen Systeme mit F_m bezeichnet, so beträgt der Spannungsunterschied zwischen zwei Punkten, deren Abstand dx ist, im ersteren Systeme $\Psi_s = F_s\,dx$, im letzteren Systeme $\Psi_m = F_m\,.\,dx$. Da $\Psi_m = \Psi_s\,.\,V$ ist, so haben wir $F_m = V\,.\,F_s$. *Eine Einheit der electrostatischen Kraft ist demnach gleich V Einheiten der electromagnetischen Kraft.*

Die dielectrische Polarisation $\mathfrak{D}$ ist mit der electrischen Kraft F_s durch die Gleichung § 65 (d)

$$\mathfrak{D} = K\,/\,4\pi\,.\,F_s$$

verbunden, wenn das electrostatische System angewendet wird. Im electromagnetischen Systeme hat diese Gleichung die Form

$$f = k\,/\,4\pi\,.\,F_m.$$

Da $\mathfrak{D}$ und f Electricitätsmengen sind dividirt durch Flächen-

inhalte, so haben wir in Uebereinstimmung mit $e = qV$ auch $\mathfrak{D} = Vf$. Da F_m eine mit electromagnetischem Maasse gemessene electrische Kraft ist, so haben wir

$$k = 4\pi f / F_m = 4\pi \mathfrak{D} / V^2 F_e = K / V^2.$$

Die Gleichungen, welche die Componenten der dielectrischen Polarisation mit der electrischen Kraft verbinden, lauten demnach im electromagnetischen Systeme

$$f = KP / 4\pi V^2, \quad g = KQ / 4\pi V^2, \quad h = KR / 4\pi V^2.$$

Auf diesem Wege kommt man zu der Annahme, *dass* $V / \sqrt{K}$ *die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium sein muss, dessen Dielectricitätsconstante* K *ist.*

d) *Practische Einheiten.*

Anstatt der erwähnten absoluten Einheiten werden oft, besonders in der Electrotechnik, die sogenannten practischen Einheiten gebraucht. Als Einheit der Stromstärke gilt in diesem Systeme ein *Ampère,* welches gleich $^1/_{10}$ der electromagnetischen Stromeinheit ist. Die Einheit des Widerstandes ist ein *Ohm,* welches 10^9 absoluten Widerstandseinheiten gleich ist. Ein Ohm ist nahezu gleich dem Widerstande in einem Quecksilberfaden von 106,3 cm Länge und 1 qmm Querschnitt bei 0° C. Das Ohm'sche Gesetz führt dann zur Einheit der electromotorischen Kraft: ein *Volt,* welches gleich 10^8 absoluten Einheiten ist.

Die Einheit der Electricitätsmenge ist die Menge, welche in einer Secunde durch den Querschnitt eines Leiters strömt, wenn die Stromstärke ein Ampère beträgt. Diese Einheit bezeichnen wir als ein *Coulomb.* Ein Condensator, dessen eine Belegung die Ladung ein Coulomb hat, während der Spannungsunterschied der Belegungen ein Volt beträgt, hat die Capacität gleich einem *Farad*; dieselbe ist gleich $10^{-1}/10^8 = 10^{-9}$ absoluten Einheiten der Capacität. Ein Körper, der die Capacität Eins im absoluten electromagnetischen Maasssysteme haben soll, bedarf einer Electricitätsmenge gleich der Einheit, um das Potential Eins zu erhalten; in dem electrostatischen Maasssysteme entspricht diesen Grössen die Electricitätsmenge

V und das Potential $1/V$. Die electrostatische Capacität des Körpers ist also V^2. Hieraus folgt, dass ein Farad gleich $V^2/10^9$ electrostatischen Einheiten ist. Da auch diese Capacität sehr gross ist, so wird in der Regel ein Mikrofarad gebraucht, welches ein Milliontel eines Farad ist.

Elfter Abschnitt.

Electrische Schwingungen.

§ 91. Die Schwingungen in dem Leiter.

Fliessen durch einen Leiter Wechselströme, d. h. Ströme, die in regelmässigen Zwischenräumen ihre Richtung wechseln, so sagt man, es finden *electrische Schwingungen* in dem Leiter statt. Solche Wechselströme können z. B. durch Induction hervorgerufen werden, wie in den bekannten Versuchen von Feddersen. AB (Fig. 107) sei ein Condensator, dessen Platten durch Leitungsdrähte mit zwei kleinen Metallkugeln C und D verbunden sind. Sind A und B geladen, sodass A das Potential Ψ, B das Potential Null hat, so springt ein Funke über von C nach D, wenn der Abstand CD allmählich verkleinert wird. Eine genauere Untersuchung hat gezeigt, dass dieser Funken aus einer Reihe von Funken besteht, welche entgegengesetzt gerichteten Strömen entsprechen. Demnach treten bei der Entladung electrische Schwingungen auf. Wenn aber die Stromstärke i in den Leitungsdrähten AC und DB sich ändert, so muss in denselben eine electromotorische Kraft inducirt werden, welche wir nach § 85 gleich $-L.di/dt$

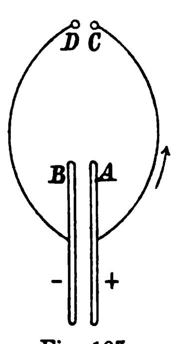


Fig. 107.

setzen können, wo L der *Coefficient der Selbstinduction* ist. Bezeichnen wir mit r den electrischen Widerstand in den Leitungsdrähten und in dem Funkenzwischenraume, so ergiebt sich die Stromstärke i aus

$$\text{(a)} \qquad \Psi - L \, . \, di \, / \, dt = r \, . \, i.$$

Wenn c die *Capacität* des Condensators in electromagnetischem Maasse ist, so ist die Ladung q des Condensators zur Zeit t durch $c \Psi$ gegeben; also ist dieselbe zur Zeit $t + dt$ gleich $c \Psi + c \, . \, d \Psi \, / \, dt \, . \, dt$. Demnach haben wir

$$\text{(b)} \qquad c \Psi = c \Psi + c \, . \, d \Psi / dt \, . \, dt + i \, dt; \quad i = - c \, . \, d \Psi / dt.$$

Aus (a) und (b) ergiebt sich aber

$$L c \, . \, d^2 i / dt^2 + c r \, . \, di / dt + i = 0.$$

Ein Integral dieser Gleichung lautet

$$i = A \, . \, e^{m_1 t} + B \, . \, e^{m_2 t},$$

wo m_1 und m_2 Wurzeln der Gleichung

$$L c m^2 + c r m + 1 = 0$$

sind. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$m = - r / 2L \pm \sqrt{r^2 / 4L^2 - 1 / Lc}.$$

Ist r hinreichend klein, so werden die Wurzeln m imaginär, und wir setzen in diesem Falle

$$m = - r / 2L \pm \sqrt{-1} / \sqrt{Lc}.$$

Dann können wir i ausdrücken durch

$$i = e^{-rt/2L} \, . \left[A' \, . \sin (t / \sqrt{Lc}) + B' \, . \cos (t / \sqrt{Lc}) \right].$$

Die Stromstärke ändert sich also periodisch und nimmt mit der Zeit ab. Die *Schwingungsdauer* T ergiebt sich aus der Gleichung

$$T / \sqrt{Lc} = 2\pi, \quad \text{woraus} \quad T = 2\pi \sqrt{Lc} \quad \text{folgt.}$$

Je geringer also die Capacität des Condensators ist, desto kleiner ist die Schwingungsdauer T.

Die Amplitude der Schwingungen ist $e^{-rt/2L}$ proportional; sie nimmt also mit wachsender Zeit stetig ab. Das Verhältniss der Amplituden zweier auf einander folgenden Schwingungen,

das sogenannte *Dämpfungsverhältniss,* ist

$$e^{-rt/2L} : e^{-r(t+T)/2L} \text{ oder gleich } e^{rT/2L}.$$

Die Dämpfung ist also um so grösser, je grösser der Widerstand des Schliessungskreises ist und bei gegebener Schwingungsdauer um so kleiner, je grösser seine Selbstinduction L ist. Führt man für T den Werth $T = 2\pi\sqrt{Lc}$ ein, so erhalten wir für das Dämpfungsverhältniss den Werth $e^{\pi r\sqrt{c/L}}$. Demnach sind die Schwingungen um so weniger gedämpft, je kleiner die Capacität des sich entladenden Conductors ist. Anstatt diese Beobachtungen an das Dämpfungsverhältniss selbst anzuknüpfen, betrachtet man meist den natürlichen Logarithmus desselben, das sogenannte *logarithmische Decrement* δ. Wir haben

$$\delta = rT/2L = \pi r . \sqrt{c/L}.$$

H. Hertz hat sehr rasche Schwingungen erhalten durch Benutzung des in Figur 108 dargestellten Apparates. Derselbe besteht aus zwei grossen Kugeln bei A und B, welche an den Enden der Kupferstangen AC und DB befestigt sind. Die beiden anderen Enden der Stangen AC und DB tragen kleine Kugeln, welche ungefähr den Abstand 1 cm von einander haben. Die Kugeln werden durch den Inductionsapparat EF geladen; die Entladung findet in dem Raume zwischen den Kugeln C und D statt. Wenn in einem bestimmten Zeitpunkte ein Strom von der Stärke i von A nach B übergeht und wenn das Potential auf A und B bezw. die Werthe Ψ_1 und Ψ_2 hat, so ist

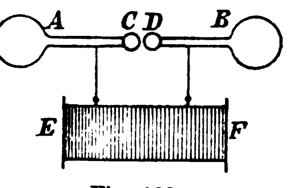


Fig. 108.

$$\Psi_1 - \Psi_2 - L . di/dt = ri.$$

Wird mit c_1 die Capacität jeder einzelnen der gleich grossen Kugeln bezeichnet, so haben wir

$$c_1 . d\Psi_1/dt = -i, \quad c_1 . d\Psi_2/dt = i.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn wir $c = \frac{1}{2}c_1$ setzen, dass

$$i = -c . d(\Psi_1 - \Psi_2)/dt \quad \text{ist.}$$

Demnach erhalten wir für die Stromstärke i dieselbe Differentialgleichung wie oben; wir gelangen damit auch zu demselben Ausdruck für die Schwingungszeit T.

§ 92. Die Berechnung der Schwingungszeit.

Um die Schwingungszeit zu ermitteln, müssen wir zunächst den *Selbstinductionscoefficienten* bestimmen. Wir haben früher die Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten für geschlossene Leiter angegeben. In dem vorliegenden Falle handelt es sich theils um wirkliche Ströme in den cylindrischen Leitern, theils um Polarisationsströme in dem umgebenden Isolator. Die Hauptwirkung muss von der Induction in dem Leiter selbst herrühren, da in demselben der Abstand zwischen dem inducirenden und dem inducirten Strome am kleinsten ist. Allein die Betrachtung wird dadurch sehr schwierig, dass die Stromstärken in den verschiedenen Theilen des Querschnittes nicht gleich sind. Wir wollen aber hiervon im Nachfolgenden absehen und den Selbstinductionscoefficienten L in einem Cylinder unter der Voraussetzung berechnen, dass die Stromstärke in allen Theilen des Querschnittes dieselbe ist. Nach F. Neumann ist die electromotorische Kraft e, welche in dem Leiter s' unter Einwirkung eines veränderlichen Stromes i inducirt wird, welcher durch einen anderen Leiter s fliesst, durch die Variation des Integrals Li bestimmt, wo

$$L = \int\int \cos \varepsilon / r \,.\, ds\, ds'$$

ist. In diesem Integrale, welches über alle Elemente des einen und des anderen Leiters zu erstrecken ist, bezeichnet ε den Winkel zwischen ds und ds', r den Abstand zwischen ds und ds'.

AB und CD seien zwei parallele Linien (Fig. 109), welche zusammen mit AC und BD ein Rechteck bilden. Wir setzen $AB = CD = l$ und $CF = s'$. Dann wird zunächst der Werth des Integrals

$$\int_0^l \int_0^l ds \,.\, ds' / r$$

bestimmt, weil in dem betrachteten Falle (Fig. 109) $\cos \varepsilon = 1$ ist. Um zunächst den Werth des Integrals

$$P = \int_0^l ds / r$$

zu finden, ziehen wir FG senkrecht zu CD und AB und setzen ferner $FG = a$. Ist

$$AG = b_1, \quad BG = b_2, \quad FA = r_1, \quad FB = r_2,$$

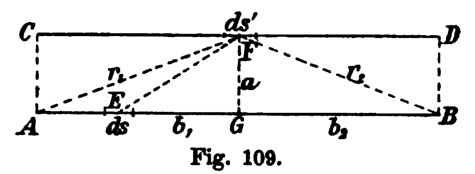


Fig. 109.

so haben wir

$$P = \int_0^{b_1} ds / r + \int_0^{b_2} ds / r,$$

wo s der Abstand eines Punktes auf AB von G ist. Da aber

$$\int ds / r = \int ds / \sqrt{a^2 + s^2} = \log \text{nat} (s / a + \sqrt{1 + s^2 / a^2})$$

ist, so erhalten wir

$$P = \log \text{nat} [(r_1 + b_1)(r_2 + b_2) / a^2]$$
$$= \log \text{nat} [(AF + AG)(BF + BG) / a^2].$$

Ist a im Vergleiche mit l sehr klein, so dürfen wir

$$AF = AG = s' \quad \text{und} \quad FB = GB = l - s'$$

setzen und erhalten dann

$$P = \log \text{nat} [4 s' (l - s') / a^2].$$

Sodann suchen wir den Werth des Integrals $\int P . ds'$ und erhalten

$$\int_0^l P . ds' = 2 l . [\log \text{nat} (2 l / a) - 1].$$

Wir berechnen den *Selbstinductionscoefficienten eines Drahtes mit kreisförmigem Querschnitt.*

AB (Fig. 110) sei der Querschnitt eines cylindrischen Leiters, dessen Länge l und dessen Radius R ist. Auf dem ganzen Querschnitte sei die Stromdichte u constant. Die Stromstärke i ist also $i = R^2 \pi u$. Wir betrachten zunächst die inducirende Wirkung, welche von einem Faden D herrührt,

dessen Querschnitt dS ist; dieser Faden wirkt auf eine Linie, welche der Cylinderaxe parallel ist und durch den Punkt C geht. Wenn $DC = a$ ist, so ergiebt sich die inducirende Wirkung aus der Variation des Integrals

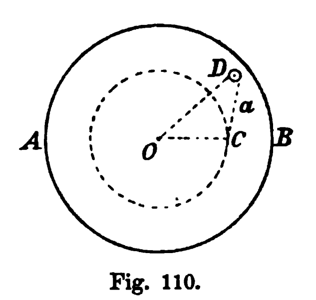


Fig. 110.

$$u \, . \, dS \, . \, 2l \, (\log \operatorname{nat} (2l/a) - 1)$$
$$= u \, . \, dS \, . \, (M + N \log \operatorname{nat} a),$$

wo die Grössen M und N der Kürze wegen eingeführt sind und

$$M = 2l (\log \operatorname{nat} 2l - 1)$$

und

$$N = -2l$$

gesetzt ist. Wir haben zwischen zwei Fällen zu unterscheiden: $OD = r$ kann entweder grösser oder kleiner als $OC = r_1$ sein. Zunächst sei $r > r_1$. Die Elemente dS mögen eine ringförmige Fläche mit dem Inhalte $2\pi r \, . \, dr$ bilden. Nach den Betrachtungen des § 13 ist $\log a$ gleich dem Logarithmus der halben Summe des grössten und des kleinsten Werthes, den a annehmen kann. Diese Werthe sind bezw. $r - r_1$ und $r + r_1$. Der gesuchte Mittelwerth ist also $\log r$. Demnach haben wir das Integral

$$u \int_{r_1}^{R} 2\pi r \, . \, dr \, . \, (M + N \log \operatorname{nat} r) = \pi u \{ M(R^2 - r_1^2)$$
$$+ N [R^2 \log \operatorname{nat} R - r_1^2 \log \operatorname{nat} r_1 - \tfrac{1}{2} (R^2 - r_1^2)] \}.$$

Für den Theil des Cylinders, dessen Abstand von der Axe kleiner als r_1 ist, wird der Mittelwerth des grössten und kleinsten Werthes für a gleich r_1. Demnach lautet das Integral für diesen Theil

$$u \int_0^{r_1} 2\pi r \, . \, dr \, . \, (M + N \log \operatorname{nat} r_1) = \pi u \, (M r_1^2 + N r_1^2 \, . \, \log \operatorname{nat} r_1).$$

Die Summe der beiden Integrale ist

$$\pi u \{ M R^2 + N (R^2 \log \operatorname{nat} R - \tfrac{1}{2} (R^2 - r_1^2)) \}.$$

Um den Mittelwerth dieser Grösse für alle Längsfasern des Cylinders zu erhalten, müssen wir nur den Mittelwerth

von r_1^2 aufsuchen, da alle anderen Grössen constant sind. Weil aber

$$1 / \pi R^2 . \int_0^R r_1^2 . 2\pi r_1 . dr_1 = \tfrac{1}{2} R^2$$

ist, so erhalten wir für den gesuchten Mittelwerth

$$\pi u R^2 (M + N(\log\operatorname{nat} R - \tfrac{1}{4})).$$

Führen wir in diese Gleichung die Werthe für

$$M = 2l(\log\operatorname{nat} 2l - 1) \text{ und für } N = -2l$$

ein und setzen wir $\pi u R^2 = i$, so erhalten wir für die Grösse, deren Variation die Selbstinduction ergiebt,

$$2li(\log\operatorname{nat}(2l/R) - \tfrac{3}{4}).$$

Für die Grösse L erhalten wir also

$$L = 2l(\log\operatorname{nat}(2l/R) - \tfrac{3}{4}).$$

In den Versuchen von Hertz war $l = 150$, $R = 0{,}25$ und also $L = 1902$, wenn alle Längen in Centimeter ausgedrückt werden.

Um die Schwingungsdauer zu berechnen, muss zunächst die Capacität einer Kugel mit dem Radius 15 cm, welche Hertz benutzte, bestimmt werden. Ist Q die Ladung und Ψ das Potential, so ist die Capacität C im electrostatischen Maasse $C = Q/\Psi$. Bezeichnen wir die Ladung und das Potential im electromagnetischen Maasse bezw. mit Q' und Ψ', so ist, wenn $V = 3.10^{10}$ die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume ist, $Q = VQ'$ und $\Psi = \Psi'/V$. Also erhalten wir für die Capacität c im electromagnetischen Maasse

$$c = Q'/\Psi' = C/V^2.$$

Für die Schwingungsdauer erhalten wir also

$$T = 2\pi\sqrt{LC}/V.$$

Nach der Betrachtung am Schlusse des § 91 haben wir $c = \frac{1}{2} c_1$, wo c_1 die Capacität jeder einzelnen der gleich grossen Kugeln in electromagnetischem Maasse ist. Demnach haben wir $C = 15/2$ zu setzen und erhalten dann $T = 2{,}5/10^8$ Secunden. Die entsprechende Wellenlänge in der Luft ist

$$2{,}5 . 10^{-8} . 3 . 10^{10} = 750 \text{ cm}.$$

§ 93. Die Grundgleichungen für die electrischen Isolatoren oder Dielectrica.

Maxwell hat auf theoretischem Wege gefunden, dass auch in Folge einer Aenderung der electrischen Polarisation in den Isolatoren electrische Schwingungen entstehen können. Die Resultate, zu welchen **Maxwell** gekommen ist, sind so wichtig, dass wir hier einige von ihnen besprechen wollen. Zu diesem Zwecke wollen wir mit H. **Hertz** in den electrischen Grundgleichungen, welche in § 88 gegeben sind, für die electrischen Grössen das electrostatische Maass einführen, dagegen sollen die magnetischen Grössen mit ihrem eigentlichen Maasse gemessen werden. Die Electricitätsmenge, welche durch eine electrische Kraft, die in einem Punkte eines Isolators wirkt, durch ein Flächenelement getrieben wird, das zur Richtung der Kraft senkrecht liegt, ist nach § 65 gleich $K/4\pi$ multiplicirt mit der Grösse der Kraft F. Bezeichnen wir also mit f, g, h die Componenten der electrischen Verschiebung, mit X, Y, Z die Componenten der electrischen Kraft, so ist

$$f = KX/4\pi, \quad g = KY/4\pi, \quad h = KZ/4\pi.$$

Erhält die Componente X in der Zeit dt den Zuwachs dX, so fliesst die Electricitätsmenge df in der Richtung der x-Axe durch die Flächeneinheit; die Componente u der Stromstärke im electrischen Isolator ist dann gleich df/dt, und wir haben

$$\text{(a)} \quad u = K/4\pi . \partial X/\partial t, \quad v = K/4\pi . \partial Y/\partial t, \quad w = K/4\pi . \partial Z/\partial t.$$

Die Gleichungen in § 80 (a) drücken aus, dass die Arbeit, welche die magnetischen Kräfte bei der Bewegung eines Einheitspoles um den Strom leisten, gleich der Stromstärke multiplicirt mit 4π ist. Wird die Stromstärke in electrostatischem Maasse gemessen, so erhalten wir

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} 4\pi u/V = \partial\gamma/\partial y - \partial\beta/\partial z, \quad 4\pi v/V = \partial\alpha/\partial z - \partial\gamma/\partial x, \\ \qquad 4\pi w/V = \partial\beta/\partial x - \partial\alpha/\partial y, \end{cases}$$

weil die electromagnetische Einheit der Electricitätsmenge gleich V electrostatischen Einheiten ist.

Die inducirte electromotorische Kraft ist gleich $-dN/dt$, wenn mit N die vom Stromlaufe umschlossene Anzahl der

Kraftlinien bezeichnet wird. Da die electromotorische Kraft in electromagnetischem Maasse gleich der electromotorischen Kraft in electrostatischem Maasse multiplicirt mit V ist, so haben wir nach § 88 (f) und (k)

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} -\mu / V . \partial\alpha / \partial t = \partial Z / \partial y - \partial Y / \partial z; \\ -\mu / V . \partial\beta / \partial t = \partial X / \partial z - \partial Z / \partial x; \\ -\mu / V . \partial\gamma / \partial t = \partial Y / \partial x - \partial X / \partial y. \end{cases}$$

Aus (a) und (b) erhalten wir

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} K / V . \partial X / \partial t = \partial\gamma / \partial y - \partial\beta / \partial z; \\ K / V . \partial Y / \partial t = \partial\alpha / \partial z - \partial\gamma / \partial x; \\ K / V . \partial Z / \partial t = \partial\beta / \partial x - \partial\alpha / \partial y. \end{cases}$$

Setzen wir nun

$$J = \partial X / \partial x + \partial Y / \partial y + \partial Z / \partial z,$$

so erhalten wir aus (c) und (d)

$$\mu K / V^2 . \partial^2 X / \partial t^2 = \nabla^2 X - \partial J / \partial x.$$

Betrachten wir einen Raum, in welchem K constant ist, so haben wir

$$K / 4\pi . J = \partial f / \partial x + \partial g / \partial y + \partial h / \partial z.$$

Ist keine Ladung im Raume vorhanden, so erhalten wir aus § 66 (d), dass $J = 0$ ist. Also wird

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} \mu K / V^2 . \partial^2 X / \partial t^2 = \nabla^2 X; \quad \mu K / V^2 . \partial^2 Y / \partial t^2 = \nabla^2 Y; \\ \qquad \mu K / V^2 . \partial^2 Z / \partial t^2 = \nabla^2 Z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen ergeben in Verbindung mit den Gleichungen (c) und (d)

$$\text{(f)} \quad \begin{cases} \mu K / V^2 . \partial^2 \alpha / \partial t^2 = \nabla^2 \alpha; \quad \mu K / V^2 . \partial^2 \beta / \partial t^2 = \nabla^2 \beta; \\ \qquad \mu K / V^2 . \partial^2 \gamma / \partial t^2 = \nabla^2 \gamma. \end{cases}$$

Zugleich wird

$$\partial\alpha / \partial x + \partial\beta / \partial y + \partial\gamma / \partial z = 0$$

nach § 76, wenn μ constant ist.

Nach § 67 (g) ist die electrische Energie W durch

$$\text{(g)} \qquad W = 1 / 8\pi . \iiint K(X^2 + Y^2 + Z^2)\, dx\, dy\, dz$$

ausgedrückt.

Die electrokinetische Energie T ist nach § 89 (c)

(h) $$T = 1 / 8\pi . \int\int\int \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \, dx \, dy \, dz.$$

§ 94. Ebene Wellen in Isolatoren.

Wir wollen die Bewegung ebener Wellen in Isolatoren untersuchen. Die Wellenebene sei mit der yz-Ebene parallel. Die Componenten der electrischen Kraft sind dann allein Functionen von x und aus den Gleichungen § 93 (e) erhalten wir

$$\mu K / V^2 . \partial^2 X / \partial t^2 = \partial^2 X / \partial x^2; \quad \mu K / V^2 . \partial^2 Y / \partial t^2 = \partial^2 Y / \partial x^2;$$
$$\mu K / V^2 . \partial^2 Z / \partial t^2 = \partial^2 Z / \partial x^2.$$

Zugleich ist auch

$$\partial X / \partial x + \partial Y / \partial y + \partial Z / \partial z = 0.$$

Da aber Y und Z von y und z unabhängig sind, so erhalten wir $\partial X / \partial x = 0$. Da hier nur periodisch wirkende Kräfte auftreten können, so muss also $X = 0$ sein. *Die Richtung der electrischen Kraft ist also der Wellenebene parallel.* Durch Drehung des Coordinatensystems können wir die y-Axe mit der Resultirenden aus der Y- und Z-Componente zusammenfallen lassen. Wir brauchen also nur die Gleichung

$$\mu K / V^2 . \partial^2 Y / \partial t^2 = \partial^2 Y / \partial x^2$$

zu betrachten. Das Integral dieser Gleichung lautet

(a) $$Y = b \sin [2\pi / T . (t - x / \omega)],$$

wo T die *Schwingungsdauer* und ω die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* ist. Die Differentialgleichung ist erfüllt, wenn

$$\omega = V / \sqrt{\mu K}.$$

Für den leeren Raum ist $\mu = 1$ und $K = 1$; V ist demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für ebene electrische Schwingungen im leeren Raume. Für die gewöhnlichen durchsichtigen Körper ist $\mu = 1$; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also $V / \sqrt{K}$. Maxwell nahm an, dass die electrischen Schwingungen mit den Lichtschwingungen identisch seien. Bezeichnen wir das Brechungsverhältniss eines Isolators mit N, so hat sich aus den Versuchen ergeben, dass

$$\omega = V / N \text{ ist.}$$

Die electrische Lichttheorie ergiebt $\omega = V/\sqrt{K}$. Demnach haben wir $K = N^2$, d. h. *die specifische inductive Capacität eines Mediums ist gleich dem Quadrate des Brechungsverhältnisses.* Da dieser Satz für eine grosse Menge Körper gilt, so giebt er eine Bestätigung von Maxwell's Hypothese. Aus derselben können bei weitem alle Eigenschaften des Lichtes hergeleitet werden.

Nach § 93 (c) ist nun $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und

(b) $\mu\gamma = Vb/\omega . \sin[2\pi/T.(t - x/\omega)] = Nb \sin[2\pi/T.(t - x/\omega)]$.

Die Richtung der magnetischen Kraft ist also der Wellenebene parallel und zur Richtung der electrischen Kraft senkrecht.

Wir wollen noch die folgende Betrachtung über die Beziehungen der electrischen Kraft zur magnetischen Kraft anstellen. In der yz-Ebene wirke eine electrische Kraft, welche der Axe Oy (Fig. 111) parallel ist. Diese Kraft wachse in einer Secunde gleichmässig von Null bis Y_0 an. Dadurch entsteht ein electrischer Strom v in derselben Richtung und, weil $\partial Y/\partial t = Y_0$ ist, so haben wir nach § 93 (a)

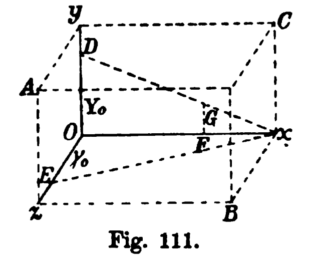


Fig. 111.

(c) $v = K/4\pi . Y_0$.

Durch diesen electrischen Strom werden magnetische Kräfte hervorgerufen, welche der z-Axe parallel sind. Wir wollen annehmen, dass die magnetische Kraft gleichmässig von Null bis γ_0 anwächst. Dadurch wird wiederum eine electromotorische Kraft in dem umgebenden Raume inducirt, und wir wollen annehmen, dass die electrischen und magnetischen Wirkungen sich in einer Secunde bis zu der Entfernung $Ox = \omega$ (Fig. 111) ausbreiten. Die magnetische Kraft nimmt gleichmässig ab von $x = 0$ bis $x = \omega$; dasselbe gilt für die electrische Kraft $OD = Y_0$. Der electrische Strom hat dagegen zwischen O und x überall dieselbe Stärke. Dieses erklärt sich durch die Bemerkung, dass die electrische Kraft in einem Punkte F, dessen Abstand von x gleich $1/n . Ox$ ist, nur während $1/n$ Secunde gewirkt hat und in dieser Zeit von 0 bis $1/n . Y_0$ angewachsen ist; der Zuwachs beträgt also in der Secunde wiederum Y_0.

Ein Einheitspol bewege sich in der rechteckigen Bahn $OzBxO$ (Fig. 111). Nur auf dem Wege von O bis z wirkt in der Bewegungsrichtung die magnetische Kraft γ_0; demnach ist die von den magnetischen Kräften geleistete Arbeit gleich $\gamma_0 . Oz$. Die in electromagnetischem Maasse gemessene Strommenge, welche der Einheitspol umkreist hat, ist aber

$$v / V . Oz . Ox.$$

Nach § 80 haben wir also

$$\gamma_0 . Oz = 4 \pi v . Oz . Ox / V$$

oder, weil $Ox = \omega$ ist, ergiebt sich

$$\text{(d)} \qquad V \gamma_0 = 4 \pi v \omega .$$

Die in electromagnetischem Maasse gemessene electromotorische Kraft, welche bei der Bewegung um eine geschlossene Bahn inducirt wird, ist $e = -dN/dt$, wenn mit N die von der Bahn eingeschlossene Anzahl Kraftlinien bezeichnet wird. Wir haben also $N = -\int e . dt$. Der mittlere Werth der electromotorischen Kraft in der Richtung Oy ist gleich $\frac{1}{2} . Y_0 . V$ in electromagnetischem Maasse. Ueber die rechteckige Bahn $OyCx$ erstreckt ist der Werth des betrachteten Integrals $\frac{1}{2} . Y_0 V . Oy$. Der mittlere Werth der magnetischen Kraft senkrecht zu der Fläche $OyCz$ ist $\frac{1}{2} \gamma_0$, demnach ist der mittlere Werth der magnetischen Induction $\frac{1}{2} . \mu \gamma_0$. Wir haben also die Gleichung

$$\frac{1}{2} . Y_0 V . Oy = \frac{1}{2} \mu \gamma_0 . Oy . Ox$$

und demnach

$$\text{(e)} \qquad V Y_0 = \mu \gamma_0 \omega , \quad N Y_0 = \mu \gamma_0 ,$$

wenn für V / ω das Brechungsverhältniss N gesetzt wird. Dabei ist zu beachten, dass sich die Welle in der Richtung der x-Axe fortpflanzt, dass nach unserer Annahme die electrische Kraft in der Richtung der y-Axe, und dass dann die magnetische Kraft in der Richtung der z-Axe wirkt. *Hält man demnach die rechte Hand in der Fortpflanzungsrichtung der Welle und wendet man die innere Handfläche nach der Richtung, welche die electrische Kraft hat, so giebt der Daumen die Richtung de..*

magnetischen Kraft an. Bezeichnen wir ferner die magnetische Kraft mit M und die electrische Kraft mit F, so ist

$$NF = \mu M.$$

Aus (c) und (d) ergiebt sich, dass

$$V\gamma_0 = K Y_0 \omega$$

ist. Führen wir den Werth für γ_0 in (e) ein, so erhalten wir

$$V^2 = \mu K \omega^2.$$

Demnach ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\omega = V / \sqrt{\mu K}.$$

Aus (a) und (b) ergiebt sich, dass die Beziehungen (e) zwischen der electrischen und magnetischen Kraft auch für ebene Wellen gelten. Im leeren Raume haben beide Kräfte denselben Zahlenwerth.

§ 95. Die Schwingungen von H. Hertz.

H. Hertz hat in einem geradlinigen Leiter sehr rasche Schwingungen hervorgerufen, welche in dem umgebenden Isolator ebenfalls Schwingungen veranlassen. Ueber die Natur derselben können wir uns nach Hertz in folgender Weise eine Vorstellung bilden.

Der Mittelpunkt des Leiters falle in den Coordinatenanfangspunkt, die Schwingungen mögen in der Richtung der z-Axe erfolgen. Die magnetischen Kraftlinien sind dann Kreise, deren Mittelpunkte in der z-Axe liegen. Die electrischen Kraftlinien haben eine verwickeltere Gestalt. Wir gehen von den Differentialgleichungen § 93 (f) für die magnetischen Kräfte aus. Der Kürze wegen setzen wir $V / \sqrt{K\mu} = \omega$.

Zunächst suchen wir ein Integral der Differentialgleichung

$$1 / \omega^2 . \partial^2 u / \partial t^2 = \nabla^2 u \tag{a}$$

unter der Voraussetzung, dass u eine Function von t und von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist. Wir haben dann nach § 15 (l)

$$\nabla^2 u = 1 / r . \partial^2 (r u) / \partial r^2,$$

und also ist

$$1 / \omega^2 . \partial^2 (r u) / \partial t^2 = \partial^2 (r u) / \partial r^2.$$

Setzt man $k = 2\pi / T$ und $l = 2\pi / T\omega$, wo T eine Constante ist, so ist

(b) $$u = a / r \,.\, \sin(kt - lr)$$

ein einfaches Integral jener Differentialgleichung. u genügt also nebst seinen nach x, y, z genommenen Differentialquotienten den Differentialgleichungen § 93 (f) für die magnetischen Kraftcomponenten α, β, γ. In dem betrachteten Falle ist $\gamma = 0$, und demnach haben wir auch $\partial\alpha / \partial x + \partial\beta / \partial y = 0$. Als einfachste Lösung der Differentialgleichung erhalten wir

(c) $$\alpha = -\partial^2 u / \partial t \partial y, \quad \beta = \partial^2 u / \partial t \partial x,$$

wo die Differentiation nach t in Rücksicht auf die nachfolgende Rechnung eingeführt ist. Aus (c) erhält man

$$\alpha = -\partial^2 u / \partial t \partial r \,.\, y / r; \quad \beta = \partial^2 u / \partial t \partial r \,.\, x / r.$$

Die resultirende magnetische Kraft ist also

$$M = \partial^2 u / \partial t \partial r \,.\, \sqrt{x^2 + y^2} / r = \partial^2 u / \partial t \partial r \,.\, \sin\Theta,$$

wo Θ der Winkel zwischen der Verbindungslinie mit dem Anfangspunkte und der z-Axe ist. Die Kraft M ist senkrecht zu der Ebene, welche durch den betrachteten Punkt und die z-Axe gelegt wird.

Setzen wir nun $kt - lr = \varphi$, so ergiebt sich

$$M = ka(l \,.\, \sin\varphi / r - \cos\varphi / r^2) \,.\, \sin\Theta.$$

Wenn r sehr klein gegenüber $1 / l = \omega T / 2\pi$ ist, so ergiebt sich

$$M = -ka \,.\, \cos kt \,.\, \sin\Theta / r^2,$$

d. h. *die Kraft wird durch das Gesetz von Biot und Savart bestimmt, indem die Schwingungen im Leiter ebenso wie ein Stromelement wirken.*

Für grössere Abstände wird die magnetische Kraft

(d) $$M = 4\pi^2 a / T^2 \omega r \,.\, \sin[2\pi / T \,.\, (t - r / \omega)] \,.\, \sin\Theta.$$

Demnach breiten sich die magnetischen Wellen im Raume mit der Geschwindigkeit des Lichtes aus.

Wir wollen nun die electrischen Kräfte berechnen. Aus den Gleichungen (c) und § 93 (d) erhalten wir

$$KX / V = -\partial^2 u / \partial x \partial z; \quad KY / V = -\partial^2 u / \partial y \partial z;$$
$$KZ / V = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2.$$

Da u nur von r und t abhängt, so erhalten wir durch Ausführung der Differentiation

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} KX/V = (-\partial^2 u/\partial r^2 + 1/r . \partial u/\partial r) . xz/r^2; \\ KY/V = (-\partial^2 u/\partial r^2 + 1/r . \partial u/\partial r) . yz/r^2; \\ KZ/V = \partial^2 u/\partial r^2 . (r^2 - z^2)/r^2 + \partial u/\partial r . (r^2 + z^2)/r^3. \end{cases}$$

Die electrische Kraft R in der Richtung r ist

$$(Xx + Yy + Zz)/r,$$

und wir erhalten aus (e)

$$KR/V = 2/r . \partial u/\partial r . \cos\Theta = -2a(l\cos\varphi/r^2 + \sin\varphi/r^3)\cos\Theta.$$

Ist $R = 0$, so berührt die electrische Kraft eine Kugel, deren Radius aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}(kt - lr) = -lr$$

sich bestimmt.

Die nächste kugelförmige Welle habe den Radius r', also ist $\operatorname{tg}(kt - lr') = -lr'$. Daraus ergiebt sich

$$\operatorname{tg} l(r' - r) = l(r' - r)/(1 + l^2 rr').$$

Ist der Wellenradius sehr gross, so wird also $l(r' - r) = \pi$. Da aber $l = 2\pi/\lambda$, wenn $\lambda = T\omega$, so ergiebt sich $r' - r = \frac{1}{2}\lambda$. Wir erhalten demnach zuletzt äquidistante kugelförmige Wellen.

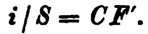
§ 96. Poynting's Theorem.

Durch den langen cylindrischen Leiter AB (Fig. 112), dessen Querschnitt ein Kreis ist, fliesse ein electrischer Strom i in der Richtung von A nach B. In dem umgebenden Raume wirkt dann eine magnetische Kraft M, welche sich aus der Gleichung $2\pi r . M = 4\pi i$ bestimmt, wenn $r = OC$ der Abstand des betrachteten Punktes von der Axe des Cylinders ist. Wir erhalten also

$$M = 2i/r.$$

Die äquipotentiellen Flächen für die electrische Kraft sind im Inneren des Leiters Ebenen, welche auf der Axe des Leiters senkrecht stehen. Ausserhalb des Leiters werden dieselben, wenigstens in der Nähe des Leiters, gleichfalls zur Axe desselben senkrecht stehen. Die äquipotentiellen Flächen der magnetischen Kraft sind Ebenen, welche, wie die Ebene OF, sowohl die Richtung der electrischen Kraft als auch die Axe des Leiters enthalten. Die electrische Kraft in der

Oberfläche des Leiters und in der Nähe derselben sei F'. Bezeichnen wir mit S den Querschnitt des Leiters und mit C das Leitungsvermögen desselben, so ist nach dem Ohm'schen Gesetze



$$i / S = CF'.$$

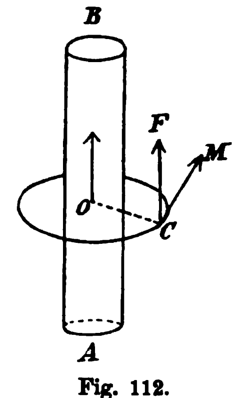


Fig. 112.

Die Wärmeentwicklung im Leiter während einer Secunde bestimmen wir in folgender Weise. Fliesst die Electricitätsmenge i durch den betrachteten Leiter, dessen Länge l sei, so leistet die electrische Kraft die Arbeit $F'il$. Bezeichnet also J das Wärmeäquivalent, so ist die entwickelte Wärmemenge gleich $F'il/J$. Die Arbeit der electromotorischen Kraft ist also

$$F'il = \tfrac{1}{2} . M r F' l.$$

Poynting nimmt nun an, dass diese Energiemenge durch die Oberfläche des Leiters in denselben eintritt. Der von uns betrachtete Theil der Oberfläche des Leiters ist $2\pi r l$. Der Leiter nimmt demnach durch die Oberflächeneinheit die Energiemenge

$$1 / 4\pi . F' M$$

in sich auf.

Diese Energiemenge ist also in der Richtung CO bewegt, welche eine Schnittlinie der electrischen und magnetischen Niveauflächen ist. Die Richtung, in welcher die Energie fortgepflanzt wird, zur Richtung der electrischen und magnetischen Kraft bestimmen wir in derselben Weise wie die Fortpflanzung der Welle in § 94.

Die electrische Kraft ist hier in electromagnetischem Maasse gemessen; drücken wir dieselbe in electrostatischem Maasse aus und bezeichnen wir dieselbe mit F, so muss $F' = VF$ sein. Die Energiemenge, welche in einer Secunde durch eine Flächeneinheit tritt, die sowohl der Richtung der electrischen Kraft als auch der Richtung der magnetischen Kraft parallel ist, ist gleich $V / 4\pi . F . M$.

Wir wollen nun einen allgemeineren Fall betrachten. Die magnetische Kraft in einem Punkte des Raumes sei M, die electrische Kraft in demselben sei F und der Winkel zwischen

den Richtungen beider Kräfte sei mit (M, F) bezeichnet. Wir nehmen an, dass die Energiemenge, welche in einer Secunde durch eine Flächeneinheit geht, welche den Richtungen von M und F parallel ist,

$$V / 4\pi . M . F . \sin(MF) \text{ ist.}$$

Die Richtung, in welcher die Energie strömt, bilde mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus l, m, n sind. Wir haben dann

$$l = (\gamma Y - \beta Z) / MF \sin(MF); \quad m = (\alpha Z - \gamma X) / MF \sin(MF);$$
$$n = (\beta X - \alpha Y) / MF \sin(MF),$$

wenn α, β, γ die Componenten der magnetischen Kraft M und X, Y, Z die Componenten der electrischen Kraft F sind. Aus den letzten Gleichungen ergiebt sich nämlich, dass

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0; \quad X\alpha + Y\beta + Z\gamma = 0; \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

ist. Demnach strömt die Energie in einer Richtung, welche sowohl zur Richtung der magnetischen Kraft als auch zu derjenigen der electrischen Kraft senkrecht ist.

Bezeichnen wir mit E_x, E_y, E_z die Componenten des Energiestromes nach den Coordinatenaxen, so haben wir

$$E_x = V / 4\pi . MF \sin(MF) . l.$$

Demnach erhalten wir die Gleichungen

$$E_x = V / 4\pi . (\gamma Y - \beta Z); \quad E_y = V / 4\pi . (\alpha Z - \gamma X);$$
$$E_z = V / 4\pi . (\beta X - \alpha Y).$$

Ein Parallelepiped mit den Kanten dx, dy, dz erhält in der Zeit dt den Energiezuwachs

$$-(\partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Demnach beträgt der Energiezuwachs A, welchen die Volumeneinheit in der Zeiteinheit erhält,

$$A = -(\partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z).$$

Führen wir in diese Gleichung die vorhin für E_x, E_y, E_z gegebenen Werthe ein, so wird

$$A = V / 4\pi . [X(\partial\gamma / \partial y - \partial\beta / \partial z) + Y(\partial\alpha / \partial z - \partial\gamma / \partial x)$$
$$+ Z(\partial\beta / \partial x - \partial\alpha / \partial y)] - V / 4\pi . [\alpha(\partial Z / \partial y - \partial Y / \partial z)$$
$$+ \beta(\partial X / \partial z - \partial Z / \partial x) + \gamma(\partial Y / \partial x - \partial X / \partial y)].$$

Mit Hülfe der Gleichungen § 93(c) und (d) erhalten wir hieraus

$$A = K / 8\pi \,.\, d(X^2 + Y^2 + Z^2) / dt + \mu / 8\pi \,.\, d(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) / dt.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit den im § 93 (g) und (h) für die electrostatische und electrokinetische Energie gegebenen, so zeigt sich, dass A wirklich den gesammten Zuwachs an Energie angiebt, den die Volumeneinheit in der Zeiteinheit aufnimmt. Hierdurch ist also der Satz von Poynting für ruhende Isolatoren bewiesen. Der Beweis kann leicht auf die Leiter ausgedehnt werden, wenn wir die Entwicklungen des § 88 benutzen und bedenken, dass ein Theil der im Leiter absorbirten Energie in Wärme verwandelt wird.

Wir wenden jetzt den Satz von Poynting auf einen einfachen Fall an. Nach § 94 können wir bei ebenen Schwingungen die electrische Kraft F, welche dort mit Y bezeichnet ist, gleich

$$F = b \,.\, \sin\left[2\pi / T \,.\, (t - x / \omega)\right]$$

und die magnetische Kraft M, welche dort mit γ bezeichnet ist, gleich

$$M = Vb / \mu\omega \,.\, \sin\left[2\pi / T \,.\, (t - x / \omega)\right]$$

setzen. Während jeder Schwingung geht also durch die Flächeneinheit die Energiemenge

$$V^2 b^2 / 4\pi\mu\omega \,.\, \int_0^T \sin^2\left[2\pi / T \,.\, (t - x / \omega)\right] dt = V^2 b^2 T / 8\mu\pi\omega.$$

Wir können $V = \omega$ und $\mu = 1$ setzen und erhalten dann für die Energiemenge, welche in einer Secunde durch eine Flächeneinheit geht, welche zur Wellenebene senkrecht ist, den Betrag $Vb^2 / 8\pi$.

Die Wärmemenge, welche ein Quadratcentimeter in einer Minute durch das Sonnenlicht empfängt, ist ungefähr gleich drei Grammkalorien. Dieser Wärmemenge entspricht in der Secunde die Energie $3 \,.\, 4{,}2 \,.\, 10^7 / 60$. Setzen wir nun $V = 3 \,.\, 10^{10}$, so wird $b = 0{,}04$. Da die Einheit der electrischen Kraft in electrostatischem Maasse gleich 300 Volt ist, so erhalten wir für das Maximum der electrischen Kraft des Sonnenlichtes 12 Volt in Bezug auf ein Centimeter. Das Maximum der magnetischen Kraft wird 0,04, beträgt also ungefähr ein Fünftel der Horizontalintensität des Erdmagnetismus.

Die experimentelle Grundlage für die mathematische Behandlung der Electrostatik ist von Coulomb gegeben. Poisson hat eine Reihe electrostatischer Probleme behandelt und die allgemeinen Methoden zur Lösung derselben gegeben. Sir William Thomson (Lord Kelvin) hat dieselben Probleme theilweise nach neuen höchst sinnreichen Methoden behandelt; seine Abhandlungen sind besonders für das Selbststudium zu empfehlen (Reprint of Papers. 2 ed. 1884). Faraday (1837) entwickelte Anschauungen über die electrische Polarisation oder Verschiebung. Auf Grund dieser Vorstellungen gab Maxwell seine Behandlung der Electricitätslehre (Treatise on Electricity and Magnetism 1873, deutsch von B. Weinstein, 1883). In einer anderen Form hat H. v. Helmholtz die Electrostatik behandelt und neue Probleme gelöst. Seine Abhandlungen finden sich in Wiedemann's Annalen.

Die Theorie des Magnetismus geht parallel mit der Theorie der Electrostatik. Fast dieselben Autoren und zum Theil auch dieselben Werke behandeln beide Abschnitte.

Die Theorie der electrischen Ströme hat Ampère in seiner Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, Paris 1825, behandelt. Dieses Werk bildet die Grundlage für die ganze neuere Entwicklung der Theorie der electrischen Ströme. Die neuen von Faraday entwickelten Vorstellungen über die magnetischen und inducirenden Wirkungen der electrischen Ströme sind von Maxwell mathematisch formulirt in seinem Werke: Treatise on Electricity and Magnetism, 1873. Maxwell's Behandlung des Gegenstandes sind wir auch gefolgt. Dagegen gehen Gauss, W. Weber, F. E. Neumann, Kirchhoff und Lorenz von Ampère's Theorie aus.

Die Theorie der electrischen Schwingungen in Conductoren verdanken wir William Thomson und G. Kirchhoff (Poggendorff's Annalen 121). Maxwell und Lorenz zeigten, dass auch in Isolatoren electrische Schwingungen auftreten können. Durch die Versuche von H. Hertz hat die Lehre von den electrischen Schwingungen eine Ausdehnung und Bedeutung erlangt, dass die Consequenzen der Theorie kaum zu übersehen sind.

Zwölfter Abschnitt.

Die Lichtbrechung in isotropen und durchsichtigen Körpern.

§ 97. Einleitung.

Je mehr Erscheinungen in der Lehre vom Lichte auftreten und je mehr Beziehungen zwischen dem Lichte und anderen Naturerscheinungen gefunden werden, umso schwieriger wird es, eine Theorie des Lichtes zu entwickeln. Nach der *Emissionstheorie* des Lichtes, welche im Allgemeinen Newton zugeschrieben wird und von demselben mathematisch behandelt ist, wird die Energie durch Lichtkörperchen übertragen, die von dem leuchtenden zu dem beleuchteten Körper wirklich übergehen. Die Lichtkörperchen vermögen dabei ihre kinetische Energie als auch eine gewisse andere Form der Energie, die sie in sich aufnehmen können, mit sich fort zu führen. Im vorigen Jahrhundert reichte die Emissionstheorie aus, die bekannten Erscheinungen zu erklären. Allein die Emissionstheorie liess sich nur sehr schwer weiter entwickeln; dies trat besonders im Anfange unseres Jahrhunderts bei den grossen Entdeckungen in der Optik hervor, welche wir Young, Fresnel und Malus verdanken. Im Gegensatze zur Emissionstheorie entwickelte Fresnel seine erste Form der *Undulationstheorie*, welche ursprünglich von Huygens herrührt; hierbei werden die Lichtwellen als longitudinale betrachtet. Nach der Undulationstheorie ist der Raum zwischen dem leuchtenden und dem erleuchteten Körper mit einem materiellen Medium angefüllt. Durch die Wirkung der Theilchen dieses Mediums auf einander wird die Energie, welche vom leuchtenden Körper ausgesandt wird, von Theilchen zu Theilchen durch das Medium fortgeleitet bis zum erleuchteten Körper. Demnach ist das betrachtete Medium der Träger der Energie während des Ueberganges des Lichtes von dem einen Körper zum anderen.

Die Undulationstheorie hat manche Vorzüge gegenüber der Emissionstheorie. Namentlich werden die Interferenzerscheinungen in natürlicher Weise durch die Undulationstheorie erklärt, dasselbe gilt auch zum Theil von den Erscheinungen der Doppelbrechung. Aber die Erklärung der Polarisation des Lichtes durch diese Undulationstheorie bot nicht unerhebliche Schwierigkeiten, welche nur dadurch überwunden werden konnten, dass man die Richtung der Lichtschwingungen senkrecht zur Strahlenrichtung annahm. Da Fresnel zugleich festhielt, dass das Medium, der *Aether*, in welchem die Lichtschwingungen fortgepflanzt werden, ein flüssiger Körper ist, so stiess er auf einen hartnäckigen Widerstand, indem namentlich Poisson mit Recht geltend machte, dass transversale Schwingungen nie in einem flüssigen Körper fortgepflanzt werden können. Obwohl die Undulationstheorie in ihrer ursprünglichen Form keineswegs einwurfsfrei und in mancher Beziehung auch unzureichend war, indem unter anderem die *Farbenzerstreuung* nicht aus derselben abgeleitet werden konnte, so war ihre Entwicklung doch der Emissionstheorie gegenüber ein gewaltiger Fortschritt.

Da es nicht möglich ist, das Licht als Schwingungen in einem elastischen Medium zu betrachten, nicht einmal unter der Annahme, wie später gezeigt wird, dass das Medium ein fester Körper ist, so müssen wir auf einem anderen Wege nach einer Erklärung der Erscheinungen in der Lehre vom Lichte suchen. Unter den Bestrebungen der neueren Zeit nach dieser Richtung hat besonders die von Maxwell entwickelte *electromagnetische Lichttheorie* besondere Vorzüge. Nach der Auffassung von Maxwell ist das Licht auch eine Wellenbewegung, aber es besteht in periodischen electrischen Strömungen oder Verschiebungen in den schlechten Leitern, die an die Stelle der Aetherschwingungen in der Theorie von Fresnel treten. Maxwell hat dabei die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume sowohl wie in den durchsichtigen Körpern auf electrischem Wege bestimmt und ist dabei zu Resultaten gelangt, welche sehr gut mit den Thatsachen übereinstimmen. Auch die Polarisation und Doppelbrechung können in einfacher Weise aus Maxwell's Theorie entwickelt

werden, ebenso ist es gelungen, die Farbenzerstreuung aus derselben zu erklären.

Da die Formeln von Fresnel für die nachfolgenden Betrachtungen grosse Bedeutung haben, so wollen wir dieselben zunächst entwickeln. Hier seien nur kurz noch die Hauptsätze der Lichtlehre erwähnt, welche für alle isotropen und vollkommen durchsichtige Körper gelten. Die Kenntniss dieser Hauptsätze ist für die Ableitung der Formeln von Fresnel nothwendig, aber nicht hinreichend.

I. Das Licht pflanzt sich in einem und demselben Medium mit einer Geschwindigkeit fort, die von der Stärke des Lichtes unabhängig ist, aber von der Wellenlänge des Lichtes abhängt. In verschiedenen Medien hat die Lichtgeschwindigkeit verschiedene Werthe.

II. Trifft ein Lichtstrahl auf eine ebene Fläche, welche verschiedene Medien von einander trennt, so tritt eine *Brechung* und eine *Reflexion* ein. Alle drei Strahlen, d. h. der einfallende, der gebrochene und der reflectirte Strahl liegen in einer und derselben Ebene, welche zur brechenden Fläche senkrecht ist. Ist α der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel und γ der Reflexionswinkel, so haben wir

$$\gamma = \alpha \quad \text{und} \quad \sin\alpha / \sin\beta = N.$$

Das *Brechungsverhältniss* N ist für homogenes Licht constant.

III. Ist ω die Geschwindigkeit des Lichtes in dem Medium, in welchem die Reflexion stattfindet und ω' die Geschwindigkeit in dem Medium, in welchem die Brechung stattfindet, so ist

$$N = \omega / \omega', \quad \text{und also} \quad \sin\alpha / \sin\beta = \omega / \omega'.$$

IV. Das Licht kann als eine Wellenbewegung in einem Medium betrachtet werden, welches wir als Aether bezeichnen. Ob dabei an die Körper selbst oder an eine unbekannte Substanz gedacht wird oder vielmehr an Veränderungen im electrischen oder magnetischen Zustande des Körpers, ist hier ganz gleichgültig. Wir wollen nur ausdrücken, dass die Lichtbewegung durch ein oder mehrere Glieder von der Form

$$a \cos(2\pi t / T + \varphi)$$

ausgedrückt werden kann, wo a die *Amplitude* oder *Schwingungs-*

weite, T die *Schwingungsdauer*, φ die *Phase* und t die *veränderliche Zeit* ist. Die *Lichtintensität* wird dann durch a^2 ausgedrückt.

V. Die Bewegung des Aethers ist senkrecht zur Richtung des Lichtstrahles, d. h. wir haben *transversale Schwingungen*. Die Bewegung kann entweder immer in derselben Richtung erfolgen, dann haben wir einen *geradlinig polarisirten* Strahl, oder zwei oder mehrere Bewegungen der eben angegebenen Art versetzen die Aethertheilchen in eine Curvenbewegung, welche im allgemeinen eine *elliptische* ist. Lichtstrahlen der letzteren Art heissen *elliptisch polarisirt*. Ist die Bahn des Aethertheilchens ein Kreis, so ist das Licht *circular polarisirt*. Ueber das *natürliche Licht* hatte Fresnel die Vorstellung, dass seine Schwingungen ebenfalls senkrecht zur Richtung des Strahles und geradlinig stattfinden, dass dieselben aber innerhalb einer sehr kurzen Zeit nach allen Richtungen erfolgen ohne irgend eine derselben zu bevorzugen.

§ 98. Die Formeln von Fresnel.

Die ebene Fläche OP (Fig. 113) sei die Trennungsebene zweier isotroper durchsichtiger Medien. Die Geschwindigkeit des Lichtes in dem Medium über der Trennungsebene OP sei ω, die Geschwindigkeit des Lichtes in dem Medium unterhalb der Trennungsebene sei ω'. Ist N das Brechungsverhältniss des Lichtstrahles beim Uebergange vom ersten zum zweiten Medium, so haben wir $\omega = N\omega'$. Der Punkt O in der ebenen Grenzfläche werde zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, die x-Axe sei senkrecht nach oben gerichtet, die y-Axe liege in der *Einfallsebene*, d. h. in der Ebene, welche durch das Einfallsloth LL' und den einfallenden Strahl SO gelegt ist. Die z-Axe ist also senkrecht zur Einfallsebene. Ferner sei SO der *einfallende*, OT der *reflectirte* und OB der *gebrochene* Strahl. Der *Einfallswinkel* ist mit α, der *Brechungswinkel* mit β bezeichnet. Die Amplitude der Schwingungen des einfallenden Strahles sei u_1, diejenige der Schwingungen des gebrochenen und reflectirten Strahles bezw. u_2 und u_3. Die Schwingungsebenen dieser Strahlen bilden mit

der Einfallsebene Winkel, welche bezw. mit φ_1, φ_2, φ_3 bezeichnet werden sollen. Die Componenten der Bewegung nach den Coordinatenaxen sind für den einfallenden Strahl ξ_1, η_1, ζ_1, für den gebrochenen Strahl ξ_2, η_2, ζ_2 und für den reflectirten Strahl ξ_3, η_3, ζ_3. Es ist ferner zweckmässig eine Bezeichnung

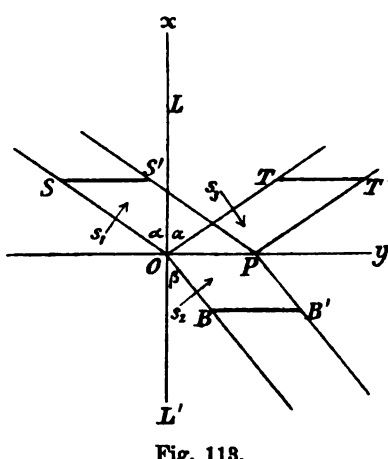


Fig. 113.

für die Bewegungscomponenten einzuführen, welche in der Einfallsebene liegen und zur Richtung der Strahlen senkrecht sind. Diese Bewegungscomponenten sollen für die drei Strahlen bezw. mit s_1, s_2, s_3 bezeichnet werden. Wir haben dann folgende Gleichungen:

$$(a)\quad \begin{cases} \xi_1 = s_1 \sin\alpha, & \eta_1 = s_1 \cos\alpha, & u_1^2 = s_1^2 + \zeta_1^2, & \operatorname{tg}\varphi_1 = \zeta_1/s_1; \\ \xi_2 = s_2 \sin\beta, & \eta_2 = s_2 \cos\beta, & u_2^2 = s_2^2 + \zeta_2^2, & \operatorname{tg}\varphi_2 = \zeta_2/s_2; \\ \xi_3 = -s_3 \sin\alpha, & \eta_3 = s_3 \cos\alpha, & u_3^2 = s_3^2 + \zeta_3^2, & \operatorname{tg}\varphi_3 = \zeta_3/s_3. \end{cases}$$

Um s_2 und s_3, sowie ζ_2 und ζ_3 durch s_1 und ζ_1 ausdrücken zu können, müssen gewisse Annahmen über das Verhalten des Lichtes beim Uebergange von dem einen Medium zum anderen gemacht werden. In dieser Hinsicht machte Fresnel folgende Voraussetzungen:

I. *Beim Vorgange der Reflexion und Brechung geht kein Licht verloren* oder *die Summe der reflectirten und gebrochenen Lichtintensität ist gleich der einfallenden.* Hierin ist nur der

Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft ausgesprochen, indem die kinetische Energie des einfallenden Strahles gleich der kinetischen Energie des reflectirten und gebrochenen Strahles ist. $OPSS'$ (Fig. 113) sei ein Cylinder, dessen Grundfläche OP die Fläche A hat und dessen Seitenlinie SO die Lichtgeschwindigkeit ω ist. Bezeichnen wir mit ϱ die Dichte des schwingenden Mediums, so hat die in dem betrachteten Cylinder enthaltene Lichtmenge die kinetische Energie L_1

$$L_1 = \tfrac{1}{2} \,.\, \varrho \,.\, \omega \cos\alpha \,.\, A \,.\, u_1^2.$$

Nach Verlauf einer Secunde ist diese kinetische Energie vertheilt auf den reflectirten und den gebrochenen Strahl. Die kinetische Energie L_3 in dem reflectirten Strahle ist

$$L_3 = \tfrac{1}{2} \,.\, \varrho \,.\, \omega \cos\alpha \,.\, A \,.\, u_3^2$$

und die kinetische Energie L_2 in dem gebrochenen Strahle ist

$$L_2 = \tfrac{1}{2}\, \varrho' \,.\, \omega' \cos\beta \,.\, A \,.\, u_2^2,$$

wenn ϱ' die Dichte des schwingenden Mediums unterhalb der ebenen Grenzfläche ist. Nach der oben gemachten Annahme von Fresnel ist also

$$L_1 = L_2 + L_3 \quad \text{oder} \quad \varrho\, \omega\, (u_1^2 - u_3^2) \cos\alpha = \varrho'\, \omega' \,.\, u_2^2 \,.\, \cos\beta.$$

Berücksichtigen wir die Beziehungen

$$\omega = N \,.\, \omega' \quad \text{und} \quad \sin\alpha = N \,.\, \sin\beta,$$

so können wir der Gleichung die Form

$$\text{(b)} \qquad \varrho \,.\, (u_1^2 - u_3^2) \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \varrho'\, u_2^2 \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\beta$$

geben.

Liegen die Schwingungen des Strahles in der Einfallsebene, so ist $u_1 = s_1$, und wir erhalten

$$\text{(c)} \qquad \varrho \,.\, (s_1^2 - s_3^2) \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \varrho' \,.\, s_2^2 \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\beta.$$

Sind aber die Schwingungen des Lichtstrahles zur Einfallsebene senkrecht, so ist $u_1 = \zeta_1$ und demnach

$$\text{(d)} \qquad \varrho\, (\zeta_1^2 - \zeta_3^2) \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \varrho' \,.\, \zeta_2^2 \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\beta.$$

II. Ferner nahm Fresnel an, *dass die Schwingungscomponenten des Lichtes parallel mit der Grenzfläche unmittelbar unterhalb und oberhalb derselben gleich gross sind.* Liegen die

Lichtschwingungen in der Einfallsebene, so ist also nach dieser Annahme $\eta_1 + \eta_3 = \eta_2$ oder

(e) $$(s_1 + s_3)\cos\alpha = s_2 \,.\, \cos\beta.$$

Sind die Schwingungen aber zur Einfallsebene senkrecht, so erhalten wir

(f) $$\zeta_1 + \zeta_3 = \zeta_2.$$

Aus (c) und (e) ergiebt sich

(g) $$\begin{cases} s_2 = s_1 \,.\, 2\,\varrho \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha \,/\, (\varrho \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \varrho' \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\beta), \\ s_3 = s_1 (\varrho \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \varrho' \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\beta) / (\varrho \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \varrho' \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\beta), \end{cases}$$

und aus (d) und (f)

(h) $$\begin{cases} \zeta_2 = \zeta_1 \,.\, 2\,\varrho \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha \,/\, (\varrho \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + \varrho' \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\beta), \\ \zeta_3 = \zeta_1 \,.\, (\varrho \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha - \varrho' \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\beta) / (\varrho \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + \varrho' \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\beta). \end{cases}$$

III. Da das Verhältniss zwischen ϱ und ϱ' gänzlich unbekannt ist, so musste Fresnel eine dritte Annahme machen, und zwar setzte er *in verschiedenen Medien gleiche Elasticität, aber verschiedene Dichte des Aethers voraus.* Demgegenüber hat F. E. Neumann die Annahme gemacht, *dass die Dichte des Aethers für alle Medien dieselbe, dass aber die Elasticität für verschiedene Medien verschieden sei.* Weil Fresnel den Aether als einen luftförmigen Körper betrachtete, so war seine Annahme natürlich, aber dieselbe ist nicht berechtigt, wie wir vorhin schon bemerkt haben. Fresnel nahm ferner an, dass ω und ω' in derselben Weise wie in der Elasticitätslehre ausgedrückt werden könnten [vergl. § 35 (k)] und setzte demgemäss

$$\omega = \sqrt{\mu / \varrho}\,, \quad \omega' = \sqrt{\mu' / \varrho'}\,.$$

Ist aber nach der Annahme Fresnel's $\mu = \mu'$, so erhalten wir

(i) $$\varrho' / \varrho = \omega^2 / \omega'^2 = N^2.$$

In Rücksicht auf die dritte Annahme erhalten also die Gleichungen (g) und (h) die Form

(k) $$\begin{cases} s_2 = s_1 \,.\, 2\cos\alpha \,.\, \sin\beta \,/\, \big(\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)\big), \\ \zeta_2 = \zeta_1 \,.\, 2\cos\alpha \,.\, \sin\beta \,/\, \sin(\alpha + \beta), \\ s_3 = -\, s_1 \operatorname{tg}(\alpha - \beta) / \operatorname{tg}(\alpha + \beta), \\ \zeta_3 = -\, \zeta_1 \sin(\alpha - \beta) / \sin(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Diese Formeln rühren von Fresnel her.

Die Erfahrung kann durch den Versuch allein über den Werth dieser Formeln entscheiden. Aus dem Ausdrucke für s_3 ergiebt sich nämlich, dass $s_3 = 0$ ist, wenn $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ ist oder wenn $\operatorname{tg}\alpha = N$ ist. Brewster hat gezeigt, dass das Licht, welches nach der Definition von Malus senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, nicht reflectirt wird, wenn $\operatorname{tg}\alpha = N$ ist. Diesen Winkel nennt man den *Polarisationswinkel, bei welchem der reflectirte Strahl mit dem gebrochenen einen rechten Winkel einschliesst.* Dieses stimmt also mit der Erfahrung überein, wenn man davon ausgeht, dass *die Schwingungen im polarisirten Lichte zur Polarisationsebene senkrecht sind.* Im Ganzen zeigen die Versuche über die Intensität des reflectirten Lichtes gute Uebereinstimmung mit Fresnel's Formeln.

Die Schwingungsebene des einfallenden Strahles bildet, wie oben angegeben, mit der Einfallsebene den Winkel φ_1, während der entsprechende Winkel für den reflectirten Strahl φ_3 ist. Brewster hat gefunden, dass

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{tg}\varphi_1 . \cos(\alpha - \beta) / \cos(\alpha + \beta).$$

Dieselbe Gleichung ergiebt sich auch aus den Formeln von Fresnel, indem

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \zeta_3 / s_3 = \zeta_1 \cos(\alpha - \beta) / s_1 \cos(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\varphi_1 . \cos(\alpha - \beta) / \cos(\alpha + \beta).$$

Diese Uebereinstimmung spricht also für die Richtigkeit von Fresnel's Formeln.

Fresnel nahm an, dass die Elasticität des schwingenden Mediums zu beiden Seiten der brechenden Fläche dieselbe ist. Wir haben gesehen, dass diese Annahme ziemlich willkürlich ist. Demgegenüber nimmt F. E. Neumann an, dass $\varrho = \varrho'$ ist. Wir erhalten dabei aus (g) und (h)

$$\text{(l)} \quad \begin{cases} s_2 = 2 \sin\alpha . \cos\alpha . s_1 / \sin(\alpha + \beta), \\ \zeta_2 = 2 \sin\alpha . \cos\alpha . \zeta_1 / \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta), \\ s_3 = \sin(\alpha - \beta) . s_1 / \sin(\alpha + \beta), \quad \zeta_3 = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) . \zeta_1 / \operatorname{tg}(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen unter der Voraussetzung, *dass die Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden*, ebenso gut mit den Resultaten der Versuche überein, wie die Gleichungen von Fresnel.

Wir betrachten noch die Bewegungscomponente nach der

Richtung des Einfallslothes beim Uebergange von einem Medium zum anderen. Die Componente oberhalb der Grenzfläche ist $\xi_1 + \xi_3$, unterhalb derselben aber ξ_2. Aus (a) und (g) erhalten wir

$$\xi_1 + \xi_3 = 2\,\varrho' . \sin\alpha . \cos\alpha . \sin\beta . s_1 / (\varrho . \sin\alpha . \cos\beta + \varrho' . \cos\alpha . \sin\beta),$$
$$\xi_2 = 2\,\varrho . \sin\alpha . \cos\alpha . \sin\beta . s_1 / (\varrho . \sin\alpha . \cos\beta + \varrho' . \cos\alpha . \sin\beta).$$

Daraus ergiebt sich also

$$\xi_1 + \xi_3 = \zeta_2 \cdot \varrho' / \varrho.$$

Nehmen wir mit F. E. Neumann an, dass $\varrho' = \varrho$ ist, so ergiebt sich $\xi_1 + \xi_3 = \xi_2$, d. h. *die Schwingungscomponenten senkrecht zur Grenzfläche sind oberhalb und unterhalb derselben gleich gross.* Bei Fresnel's Annahme erhalten wir aber

(m) $$\xi_1 + \xi_3 = N^2 . \xi_2.$$

Die Gleichungen von Fresnel stimmen nur völlig mit den Erfahrungen überein, wenn das Brechungsverhältniss ungefähr 1,5 ist; es zeigt sich, dass nur in diesem Falle beim Polarisationswinkel $s_3 = 0$ wird. In anderen Fällen wird s_3 ein Minimum, aber verschwindet nicht. Man hat auf verschiedene Weise versucht, dieses zu erklären. L. Lorenz nimmt zur Erklärung an, dass der Uebergang von dem einen Medium zum anderen nicht plötzlich geschieht, sondern durch eine Schicht von ausserordentlich geringer Dicke.

§ 99. Die electromagnetische Lichttheorie.

Im § 94 haben wir gesehen, dass sich die electrischen Schwingungen im leeren Raume und in einer grossen Anzahl Isolatoren mit der Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Aus diesem Grunde liegt die Annahme nahe, dass das Licht in electrischen Schwingungen besteht. Wir haben ferner im § 94 gesehen, dass eine ebene Welle der electrischen Kraft und der magnetischen Kraft parallel ist. Im einfachsten Falle ist die electrische Kraft F zur magnetischen Kraft M senkrecht. Ist die Permeabilität des Mediums $\mu = 1$, was näherungsweise für die meisten der isolirenden Körper der Fall ist, so haben wir nach § 94

(a) $$M = NF,$$

wo N das Brechungsverhältniss ist.

Wir entwickeln nun die gewöhnlichen Ausdrücke für das reflectirte und durchgehende Licht und betrachten zunächst die Grenzbedingungen. Da kein freier Magnetismus vorhanden ist und da die electrische Stromstärke überall endlich ist, so ändert sich die magnetische Kraft continuirlich beim Uebergange von einem Medium zum anderen. Wir nehmen die brechende Fläche als yz-Ebene und die x-Achse dem Einfallsloth parallel. Sind α, β, γ die Componenten der magnetischen Kraft auf der einen Seite der brechenden Fläche und α', β', γ' die Componenten auf der anderen Seite derselben, so ist demnach

(b) $$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma'.$$

Die electrische Kraft rührt theilweise von der Induction her, theilweise von freier Electricität auf der brechenden Fläche. Die Oberflächendichte auf der letzteren sei σ. X, Y, Z seien die Componenten der electrischen Kraft unmittelbar oberhalb der brechenden Fläche und X', Y', Z' die Componenten unmittelbar unterhalb der brechenden Fläche. Dann haben wir nach § 66 (h)

$$4\pi\sigma = X - KX', \quad Y = Y', \quad Z = Z'.$$

Die Componenten der electrischen Kraft, welche der brechenden Fläche parallel sind, ändern sich also stetig beim Uebergange von der einen Seite der brechenden Fläche zur anderen.

SO, OB und OT (Fig. 114) seien bezw. die Richtungen des einfallenden, des gebrochenen und des reflectirten Strahles. *Die Richtung der magnetischen Kraft M_1 liege in der Einfallsebene und die electrische Kraft ist also zu dieser Ebene senkrecht.* Nach der im § 94 gegebenen Regel ist die electrische Kraft nach innen gerichtet und senkrecht zur Ebene der Zeichnung. Da die magnetische Kraft sich continuirlich ändert, so erhalten wir in Rücksicht auf die in der Figur 114 angegebenen Richtungen

(d) $$M_1 . \cos\alpha - M_3 . \cos\alpha = M_2 . \cos\beta,$$

(e) $$M_1 . \sin\alpha + M_3 . \sin\alpha = M_2 \sin\beta.$$

Da auch die electrische Kraft sich continuirlich ändert, so ist

(f) $$F_1 + F_3 = F_2.$$

Nach der Gleichung (a) haben wir aber

$$M_1 = F_1, \quad M_3 = F_3 \quad \text{und} \quad M_2 = N F_2,$$

wenn $N = \sin\alpha / \sin\beta$ das Verhältniss zwischen den Geschwindigkeiten in dem ersten und zweiten Medium ist. Demnach sind die Gleichungen (e) und (f) identisch. Aus (f) und (d) erhalten wir

$$\text{(g)} \qquad \begin{cases} F_2 = F_1 \,.\, 2 \cos\alpha \,.\, \sin\beta / \sin(\alpha + \beta); \\ F_3 = - F_1 \sin(\alpha - \beta) / \sin(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Sodann sei die Richtung der elektrischen Kraft der Einfallsebene parallel (Fig. 115). Sind die electrischen Kräfte positiv in den in der Fig. 115 angedeuteten Richtungen, so gehen die

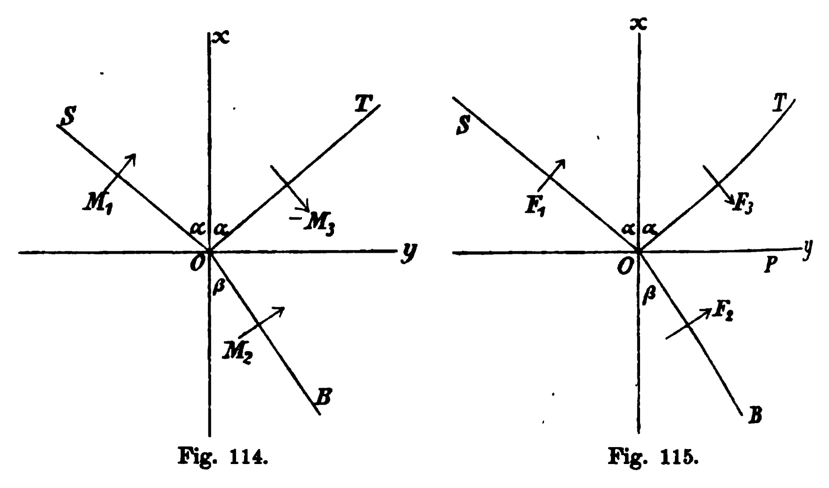


Fig. 114. Fig. 115.

positiven Richtungen der magnetischen Kräfte für die Strahlen SO und OB nach aussen, für den Strahl OT aber nach innen.

Die Grenzbedingungen lauten

$$\text{(h)} \qquad F_1 \,.\, \cos\alpha + F_3 \,.\, \cos\alpha = F_2 \,.\, \cos\beta,$$

$$\text{(i)} \qquad M_1 - M_3 = M_2 \,.$$

Auch hier ist $M_1 = F_1$, $M_3 = F_3$, $M_2 = N F_2$, sodass

$$\text{(k)} \qquad \begin{cases} F_2 = F_1 \,.\, 2 \cos\alpha \,.\, \sin\beta / \sin(\alpha + \beta) \,.\, \cos(\alpha - \beta) \text{ und} \\ F_3 = - F_1 \,.\, \operatorname{tg}(\alpha - \beta) / \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \end{cases}$$

wird.

Die Gleichungen (g) und (k) entsprechen den Fresnel'schen Gleichungen § 98 (k). *Die electromagnetische Lichttheorie führt also zu denselben Resultaten, welche die Formeln von Fresnel ergeben, wenn die electrische Kraft mit den Schwingungsrichtungen nach Fresnel parallel ist.*

Mit Hülfe des im § 96 entwickelten Satzes von Poynting können wir ferner zeigen, dass die Energie, welche während einer gegebenen Zeit der brechenden Fläche durch den einfallenden Strahl zugeführt wird, gleich derjenigen Energie ist, die im zurückgeworfenen und gebrochenen Strahle fortgeführt wird. Da in dem betrachteten Falle die Richtung der electrischen Kraft zur Richtung der magnetischen Kraft senkrecht ist, so ist die Energie, welche in einer Secunde durch die Flächeneinheit hindurchgeht, gleich $VMF/4\pi$. Die Grenzfläche S erhält in der Zeiteinheit die Energiemenge $1/4\pi . VM_1F_1 . S\cos\alpha$. In derselben Weise bestimmen wir die reflectirte und durchgegangene Energiemenge und haben dann

$$1/4\pi . VM_1F_1 . S . \cos\alpha = 1/4\pi . VM_2F_2 . S . \cos\beta + 1/4\pi . VM_3F_3 . S . \cos\alpha$$

oder

$$(M_1F_1 - M_3F_3) . \cos\alpha = M_2F_2 . \cos\beta .$$

In Rücksicht auf die Beziehungen zwischen der elektrischen und magnetischen Kraft erhalten wir dann

$$(F_1^2 - F_3^2)\cos\alpha = NF_2^2 . \cos\beta .$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn die electrische Kraft zur Einfallsebene senkrecht ist oder zur Einfallsebene parallel ist. Dieses ergiebt sich aus den Gleichungen (g) und (k).

§ 100. Die Gleichungen der electromagnetischen Lichttheorie.

Betrachten wir nun solche Körper, in denen keine Absorption des Lichtes stattfindet und in denen die Geschwindigkeit des Lichtes nach allen Richtungen hin gleich gross ist, so haben wir nach § 93 (e) für die electrische Kraft die Differentialgleichungen

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} 1/\omega^2 . \partial^2 X/\partial t^2 = \nabla^2 X, \quad 1/\omega^2 . \partial^2 Y/\partial t^2 = \nabla^2 Y, \\ 1/\omega^2 . \partial^2 Z/\partial t^2 = \nabla^2 Z, \quad \partial X/\partial x + \partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z = 0. \end{cases}$$

Die *Grenzbedingungen* ergeben sich aus der Bemerkung, dass die der Grenzfläche parallelen Componenten der electrischen und magnetischen Kräfte zu beiden Seiten der Grenzfläche gleich gross sind. Ist die x-Axe zur brechenden Fläche senkrecht, so haben wir also

(b) $$Y = Y', \; Z = Z'; \; \beta = \beta', \; \gamma = \gamma'.$$

Die beiden letzten der Bedingungen (b) können wir auch nach § 93 (c) in der Form

(c) $$\begin{cases} \partial X / \partial z - \partial Z / \partial x = \partial X' / \partial z - \partial Z' / \partial x; \\ \partial Y / \partial x - \partial X / \partial y = \partial Y' / \partial x - \partial X' / \partial y \end{cases}$$

darstellen.

Eine ebene Lichtwelle bewege sich in einer Richtung, die mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus l, m, n sind. Im Anfangspunkte sei die electrische Kraft f ausgedrückt durch

$$f = F . \cos (2 \pi t / T).$$

In einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, ist die electrische Kraft dann

$$f = F . \cos \left[2 \pi / T \left(t - (l x + m y + n z) / \omega \right) \right].$$

Bildet die Richtung der electrischen Kraft mit den Axen Winkel, deren Cosinus λ, μ, ν sind, so haben wir

$$X = \lambda f, \quad Y = \mu f, \quad Z = \nu f.$$

Diese Ausdrücke genügen den Gleichungen (b); damit sie auch die letzte der Gleichungen (a) befriedigen, muss

$$l \lambda + m \mu + n \nu = 0$$

sein, d. h. *die Richtung der electrischen Kraft ist zur Fortpflanzungsrichtung senkrecht.*

OP (Fig. 116) sei die brechende Fläche. SO, OB und OT seien bezw. der einfallende, der gebrochene und der reflectirte Strahl. Das Coordinatensystem soll in derselben Weise liegen wie im § 98. Für die einfallende Welle, bei welcher *die Richtung der elektrischen Kraft in der Einfallsebene liegt*, können wir

$$l = -\cos \alpha, \quad m = \sin \alpha, \quad n = 0;$$
$$\lambda = \sin \alpha, \qquad \mu = \cos \alpha, \quad \nu = 0$$

setzen. Für den reflectirten Strahl haben wir

$$l = \cos\alpha, \quad m = \sin\alpha, \quad n = 0;$$
$$\lambda = -\sin\alpha, \quad \mu = \cos\alpha, \quad \nu = 0$$

und für den gebrochenen Strahl

$$l = -\cos\beta, \quad m = \sin\beta, \quad n = 0,$$
$$\lambda = \sin\beta, \quad \mu = \cos\beta, \quad \nu = 0.$$

Ist aber die Richtung der electrischen Kraft zur Einfallsebene senkrecht, so haben wir

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1.$$

Sind F_1, F_2, F_3 die electrischen Kräfte für den einfallenden, gebrochenen und reflectirten Strahl, wenn dieselben in

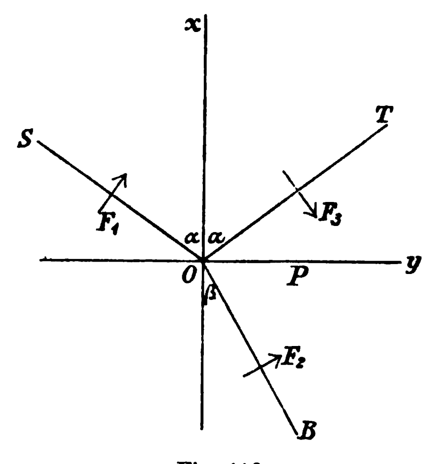


Fig. 116.

der Einfallsebene liegen, und sind Z_1, Z_2, Z_3 die electrischen Kräfte für dieselben Strahlen senkrecht zur Einfallsebene, so haben wir

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} X = F_1 . \sin\alpha . \cos V_1, \quad Y = F_1 . \cos\alpha . \cos V_1, \quad Z = Z_1 . \cos V_1, \\ V_1 = \left[2\pi \,/\, T . \left(t - (-x\cos\alpha + y\sin\alpha)/\omega\right)\right]. \end{cases}$$

Für den gebrochenen Strahl erhalten wir, wenn ω' die Lichtgeschwindigkeit in dem anderen Medium ist

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} X = F_2 . \sin\beta . \cos V_2, \quad Y = F_2 . \cos\beta . \cos V_2, \quad Z = Z_2 . \cos V_2, \\ V_2 = \left[2\pi / T . \left(t - (-x \cos\beta + y \sin\beta) / \omega' \right) \right]. \end{cases}$$

Für den reflectirten Strahl haben wir

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} X = -F_3 . \sin\alpha . \cos V_3, \quad Y = F_3 . \cos\alpha . \cos V_3, \quad Z = Z_3 . \cos V_3, \\ V_3 = \left[2\pi / T . \left(t - (x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega \right) \right]. \end{cases}$$

Zur leichteren Berechnung wollen wir an die Stelle der trigonometrischen Form

$$\text{(f)} \qquad \cos k \left(t - (-x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega \right)$$

den Ausdruck

$$\text{(g)} \qquad e^{ki\left(t - (-x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega\right)}$$

setzen, wo $i = \sqrt{-1}$ und $k = 2\pi / T$ ist. Aus dem endlichen Resultate wird nur der reelle Theil von (g), nämlich (f) entnommen. Beide Ausdrücke genügen derselben Differentialgleichung und deshalb kann bei der Berechnung der eine an die Stelle des anderen treten.

Wenn die Brechung an einer ebenen Fläche vorgeht, so können wir demnach an Stelle der Ausdrücke (c), (d) und (e) die folgenden setzen

$$\text{(h)} \quad \begin{cases} X = F_1 . \sin\alpha . e^{ki\left(t - (-x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega\right)}, \\ Y = F_1 . \cos\alpha . e^{ki\left(t - (-x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega\right)}, \\ Z = Z_1 . e^{ki\left(t - (-x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega\right)}; \end{cases}$$

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} X = F_2 . \sin\beta . e^{ki\left(t - (-x \cos\beta + y \sin\beta) / \omega'\right)}, \\ Y = F_2 . \cos\beta . e^{ki\left(t - (-x \cos\beta + y \sin\beta) / \omega'\right)}, \\ Z = Z_2 . e^{ki\left(t - (-x \cos\beta + y \sin\beta) / \omega'\right)}; \end{cases}$$

$$\text{k)} \quad \begin{cases} X = -F_3 . \sin\alpha . e^{ki\left(t - (x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega\right)}, \\ Y = F_3 . \cos\alpha . e^{ki\left(t - (x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega\right)}, \\ Z = Z_3 . e^{ki\left(t - (x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega\right)}. \end{cases}$$

Hierdurch sind die Componenten der electrischen Kraft für den einfallenden, gebrochenen und reflectirten Strahl ausgedrückt.

Um die Bedingungen (b) und (c) zu erfüllen, ist zunächst erforderlich, dass

$$\sin\alpha / \omega = \sin\beta / \omega'.$$

Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω und ω' constant sind, so können wir

$$N = \sin\alpha / \sin\beta$$

setzen, wo N das constante *Brechungsverhältniss* ist.

Nach den Gleichungen (b) haben wir

$$\text{(l)} \qquad (F_1 + F_3)\cos\alpha = F_2 \,.\, \cos\beta; \quad Z_1 + Z_3 = Z_2.$$

Aus (c) ergiebt sich

$$\text{(m)} \qquad \begin{cases} (F_1 - F_3)\sin\beta = F_2 \,.\, \sin\alpha; \\ (Z_1 - Z_3)\cos\alpha \,.\, \sin\beta = Z_2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\beta. \end{cases}$$

Aus (l) und (m) erhalten wir die Fresnel'schen Gleichungen [§ 98 (k)] für die reflectirte und gebrochene Welle. Die Aufgabe ist gelöst, wofern nicht β imaginär ist. Dieses tritt ein, wenn $\sin\beta > 1$, also $\sin\alpha > N$ ist. In diesem Falle müssen wir den vollständigen Ausdruck (i) und (k) für die Lichtbewegung benutzen.

Ist die electrische Kraft zur Einfallsebene senkrecht, so ist die reflectirte Welle durch den reellen Theil des Ausdruckes

$$\text{(n)} \qquad - Z_1 \,.\, \sin(\alpha - \beta) / \sin(\alpha + \beta) \,.\, e^{k i (t - (x \cos\alpha + y \sin\alpha) / \omega)}$$

bestimmt. Diesen Ausdruck erhalten wir mit Hülfe der letzten der Gleichungen § 98 (k). Da aber

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\alpha / N^2},$$

und also

$$\text{(o)} \qquad N i \,.\, \cos\beta = \sqrt{\sin^2\alpha - N^2}$$

ist, so haben wir

$$- \sin(\alpha - \beta) / \sin(\alpha + \beta)$$
$$= \left(\cos\alpha + i\sqrt{\sin^2\alpha - N^2}\right) / \left(\cos\alpha - i\sqrt{\sin^2\alpha - N^2}\right).$$

Setzen wir nun

$$\text{(p)} \qquad \cos\alpha = C \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\gamma, \quad \sqrt{\sin^2\alpha - N^2} = C \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

so ergiebt sich

(q) $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2} / \cos \alpha, \quad C^2 = 1 - N^2;$

(r) $- \sin (\alpha - \beta) / \sin (\alpha + \beta) = e^{i \gamma}.$

Der reelle Theil des Ausdruckes (n) lautet also

(s) $Z_1 . \cos [k (t - (x \cos \alpha + y \sin \alpha) / \omega) + \gamma].$

Demnach ist *die Reflexion vollständig*, da die Componente Z_1 sowohl im Ausdrucke für die einfallende als in dem Ausdrucke für die reflectirte Welle auftritt. Aber während bei der gewöhnlichen Reflexion keine Phasendifferenz für die beiden Wellen auftritt, haben wir in dem betrachteten Falle die Phasendifferenz γ, welche sich aus (q) bestimmen lässt.

Sind die electrischen Kräfte für die einfallende Welle parallel der Einfallsebene, so bestimmen wir den reellen Theil des Ausdruckes

(t) $- F_1 . \operatorname{tg} (\alpha - \beta) / \operatorname{tg} (\alpha + \beta) . e^{k i (t - (x \cos \alpha + y \sin \alpha) / \omega)}.$

Benutzen wir die Gleichung (o), so ergiebt sich

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) / \operatorname{tg} (\alpha + \beta)$$
$$= (N^2 . \cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}) / (N^2 . \cos \alpha - i \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}).$$

Wird

(u) $N^2 . \cos \alpha = D . \cos \frac{1}{2} \delta; \quad \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2} = D . \sin \frac{1}{2} \delta$

gesetzt, sodass

(v) $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2} / N^2 \cos \alpha, \\ D^2 = N^4 . \cos^2 \alpha - N^2 + \sin^2 \alpha \end{cases}$

ist, so erhalten wir

(x) $\operatorname{tg} (\alpha - \beta) / \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = e^{i \delta}.$

Der reelle Theil von dem Ausdrucke (t) wird also

(y) $- F_1 \cos [k (t - (x \cos \alpha + y \sin \alpha) / \omega) + \delta].$

Die Reflexion ist also vollständig. Zur Bestimmung der *Phasendifferenz* δ zwischen der reflectirten und der einfallenden Welle dient die Gleichung (v). Aus (q) und (v) erhalten wir

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\delta - \gamma) = \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2} / \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Ist α_0 der *Grenzwinkel der totalen Reflexion*, so ist $N = \sin \alpha_0$, und wir haben demnach

(z) $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta - \gamma) = \sqrt{\sin (\alpha + \alpha_0) . \sin (\alpha - \alpha_0)} / \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha.$

Da δ und γ von einander verschieden sind, so ist ein linear polarisirter Lichtstrahl, dessen Schwingungsebene einen beliebigen Winkel mit der Einfallsebene bildet, nach der Reflexion elliptisch polarisirt.

Ist die electrische Kraft zur Einfallsebene senkrecht, so ist das *durchgehende Licht* durch den reellen Theil des Ausdruckes

$$(\alpha) \qquad Z_1 \,.\, 2\cos\alpha \sin\beta \,/\, \sin(\alpha+\beta) \,.\, e^{ki(t-(-x\cos\beta+y\sin\beta)/\omega')}$$

bestimmt.

In Rücksicht auf (p) ist

$$2\cos\alpha\sin\beta \,/\, \sin(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha \,/\, C \,.\, e^{{}^1\!/_2 i\gamma}$$

und

$$(-x\cos\beta + y\sin\beta)\,/\,\omega' = (ix\sqrt{\sin^2\alpha - N^2} + y\sin\alpha)\,/\,\omega\,.$$

Der reelle Theil von (α) ist demnach

$$(\beta) \quad 2\cos\alpha \,/\, C \,.\, e^{kx\sqrt{\sin^2\alpha - N^2}/\omega} \,.\, Z_1 \,.\, \cos\left[k(t - y\sin\alpha\,/\,\omega) + \tfrac{1}{2}\gamma\right].$$

Da $C^2 = 1 - N^2$ ist, so erhalten wir für die *Intensität des durchgehenden Lichtes*, wenn mit λ die Wellenlänge bezeichnet wird,

$$4\cos^2\alpha \,/\, (1-N^2) \,.\, Z_1^{\,2} \,.\, e^{4\pi x\sqrt{\sin^2\alpha - N^2}/\lambda}\,.$$

In dem betrachteten Falle tritt also auch eine Lichtbewegung auf, welche dem gebrochenen Strahle bei der gewöhnlichen Brechung entspricht; aber dieselbe ist nur merklich in sehr geringem Abstande von der brechenden Fläche.

Aehnliche Resultate ergeben sich bei der Untersuchung des gebrochenen Strahles, wenn *die electrische Kraft des einfallenden Lichtes der Einfallsebene parallel ist.*

Anmerkung: Um den reellen Theil eines Ausdruckes von der Form (n) zu erhalten, kann man auch folgende Methode benutzen. Dem Ausdrucke (n) wird die Form

$$(A + Bi) \,.\, e^{i\psi} = (A + Bi)(\cos\psi + i\sin\psi)$$

gegeben. Der reelle Theil hiervon ist

$$R = A \,.\, \cos\psi - B \,.\, \sin\psi\,.$$

Setzt man nun $A = C \,.\, \cos\gamma$, $B = C \,.\, \sin\gamma$, so ergiebt sich

$$(\gamma) \qquad R = C \,.\, \cos(\psi + \gamma),$$

Setzen wir nun

$$k\,a\,.\cos\beta\,/\,\omega' = u,\quad k\,a\,.\cos\alpha\,/\,\omega = v,$$

so können wir die letzte Bedingung in der Form

(b) $$Z_2\,.\,e^{-ui} + Z_4\,.\,e^{ui} = Z_5\,.\,e^{-vi}$$

schreiben.

Für $x = 0$ haben wir ferner

$$\partial Z'\,/\,\partial x = \partial Z\,/\,\partial x,$$

und ebenso für $x = -a$

$$\partial Z'\,/\,\partial x = \partial Z''\,/\,\partial x\,.$$

Diese Bedingungsgleichungen ergeben

(c) $$(Z_1 - Z_3)\cos\alpha\,.\sin\beta = (Z_2 - Z_4)\sin\alpha\,.\cos\beta$$

und

(d) $$(Z_2\,.\,e^{-ui} - Z_4\,.\,e^{ui})\sin\alpha\,.\cos\beta = Z_5\,.\,e^{-vi}\,.\cos\alpha\,.\sin\beta.$$

Aus (b) und (d) ergiebt sich

$$Z_4\,/\,Z_2 = e^{-2ui}\,.\sin(\alpha - \beta)\,/\sin(\alpha + \beta),$$

oder, wenn $\sin(\alpha - \beta)\,/\sin(\alpha + \beta) = \varepsilon$ ist,

$$Z_4\,/\,Z_2 = \varepsilon\,.\,e^{-2ui}\,.$$

Aus (a) und (c) ergiebt sich zunächst

$$Z_3\,/\,Z_1 = (-\,\varepsilon Z_2 + Z_4)\,/\,(Z_2 - \varepsilon Z_4),$$

und also

(e) $$Z_3/Z_1 = -\left(e^{ui} - e^{-ui}\right)/\left(1/\varepsilon\,.\,e^{ui} - \varepsilon\,.\,e^{-ui}\right).$$

Wenn N grösser als 1 ist, so ist u stets reell, und wir können

$$Z_3\,/\,Z_1 = -\,2\,i\,\varepsilon\,.\sin u\,/\,[(1 - \varepsilon^2)\cos u + (1 + \varepsilon^2)\,i\,.\sin u]$$

setzen. Bezeichnen wir die Intensität des reflectirten Lichtes mit C^2, so erhalten wir durch die am Schlusse des § 100 angedeutete Methode

$$C^2 = Z_1^{\,2}\,.\,4\varepsilon^2\,.\sin^2 u\,/\,[(1 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2\,.\sin^2 u].$$

Weil aber

$$k = 2\pi\,/\,T = 2\pi\,\omega\,/\,\lambda \quad\text{und}\quad u = 2\pi\,.\,N\,.\cos\beta\,.\,a\,/\,\lambda$$

ist, so ergiebt sich

$$\text{(f)} \quad \left\{ \begin{array}{l} C^2 = Z_1^2 . 4\varepsilon^2 . \sin^2(2\pi N . \cos\beta . a / \lambda) / [(1-\varepsilon^2)^2 \\ \qquad + 4\varepsilon^2 . \sin^2(2\pi N . \cos\beta . a / \lambda)]. \end{array} \right.$$

Demnach wird kein Licht reflectirt, wenn

$$2\pi N . \cos\beta . a / \lambda = p\pi$$

ist, wo p eine ganze Zahl bedeutet. Dieses Resultat ist besonders bei der Untersuchung der Newton'schen Ringe von Bedeutung.

Ist dagegen $N < 1$ und zugleich $\sin\alpha > N$, so wird β imaginär. In diesem Falle können wir die Gleichung (f) nicht mehr benutzen. Dann haben wir nach § 100 (o)

$$Ni . \cos\beta = \sqrt{\sin^2\alpha - N^2}$$

und demnach

$$u i = 2\pi a / \lambda . \sqrt{\sin^2\alpha - N^2}.$$

Nach § 100 (r) ist $\varepsilon = -e^{+i\gamma}$. Setzen wir ferner $m = ui$, so erhält die Gleichung (e) die Form

$$Z_3 / Z_1 = (e^m - e^{-m}) / (e^{m-\gamma i} - e^{-m+\gamma i}).$$

Bezeichnen wir mit C^2 die Intensität des reflectirten Lichtes, so ergiebt sich in derselben Weise wie vorhin

$$\text{(g)} \qquad C^2 = Z_1^2 . 1 / [1 + 4\sin^2\gamma / (e^m - e^{-m})^2],$$

wo

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\sin^2\alpha - N^2} / \cos\alpha$$

und

$$m = 2\pi a / \lambda . \sqrt{\sin^2\alpha - N^2} \quad \text{ist.}$$

Die Verhältnisse, welche wir hier betrachtet haben, treten bei zwei durchsichtigen Körpern auf, welche durch eine Luftschicht getrennt sind. Ist die Dicke der Luftschicht sehr viel grösser als die Wellenlänge des Lichtes, so tritt eine vollständige Reflexion ein. Dieses ist in Uebereinstimmung mit der Gleichung (g), welche für den betrachteten Fall $C^2 = Z_1^2$ ergiebt. Ist dagegen a im Vergleiche zur Wellenlänge klein, so sucht alles Licht durch die Luftschicht zu dringen. In Folge dessen zeigt sich der schwarze Fleck, wenn die Hypotenusenfläche eines rechtwinkligen Glasprisma auf eine Fläche einer convexen Linse mit grosser Brennweite gelegt wird. Ist

der Einfallswinkel α im Glasprisma kleiner als der Grenzwinkel der totalen Reflexion, so zeigt sich ein dunkler Fleck, umgeben von farbigen Ringen; ist aber der Einfallswinkel grösser als der Grenzwinkel der totalen Reflexion, so verschwinden die Ringe, aber der Fleck bleibt zurück. Der Fleck ist grösser bei Benutzung von rothem Licht, als bei Anwendung von blauem Lichte. Dieses Resultat ergiebt sich auch aus dem Ausdrucke für die Intensität des reflectirten Lichtes. Das durchgehende Licht ist complementär zum reflectirten Lichte.

II. *Ist aber die Richtung der electrischen Kraft des einfallenden Lichtes zur Einfallsebene parallel,* so bestimmt sich die Lichtbewegung ausserhalb der Oberfläche A durch

$$X = F_1 \,.\, \sin\alpha \,.\, e^{ki(t-(-x\cos\alpha + y\sin\alpha)/\omega)} - F_3 \,.\, \sin\alpha \,.\, e^{ki(t-(x\cos\alpha + y\sin\alpha)/\omega)},$$

$$Y = F_1 \,.\, \cos\alpha \,.\, e^{ki(t-(-x\cos\alpha + y\sin\alpha)/\omega)} + F_3 \,.\, \cos\alpha \,.\, e^{ki(t-(x\cos\alpha + y\sin\alpha)/\omega)}.$$

Dagegen ergiebt sich die Lichtbewegung innerhalb der Platte aus

$$X' = F_2 \,.\, \sin\beta \,.\, e^{ki(t-(-x\cos\beta + y\sin\beta)/\omega')} - F_4 \,.\, \sin\beta \,.\, e^{ki(t-(x\cos\beta + y\sin\beta)/\omega')},$$

$$Y' = F_2 \,.\, \cos\beta \,.\, e^{ki(t-(-x\cos\beta + y\sin\beta)/\omega')} + F_4 \,.\, \cos\beta \,.\, e^{ki(t-(x\cos\beta + y\sin\beta)/\omega')}$$

und ausserhalb der Oberfläche B aus

$$X'' = F_5 \,.\, \sin\alpha \,.\, e^{ki(t-(-x\cos\alpha + y\sin\alpha)/\omega)},$$

$$Y'' = F_5 \,.\, \cos\alpha \,.\, e^{ki(t-(-x\cos\alpha + y\sin\alpha)/\omega)}.$$

Wir müssen nun die Constanten F_2, F_3, F_4, F_5 bestimmen. Für $x = 0$ geben die Grenzbedingungen, dass $Y = Y'$ oder

$$\text{(h)} \qquad (F_1 + F_3)\cos\alpha = (F_2 + F_4)\cos\beta.$$

Für $x = -a$ haben wir ebenso

$$F_2 \,.\, \cos\beta \,.\, e^{-kia\,.\,\cos\beta/\omega'} + F_4 \,.\, \cos\beta \,.\, e^{kia\,.\,\cos\beta/\omega'} = F_5 \,.\, \cos\alpha \,.\, e^{-kia\,.\,\cos\alpha/\omega}.$$

Wenden wir dieselbe Bezeichnung wie früher an, so ergiebt sich

(i) $F_2 . \cos\beta . e^{-ui} + F_4 . \cos\beta . e^{ui} = F_5 . \cos\alpha . e^{-vi}.$

Für $x = 0$ haben wir ferner

$$\partial Y / \partial x - \partial X / \partial y = \partial Y' / \partial x - \partial X' / \partial y,$$

oder

(k) $(F_1 - F_3)\sin\beta = (F_2 - F_4)\sin\alpha.$

Für $x = -a$ gilt dieselbe Bedingung oder

(l) $F_2 . \sin\alpha . e^{-ui} - F_4 . \sin\alpha . e^{ui} = F_5 . \sin\beta . e^{-vi}.$

Aus den Gleichungen (i) und (l) erhalten wir

$$F_4 / F_2 = e^{-2ui} . \operatorname{tg}(\alpha - \beta) / \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Setzen wir aber

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) / \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \varepsilon',$$

so wird

$$F_4 / F_2 = \varepsilon' . e^{-2ui}.$$

Aus (h) und (k) ergiebt sich

$$F_3 / F_1 = (-\varepsilon' + \varepsilon' . e^{-2ui}) / (1 - \varepsilon'^2 . e^{-2ui})$$

oder

(m) $F_3 / F_1 = -(e^{ui} - e^{-ui}) / (1/\varepsilon' . e^{ui} - \varepsilon' . e^{-ui}).$

Hieraus erhalten wir die Intensität D^2 des reflectirten Lichtes in derselben Weise wie sich der Ausdruck (f) aus (e) ergiebt

(n) $D^2 = F_1^2 . \dfrac{4\varepsilon'^2 . \sin^2(2\pi N \cos\beta\, a/\lambda)}{(1 - \varepsilon'^2)^2 + 4\varepsilon'^2 . \sin^2(2\pi N \cos\beta\, a/\lambda)}.$

Ist $\sin\alpha > N$ und demnach β imaginär, so erhalten wir die Intensität des reflectirten Lichtes in folgender Weise. Wir haben

$$\varepsilon' = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) / \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = e^{\delta i},$$

wenn, wie im § 100 (u),

$$N^2 . \cos\alpha = D . \cos\tfrac{1}{2}\delta, \quad \sqrt{\sin^2\alpha - N^2} = D . \sin\tfrac{1}{2}\delta$$

gesetzt wird. Setzen wir ferner $ui = m$, so ergiebt sich

$$F_3 / F_1 = (e^{m} - e^{-m}) / (e^{m - \delta i} - e^{-m + \delta i}).$$

Die Intensität D^2 des reflectirten Lichtes ist dann

(o) $D^2 = F_1^2 . 1 / \left(1 + 4\sin^2\delta / (e^{m} - e^{-m})^2\right),$

indem

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta = \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2} \,/\, N^2 \cos \alpha, \quad m = 2\pi a / \lambda \,.\, \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}$$

ist.

Die Ausdrücke (n) und (o) für die Intensität des reflectirten Lichtes, für welches die Richtung der electrischen Kraft der Einfallsebene parallel ist, führen im Wesentlichen zu demselben Resultate wie die Gleichungen (f) und (g), welche dann gelten, wenn die Richtung der electrischen Kraft zur Einfallsebene senkrecht ist. Wir bemerken nur noch, dass D^2 nach der Gleichung (n) verschwindet, wenn $s' = 0$ oder $(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\pi$ ist; in diesem Falle ist der Einfallswinkel gleich dem Polarisationswinkel.

§ 102. **Die Doppelbrechung.**

Bisher haben wir angenommen, dass die Grösse der *Dielectricitätsconstante* K von der Richtung der electrischen Kraft unabhängig ist. Indessen hat namentlich Boltzmann gezeigt, dass die Dielectricitätsconstante in den Krystallen verschiedene Werthe annimmt, und dass dieselbe von der Richtung der electrischen Kraft abhängt. In drei zu einander rechtwinkligen Richtungen, welche den Coordinatenaxen x, y, z entsprechen, habe die Dielectricitätsconstante die Werthe K_1, K_2, K_3. Dann treten an die Stelle der Gleichungen § 93 (a) die folgenden

$$\text{(a)} \quad u = K_1/4\pi . \partial X/\partial t, \quad v = K_2/4\pi . \partial Y/\partial t, \quad w = K_3/4\pi . \partial Z/\partial t.$$

Die Gleichungen § 93 (d) und (c) lauten

$$K_1/V . \partial X/\partial t = \partial\gamma/\partial y - \partial\beta/\partial z, \quad K_2/V . \partial Y/\partial t = \partial\alpha/\partial z - \partial\gamma/\partial x,$$
$$K_3 / V . \partial Z/\partial t = \partial\beta/\partial x - \partial\alpha/\partial y,$$

und wenn wir die magnetische Permeabilität $\mu = 1$ setzen,

$$-1/V . \partial\alpha/\partial t = \partial Z/\partial y - \partial Y/\partial z,$$
$$-1/V . \partial\beta/\partial t = \partial X/\partial z - \partial Z/\partial x,$$
$$-1/V . \partial\gamma/\partial t = \partial Y/\partial x - \partial X/\partial y.$$

Setzen wir ferner

$$a^2 = V^2/K_1, \quad b^2 = V^2/K_2, \quad c^2 = V^2/K_3,$$
$$J = \partial X/\partial x + \partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z,$$

so erhalten wir

$$\text{(b)}\qquad \begin{cases} 1/a^2 . \partial^2 X/\partial t^2 = \nabla^2 X - \partial J/\partial x, \\ 1/b^2 . \partial^2 Y/\partial t^2 = \nabla^2 Y - \partial J/\partial y, \\ 1/c^2 . \partial^2 Z/\partial t^2 = \nabla^2 Z - \partial J/\partial z. \end{cases}$$

Eine ebene Welle bewege sich durch den betrachteten Körper. Die Fortpflanzungsrichtung derselben sei durch die Winkel bestimmt, deren Cosinus l, m, n sind; die Richtung der electrischen Kraft f sei durch die Winkel bestimmt, deren Cosinus λ, μ, ν sind. Wir haben dann

$$\text{(c)}\qquad \begin{cases} X = \lambda f, \quad Y = \mu f, \quad Z = \nu f, \\ f = F . \cos\left[2\pi/T . \left(t - (lx + my + nz)/\omega\right)\right]. \end{cases}$$

F ist constant, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω allein von der Richtung abhängt, in welcher sich die Welle fortpflanzt. Aus (c) ergiebt sich

$$\nabla^2 X = -4\pi^2 \lambda f / T^2 \omega^2,$$

und wenn

$$\text{(d)}\qquad \cos\delta = l\lambda + m\mu + n\nu \quad \text{ist,}$$

$$J = 2\pi/T\omega . F . \cos\delta . \sin\left[2\pi/T . \left(t - (lx + my + nz)/\omega\right)\right].$$

Aus der ersten der Gleichungen (b) erhalten wir

$$\text{(d')}\qquad \lambda - l . \cos\delta = \omega^2 . \lambda / a^2.$$

Aus dieser Gleichung und den beiden zugehörigen ergiebt sich

$$\text{(e)}\qquad \begin{cases} (a^2 - \omega^2)\lambda = a^2 l . \cos\delta, \quad (b^2 - \omega^2)\mu = b^2 m . \cos\delta, \\ (c^2 - \omega^2)\nu = c^2 n . \cos\delta. \end{cases}$$

Diese Gleichungen (e) benutzen wir zur physikalischen Definition der Grössen a, b, c. Wenn $\omega = a$ ist, so haben wir entweder $l = 0$ oder $\cos\delta = 0$. In letzterem Falle ist

$$\mu = \nu = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = \pm 1$$

und zugleich auch $l = 0$. Demnach pflanzt sich eine ebene Welle, welche der x-Axe parallel ist, mit der Geschwindigkeit a fort, wenn die electrische Kraft derselben Axe parallel ist. In derselben Weise ergiebt sich die Bedeutung der Grössen b und c. Unter den *optischen Elasticitätsaxen a, b, c* verstehen wir die drei Richtungen im Körper, welche die

Eigenschaft haben, dass eine ebene Welle, für welche die electrische Kraft oder die Schwingungsrichtung der einen Axe, z. B. a, parallel ist, nach allen zur Axe a senkrechten Richtungen mit der Geschwindigkeit a fortgepflanzt wird.

Aus den Gleichungen (e) und (d) in Verbindung mit der Beziehung $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ können wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Kraftrichtung finden. Die Gleichungen (e) werden bezw. multiplicirt mit l, m, n, und addirt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (d)

$$a^2 l^2 / (a^2 - \omega^2) + b^2 m^2 / (b^2 - \omega^2) + c^2 n^2 / (c^2 - \omega^2) = 1.$$

Der Kürze wegen wollen wir für diese Gleichung

$$\Sigma a^2 l^2 / (a^2 - \omega^2) = 1$$

schreiben. Weil aber $a^2 = a^2 - \omega^2 + \omega^2$ ist, so haben wir auch

$$\Sigma a^2 l^2 / (a^2 - \omega^2) = \Sigma l^2 + \Sigma \omega^2 l^2 / (a^2 - \omega^2) = 1.$$

Da $\Sigma l^2 = 1$ ist, so ergiebt sich

$$\text{(f)} \qquad l^2 / (a^2 - \omega^2) + m^2 / (b^2 - \omega^2) + n^2 / (c^2 - \omega^2) = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf ω vom vierten Grade. Da je zwei Wurzeln einander dem absoluten Betrage nach gleich sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, so *hat die electrische Welle zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* ω_1 *und* ω_2.

Der Gleichung (f) können wir die Form

$$\text{(g)} \quad \left\{ \begin{aligned} \omega^4 - \left(l^2 (b^2 + c^2) + m^2 (a^2 + c^2) + n^2 (a^2 + b^2)\right) \omega^2 \\ + l^2 b^2 c^2 + m^2 a^2 c^2 + n^2 a^2 b^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

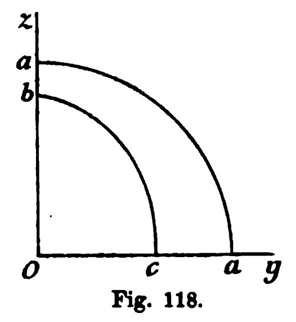


Fig. 118.

geben. Ist $l = 0$, d. h. ist die ebene Welle der x-Axe parallel, so haben wir

$$\omega^4 - (a^2 + m^2 c^2 + n^2 b^2) \omega^2 + a^2 (m^2 c^2 + n^2 b^2) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung lauten

$$\omega_1 = a, \quad \omega_2 = \sqrt{m^2 c^2 + n^2 b^2}.$$

Dieses Resultat können wir uns dadurch veranschaulichen, dass wir vom Punkte O (Fig. 118) in der yz-Ebene Linien ziehen, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten angeben. Die

Endpunkte dieser Linien liegen dann auf zwei Curven; die eine entspricht $\omega_1 = a$ und ist ein *Kreis*; die andere entspricht ω_2 und ist ein *Oval*. Ist $a > b > c$, so hat die Curve, welche ω_2 entspricht, ihre kleine halbe Axe c in der y-Axe und ihre grosse halbe Axe b in der z-Axe. Das Verhalten der ebenen

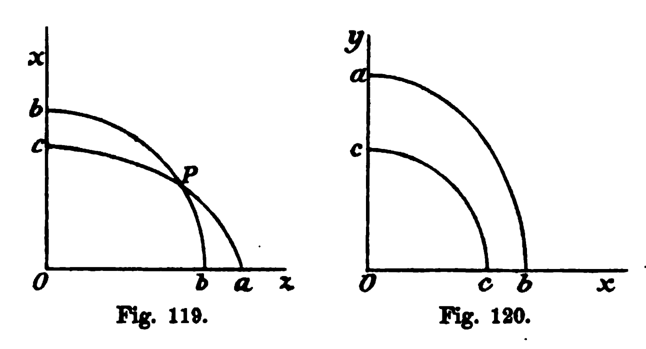


Fig. 119. Fig. 120.

Wellen, welche bezw. mit der y- und mit der z-Axe parallel sind, ist in Fig. (119) und (120) dargestellt. Besonders eigenthümlich ist das Verhalten in der xz-Ebene (Fig. 118). Wir haben nämlich für $m = 0$, dass

$$\omega_1 = b, \quad \omega_2 = \sqrt{l^2 c^2 + n^2 a^2}$$

ist, wobei $l^2 + n^2 = 1$. Die Fortpflanzungsrichtung, für welche beide Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2 gleich sind, ergiebt sich aus

$$l = \pm \sqrt{(a^2 - b^2) / (a^2 - c^2)}; \quad n = \pm \sqrt{(b^2 - c^2) / (a^2 - c^2)}.$$

§ 103. Die Discussion der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

Sind ω_1 und ω_2 die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten derselben ebenen Welle, so haben wir nach der Gleichung § 102 (g)

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 = l^2 (b^2 + c^2) + m^2 (a^2 + c^2) + n^2 (a^2 + b^2), \\ \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = l^2 b^2 c^2 + m^2 a^2 c^2 + n^2 a^2 b^2, \end{cases}$$

und

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 = \left(l^2 (b^2 + c^2) + m^2 (a^2 + c^2) + n^2 (a^2 + b^2)\right)^2 \\ - 4 (l^2 b^2 c^2 + m^2 a^2 c^2 + n^2 a^2 b^2).$$

Ferner ist mit Rücksicht auf die Gleichung

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

auch

$$l^2(b^2 - c^2) + m^2(a^2 - c^2) + n^2(a^2 - b^2)$$
$$= a^2 - c^2 - l^2(a^2 - b^2) - n^2(b^2 - c^2).$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen ergiebt sich aus der ersten der Gleichungen (b)

(f) $$\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2 = \pm (a^2 - c^2) . \sin E_1 . \sin E_2 .$$

Aus (e) und (f) erhalten wir

(g) $$\begin{cases} 2\,\omega_1{}^2 = a^2 + c^2 - (a^2 - c^2) . \cos (E_1 - E_2), \\ 2\,\omega_2{}^2 = a^2 + c^2 - (a^2 - c^2) . \cos (E_1 + E_2). \end{cases}$$

a ist der grösste, c der kleinste Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Dieses ergiebt sich, wenn wir $E_1 = E_2$ und $E_1 + E_2 = \pi$ setzen. Ist die Wellennormale mit einer der optischen Axen z. B. mit $O A_1$ parallel, so haben wir $E_1 = 0$ und $\cos \frac{1}{2} E_2 = l_0$, woraus $\omega_1 = \omega_2 = b$ folgt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also gleich der mittleren Elasticitätsaxe.

§ 104. Die Wellenfläche.

Vom Anfangspunkte des Coordinatensystems gehe eine ebene Welle aus, deren Normale mit den Axen Winkel bilden, deren Cosinus l, m, n sind. Nach Verlauf der Zeiteinheit hat die ebene Welle den Abstand ω vom Coordinatenanfangspunkte. Construirt man um sämmtliche Punkte der ursprünglichen Wellenebene die Wellenflächen nach Verlauf der Zeiteinheit, so ist die fortgepflanzte Wellenebene die Enveloppe der sämmtlichen Wellenflächen. Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Wellenebene in der neuen Stellung, so haben wir

(a) $$l x + m y + n z = \omega,$$

wobei ω durch folgende Gleichung

(b) $$l^2 / (a^2 - \omega^2) + m^2 / (b^2 - \omega^2) + n^2 / (c^2 - \omega^2) = 0$$

bestimmt ist. Ferner ist

(c) $$l^2 + m^2 + n^2 = 1 .$$

Wenn l, m, n und ferner zugleich ω sich ändern, so hüllen

die Ebenen (a) eine Fläche ein, welche als *Wellenfläche* bezeichnet wird. *Denken wir uns demnach durch einen Punkt alle möglichen Wellenebenen gelegt und betrachten wir die Lage derselben nach der Zeiteinheit, so ist die Wellenfläche die Enveloppe der sämmtlichen Wellenebenen, die wir erhalten haben.* Die Gleichung dieser Wellenfläche wollen wir jetzt aufsuchen. Aus (a), (c) und (b) erhalten wir

$$\text{(d)} \qquad x.dl + y.dm + z.dn = d\omega,$$

$$\text{(e)} \qquad l.dl + m.dm + n.dn = 0,$$

$$\text{(f)} \quad l.dl/(a^2-\omega^2) + m.dm/(b^2-\omega^2) + n.dn/(c^2-\omega^2) + F\omega.d\omega = 0,$$

wo

$$\text{(g)} \qquad F = l^2/(a^2-\omega^2)^2 + m^2/(b^2-\omega^2)^2 + n^2/(c^2-\omega^2)^2$$

ist. Eliminirt man $d\omega$ mittelst (d) aus der Gleichung (f), so ergiebt sich

$$[F\omega x + l/(a^2-\omega^2)]\,dl + [F\omega y + m/(b^2-\omega^2)]\,dm + [F\omega z + n/(c^2-\omega^2)]\,dn = 0.$$

Zur linken Seite dieser Gleichung addiren wir die mit einem Factor A multiplicirte Gleichung (e). Da dl, dm, dn als willkürliche Grössen betrachtet werden können, so haben wir

$$\text{(h)} \quad \begin{cases} l/(a^2-\omega^2) + F\omega x + Al = 0, \quad m/(b^2-\omega^2) + F\omega y + Am = 0, \\ n/(c^2-\omega^2) + F\omega z + An = 0. \end{cases}$$

Werden diese Gleichungen (h) der Reihe nach bezw. mit l, m, n multiplicirt und dann addirt, so erhalten wir mit Rücksicht auf (a) und (b)

$$A = -F\omega^2.$$

Also ist

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} l/(a^2-\omega^2) = F\omega(l\omega - x), \quad m/(b^2-\omega^2) = F\omega(m\omega - y), \\ n/(c^2-\omega^2) = F\omega(n\omega - z). \end{cases}$$

Erheben wir die linken und rechten Seiten dieser Gleichungen zum Quadrat und addiren wir dieselben, so ergiebt sich wegen der Gleichung (g)

$$1 = F\omega^2\left(\omega^2 - 2\omega(lx + my + nz) + r^2\right),$$

wobei

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gesetzt ist. Weiter erhalten wir mit Rücksicht auf (a)

$$F\omega^2(r^2-\omega^2)=1. \tag{k}$$

Aus den Gleichungen (i) kann nun F mittelst k eliminirt werden, und wir erhalten dann

$$\left\{\begin{aligned} x(a^2-\omega^2)&=l\omega(a^2-r^2),\quad y(b^2-\omega^2)=m\omega(b^2-r^2),\\ z(c^2-\omega^2)&=n\omega(c^2-r^2).\end{aligned}\right. \tag{l}$$

Diese Gleichungen gestatten den Berührungspunkt zwischen der Wellenfläche und der ebenen Welle, also *die Fortpflanzungsrichtung des Strahles* zu bestimmen. Die ebene Welle bewegt sich in der durch l, m, n bestimmten Richtung.

Multipliciren wir die rechten und linken Seiten der Gleichungen (l) bezw. mit x, y, z, so ergiebt sich durch Addition

$$x^2(a^2-\omega^2)/(a^2-r^2)+y^2(b^2-\omega^2)/(b^2-r^2)$$
$$+z^2(c^2-\omega^2)/(c^2-r^2)=\omega^2,$$

weil nach (a)

$$lx+my+nz=\omega$$

ist. Für die vorletzte Gleichung wollen wir abgekürzt schreiben

$$\Sigma x^2(a^2-\omega^2)/(a^2-r^2)=\omega^2$$

und erhalten dann bei Benutzung dieser abgekürzten Bezeichnungsweise

$$\Sigma x^2(a^2-\omega^2)/(a^2-r^2)=\Sigma x^2(a^2-r^2+r^2-\omega^2)/(a^2-r^2)$$
$$=\Sigma x^2+(r^2-\omega^2)\Sigma x^2/(a^2-r^2).$$

Weil aber in Rücksicht auf unsere Bezeichung

$$\Sigma x^2=x^2+y^2+z^2=r^2$$

ist, so ergiebt sich

$$(r^2-\omega^2)\left(1+\Sigma x^2/(a^2-r^2)\right)=0.$$

Die Gleichung der Wellenfläche lautet also

$$x^2/(a^2-r^2)+y^2/(b^2-r^2)+z^2/(c^2-r^2)+1=0.$$

Weil aber

$$\Sigma x^2/r^2=1 \text{ und } \Sigma\left(x^2/(a^2-r^2)+x^2/r^2\right)=\Sigma a^2x^2/(a^2-r^2)=0$$

ist, so können wir der Gleichung der Wellenfläche auch die Form

$$a^2x^2/(a^2-r^2)+b^2y^2/(b^2-r^2)+c^2z^2/(c^2-r^2)=0 \tag{m}$$

geben. Diese Gleichung können wir leicht umformen in

$$(\mathrm{n})\quad \begin{cases} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)r^2 - (b^2+c^2)a^2x^2 - (a^2+c^2)b^2y^2 \\ \qquad - (a^2+b^2)c^2z^2 + a^2b^2c^2 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung der Wellenfläche ist also vom vierten Grade. Zur näheren Untersuchung dieser Gleichung wollen wir

$$x = fr,\ y = gr,\ z = hr$$

setzen. Dann ergiebt sich

$$2r^2(a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2) - [(b^2+c^2)a^2f^2 + (a^2+c^2)b^2g^2 + (a^2+b^2)c^2h^2] = \pm R,$$

$$R^2 = [(b^2+c^2)a^2f^2 + (a^2+c^2)b^2g^2 + (a^2+b^2)c^2h^2]^2 - 4a^2b^2c^2(a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2).$$

Hieraus erhalten wir

$$R^2 = [(a^2-c^2)b^2g^2 + (af\sqrt{b^2-c^2} + ch\sqrt{a^2-b^2})^2] \cdot [(a^2-c^2)b^2g^2 + (af\sqrt{b^2-c^2} - ch\sqrt{a^2-b^2})^2]$$

Demnach schneidet eine gerade Linie, welche vom Coordinatenanfangspunkte ausgeht, die Fläche in zwei Punkten, welche zusammenfallen, wenn $R = 0$ ist, oder wenn

$$(\mathrm{o})\qquad g = 0 \ \text{und}\ f/h = \pm c/a \,.\, \sqrt{(a^2-b^2)/(b^2-c^2)}.$$

ist. Daraus erhalten wir

$$f = \pm c/b \,.\, \sqrt{(a^2-b^2)/(a^2-c^2)},\quad h = \pm a/b \,.\, \sqrt{(b^2-c^2)/(a^2-c^2)}.$$

Demnach sind vier Punkte der betrachteten Art in der Wellenfläche vorhanden. Dieselben liegen sämmtlich in der xz-Ebene. Die Wellenfläche ist also eine Oberfläche vierter Ordnung à deux nappes und zwar haben die beiden Nappen vier Punkte gemeinsam, welche wir als *Nabelpunkte* bezeichnen.

Zur besseren Uebersicht wollen wir die Schnittcurven zwischen der Wellenfläche und den Coordinatenebenen yz, xz, yx bestimmen. Zu diesem Zwecke setzen wir in der Gleichung (n) der Reihe nach $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$, so ergiebt sich

$$(y^2 + z^2 - a^2)(b^2y^2 + c^2z^2 - b^2c^2) = 0,$$
$$(z^2 + x^2 - b^2)(c^2z^2 + a^2x^2 - a^2c^2) = 0,$$
$$(x^2 + y^2 - c^2)(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2) = 0.$$

Demnach sind die Schnittcurven der Wellenfläche mit den Coordinatenaxen Kreise und Ellipsen, welche in den Figuren 122, 123 und 124 dargestellt sind. Besonderes Interesse bietet die xz-Ebene. Die Gleichung $z^2 + x^2 = b^2$ stellt einen Kreis mit dem Radius b dar. Die Gleichung $c^2 z^2 + a^2 x^2 - a^2 c^2 = 0$ liefert eine Ellipse, deren Halbaxen a und c sind. Unter der Voraussetzung $a > b > c$, schneiden sich der Kreis und

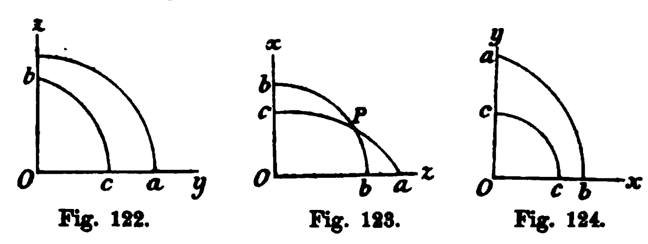


Fig. 122. Fig. 123. Fig. 124.

die Ellipse in einem Punkte P und dieser Punkt P ist einer der Nabelpunkte.

Die Gleichungen (l) und (h) dienen zur Bestimmung der Coordinaten des Berührungspunktes zwischen der Wellenfläche und einer ebenen Welle, welche sich in der durch l, m, n bestimmten Richtung bewegt.

Besonderes Interesse bietet der specielle Fall, in welchem *die Welle sich in der Richtung einer der optischen Axen bewegt.* In diesem Falle ist nach § 103 die Geschwindigkeit gleich b und die Fortpflanzungsrichtung ist durch die Gleichungen

$$m = 0, \quad l = \sqrt{(a^2 - b^2)/(a^2 - c^2)}, \quad n = \sqrt{(b^2 - c^2)/(a^2 - c^2)}$$

gegeben, indem wir hier nur diejenige optische Axe betrachten, welche zwischen den positiven Richtungen der z- und der x-Axe liegt. Die Gleichungen (l) lauten dann

$$x(a^2 - b^2) = l\,b\,(a^2 - r^2), \quad z(b^2 - c^2) = n\,b\,(r^2 - c^2).$$

Führen wir in diese Gleichungen, die oben angegebenen Werthe für l und n ein, so ergiebt sich

$$\text{(p)} \qquad \begin{cases} x\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = b\,(a^2 - r^2), \\ z\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} = b\,(r^2 - c^2). \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen zwei Kugeln dar, in deren Schnittlinie die Berührungspunkte zwischen der Wellenebene und der

Wellenfläche liegen. *Die Wellenebene berührt die Wellenfläche also längs eines Kreises in dem betrachteten Falle.*

Zu diesem Resultate gelangen wir auch auf folgendem Wege. Mit Rücksicht auf die Gleichungen § 103 (c) können wir (p) die Form

$$
\text{(q)} \qquad \begin{cases} x = b(a^2 - x^2 - y^2 - z^2) / l_0 (a^2 - c^2), \\ z = b(x^2 + y^2 + z^2 - c^2) / n_0 (a^2 - c^2) \end{cases}
$$

geben. Die durch diese beiden Gleichungen dargestellte Curve ist eine *ebene* Curve, weil

$$
\text{(r)} \qquad x\, l_0 + z\, n_0 = b \quad \text{ist.}
$$

Wir führen nun ein neues Coordinatensystem ein mit demselben Anfangspunkte; die η-Axe falle mit der y-Axe zusammen, während die ζ-Axe mit der optischen Axe zusammenfällt. Für diesen Zweck setzen wir

$$
\text{(s)} \qquad x = \xi n_0 + \zeta l_0, \quad y = \eta, \quad z = -\xi l_0 + \zeta n_0.
$$

Die Gleichung (r), welche eine Ebene darstellt, lautet dann

$$
\text{(t)} \qquad \zeta = b,
$$

d. h. *die Ebene der Schnittcurve ist senkrecht zur Richtung der optischen Axe und dieselbe geht durch den Endpunkt der letzteren.* Die erstere der Gleichungen (q) nimmt mit Rücksicht auf (s) und (t) die Form

$$
\text{(u)} \qquad \xi^2 + \xi \cdot n_0 l_0 (a^2 - c^2) / b + \eta^2 = 0
$$

an. Diese Gleichung stellt aber einen *Kreis* dar, welcher durch den Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$ und $\zeta = b$ oder durch den Endpunkt der optischen Axe hindurchgeht. Der Radius r des Kreises ist

$$
r = \sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)} / 2b
$$

und der Mittelpunkt des Kreises hat die Coordinaten

$$
\xi = -r, \quad \eta = 0, \quad \zeta = b.
$$

Damit ist der Kreis bestimmt, in welchem eine auf der optischen Axe in ihrem Endpunkte senkrechte Ebene die Wellenfläche berührt.

§ 105. Die Wellenfläche.
(Fortsetzung.)

ON (Fig. 125) sei die Normale einer ebenen Welle; die Richtung der Normalen ist durch die Cosinus l, m, n bestimmt. OP_1 und OP_2 seien die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche der betrachteten Welle entsprechen. Die Berührungspunkte zwischen der ebenen Welle und der Wellenfläche seien Q_1 und Q_2. Wir haben dann $OQ_1 = r_1$ und $OQ_2 = r_2$. Die Coordinaten der Punkte Q_1 und Q_2 bezeichnen wir bezw. mit x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2. Sind $Q_1P_1 = p_1$ und $Q_2P_2 = p_2$ die Senkrechten, welche von den Berührungspunkten auf die Fortpflanzungsrichtungen gefällt werden, so haben wir

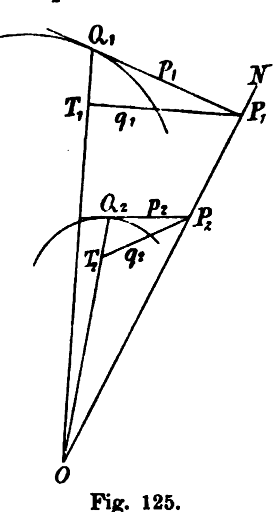


Fig. 125.

$$p_1^2 = r_1^2 - \omega_1^2$$

und

$$p_2^2 = r_2^2 - \omega_2^2.$$

Der Zusammenhang zwischen der Richtung der Normalen und den Berührungspunkten ist durch die Gleichungen (l) des § 104 gegeben. Die Richtungen der Linien p_1 und p_2 wollen wir näher betrachten. Die Projection von PQ auf die x-Axe ist $\omega l - x$. Bezeichnen wir die Cosinus der Winkel, welche p mit den Axen bildet, mit λ', μ', ν', so haben wir

$$\lambda' = (\omega l - x)/p, \quad \mu' = (\omega m - y)/p, \quad \nu' = (\omega n - z)/p.$$

Führen wir in diese Gleichung für x, y, z die Werthe aus den Gleichungen § 104 (l) ein, so ergiebt sich

$$\text{(a)} \quad \lambda' = l\omega p/(a^2 - \omega^2), \quad \mu' = m\omega p/(b^2 - \omega^2), \quad \nu' = n\omega p/(c^2 - \omega^2).$$

Um den Winkel zwischen P_1Q_1 und P_2Q_2 zu finden, bestimmen wir den Cosinus desselben

$$\cos(P_1Q_1 \wedge P_2Q_2) = \lambda_1'\lambda_2' + \mu_1'\mu_2' + \nu_1'\nu_2'$$

oder

$$\cos(P_1Q_1 \wedge P_2Q_2) = p_1 p_2 \omega_1 \omega_2 \Sigma l^2/(a^2 - \omega_1^2)(a^2 - \omega_2^2).$$

Weil aber nach § 102 (f)

$$\Sigma l^2 / (a^2 - \omega_1^2) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma l^2 / (a^2 - \omega_2^2) = 0$$

ist, so haben wir auch

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) \cdot \Sigma l^2 / (a^2 - \omega_1^2)(a^2 - \omega_2^2) = 0.$$

Wenn demnach ω_1 und ω_2 von einander verschieden sind, so ist $\cos(P_1 Q_1 \wedge P_2 Q_2)$ gleich Null, und der Winkel zwischen $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ ist also ein rechter Winkel. Wenn aber ω_1 gleich ω_2 ist, so fallen die Punkte P_1 und P_2 zusammen, wie wir im § 104 gesehen haben. In diesem Falle haben wir unendlich viele Berührungspunkte, welche auf einem Kreise liegen, der durch die Wellennormale hindurchgeht.

Werden von P_1 und P_2 die Linien $P_1 T_1$ und $P_2 T_2$ bezw. senkrecht zu $O Q_1$ und $O Q_2$ gezogen und bezeichnen wir $P_1 T_1 = q_1$ und $P_2 T_2 = q_2$, so ist

$$q : p = \omega : r, \quad \text{also} \quad q = p\,\omega / r.$$

Ferner ist $OT = \omega^2 / r$. Sind λ, μ, ν die Cosinus der Winkel, welche q mit den Coordinatenaxen bildet, so ist

$$\lambda = (\omega l - OT . x / r) / q \quad \text{u. s. w.}$$

Benutzen wir die Gleichungen § 104 (l), so ergiebt sich

$$\text{(b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda(a^2 - \omega^2) = l a^2 p / r, \quad \mu(b^2 - \omega^2) = m b^2 p / r, \\ \qquad\qquad \nu(c^2 - \omega^2) = n c^2 p / r. \end{array} \right.$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit den Ausdrücken in § 102 (e), welche die Richtung der electrischen Kraft F bestimmen, deren Componenten X, Y, Z sind, so zeigt sich, dass die electrische Kraft parallel q ist. Führen wir in die Gleichung § 102 (d) die oben für λ, μ, ν gegebenen Werthe ein und berücksichtigen wir, dass $l x + m y + n z = \omega$, so ergiebt sich $\cos \delta = p / r$. Da wir zwei Richtungen für q haben, nämlich q_1 und q_2, so gehören zu jeder ebenen Welle die Kraftrichtungen q_1 und q_2. Dieselben liegen in zwei Ebenen, die zur ebenen Welle senkrecht sind. δ hat zwei Werthe, nämlich $\sphericalangle O Q_1 P_1$ und $\sphericalangle O Q_2 P_2$, diese Winkel sind bezw. gleich $\sphericalangle T_1 P_1 O$ und $\sphericalangle T_2 P_2 O$.

Die electrischen Kräfte X, Y, Z rufen eine Polarisation hervor, deren Variation als ein electrischer Strom aufgefasst

werden kann. Die Stromcomponenten u, v, w sind nach § 102 (a) und (c)

$$u = K_1 / 4\pi . \partial X / \partial t = K_1 \lambda / 4\pi . \partial U / \partial t \text{ u. s. w.}$$

Sind λ_0, μ_0, ν_0 die Cosinus der Winkel, welche die Stromrichtung mit den Axen bildet, so haben wir

$$\lambda_0 : \mu_0 : \nu_0 = \lambda / a^2 : \mu / b^2 : \nu / c^2.$$

Mit Hülfe von § 102 (e) erhalten wir aber

$$\lambda_0 : \mu_0 : \nu_0 = l / (a^2 - \omega^2) : m / (b^2 - \omega^2) : n / (c^2 - \omega^2).$$

Wir haben demnach für den Strom zwei Richtungen entsprechend den beiden Werthen von ω. Zwischen den Cosinus der Winkel, welche p mit den Axen bildet, besteht nach der Gleichung (a) dasselbe Verhältniss wie zwischen den Richtungscosinus des Stromes. Demnach sind die beiden Stromrichtungen bezw. parallel mit p_1 und p_2.

Um die Richtung der electrischen Kraft und des Stromes zu bestimmen, verfahren wir folgendermaassen. Bewegt sich eine ebene Welle in der durch die Normale ON bestimmten Richtung, so werden zwei Ebenen construirt, welche die Wellenfläche berühren und zur ebenen Welle parallel sind. Diese Ebenen sind die in Q_1 und Q_2 construirten. Sodann zieht man $Q_1 P_1$ und $Q_2 P_2$ senkrecht zur Wellennormalen. Die electrischen Ströme, welche zu den Wellenebenen gehören, sind parallel mit $Q_1 P_1$ und $Q_2 P_2$, die entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind $O P_1$ und $O P_2$. Jede ebene Welle hat also zwei Stromrichtungen, die zu einander senkrecht sind. Die zu diesen Stromrichtungen gehörenden electrischen Kräfte sind parallel mit $P_1 T_1$ und $P_2 T_2$.

§ 106. Die Strahlenrichtung.

Wenn sich eine ebene Lichtwelle in einem isotropen Medium fortpflanzt, so fällt die Richtung der Normalen zur Welle mit der Strahlenrichtung zusammen. In einem doppelt brechenden Körper ist dagegen im Allgemeinen die Richtung des Strahles verschieden von der Richtung der Wellennormalen. Wir wollen die Richtung des Strahles bestimmen. MN (Fig. 126) sei die Oberfläche eines doppelt brechenden Körpers, auf

welche senkrecht der Strahlencylinder $KOPL$ fällt. Nach dem Huygen'schen Principe können die einzelnen Punkte in der Grenzfläche OP als Ausgangspunkte für die Lichtbewegung betrachtet werden. Die Lichtbewegung breitet sich aber in solcher Weise in dem Körper aus, dass sie nach Verlauf der Zeiteinheit auf den Wellenflächen angekommen ist, die um die einzelnen Punkte der Grenzfläche OP construirt werden

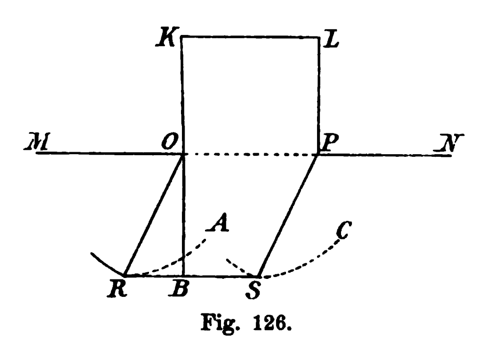


Fig. 126.

können. Werden also die Wellenflächen RA, SC u. s. w. um O und P und die zwischenliegenden Punkte construirt, so erhalten wir eine Ebene RS, welche jene Wellenflächen berührt und welche congruent und gleich gelagert mit OP ist. Die Richtung OR oder PS ist dann die Strahlenrichtung. Fällt man von O eine Senkrechte OB auf die Tangentialebene RS zur Wellenfläche RA, so ist OB die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, also $OB = \omega$. Sind l, m, n die Richtungscosinus der Normalen der Wellenfläche, so bestimmt sich ω aus der Gleichung § 102 (f)

$$\text{(a)} \qquad l^2 / (a^2 - \omega^2) + m^2 / (b^2 - \omega^2) + n^2 / (c^2 - \omega^2) = 0.$$

Die Lage des Berührungspunktes zwischen der Ebene RS und der Wellenfläche RA ergiebt sich aus § 104 (l) durch die Gleichungen

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} x(a^2 - \omega^2) = l\omega(a^2 - r^2), \quad y(b^2 - \omega^2) = m\omega(b^2 - r^2), \\ \qquad z(c^2 - \omega^2) = n\omega(c^2 - r^2), \end{cases}$$

wo x, y, z die Coordinaten des gesuchten Punktes und $OR = r$ der Abstand vom Coordinatenanfangspunkte. Während OB

die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle* ist, stellt OR die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles* dar.

Anstatt der Wellenfläche selbst kann man bisweilen mit Vortheil eine andere Fläche benutzen, nämlich die *reciproke Wellenfläche.* O (Fig. 127) möge der Mittelpunkt der Wellenfläche sein, AR sei ein Theil der Fläche selbst, und BR sei

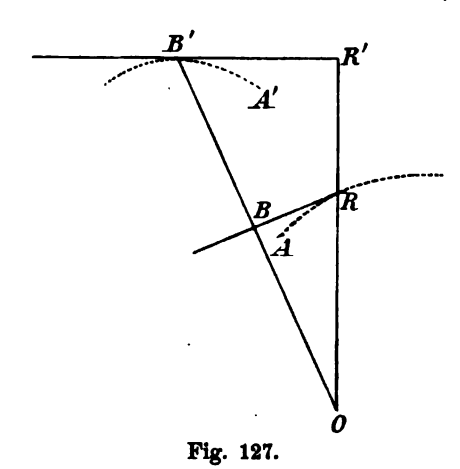


Fig. 127.

eine ebene Fläche, welche die Wellenfläche im Punkte R berührt. Vom Punkte O aus fällen wir die Senkrechte OB auf die Tangentialebene. In der Verlängerung der Senkrechten OB wird der Punkt B' in solcher Weise bestimmt, dass

(c) $$OB' = r' = s^2 / \omega$$

ist, wo $\omega = OB$ und s eine constante Grösse ist. Die reciproke Wellenfläche ist dann der geometrische Ort für die durch (c) bestimmten Punkte. Diese Fläche besteht ebenso wie die Wellenfläche aus zwei Nappen. Wir wollen die Gleichung der reciproken Wellenfläche entwickeln. Hat $OB = \omega$ die Richtungscosinus l, m, n und sind x', y', z' die Coordinaten des Punktes B', so haben wir

(d) $$x' = l r', \quad y' = m r', \quad z' = n r'.$$

Weil aber

$$l^2 / (a^2 - \omega^2) + m^2 / (b^2 - \omega^2) + n^2 / (c^2 - \omega^2) = 0$$

ist, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (c) und (d)

$$x'^2 / (a^2 r'^2 - s^4) + y'^2 / (b^2 r'^2 - s^4) + z'^2 / (c^2 r'^2 - s^4) = 0.$$

Wir setzen

(e) $$a' = s^2 / a, \quad b' = s^2 / b, \quad c' = s^2 / c$$

Demnach lautet *die Gleichung der reciproken Wellenfläche*

(f) $$a'^2 x'^2 / (a'^2 - r'^2) + b'^2 y'^2 / (b'^2 - r'^2) + c'^2 z'^2 / (c'^2 - r'^2) = 0.$$

Diese Fläche unterscheidet sich von der allgemeinen Wellenfläche [vergl. § 104 (m)] nur dadurch, dass ihre Constanten a', b', c' die reciproken Werthe der Constanten a, b, c der Wellenfläche sind.

Legen wir durch den Punkt B' (Fig. 127) eine Tangentialebene $B'R'$ zur reciproken Wellenfläche $B'A'$, so kann man zeigen, dass die Ebene $B'R'$ senkrecht zur Verlängerung von OR ist, also $OR' \perp B'R'$. Ist ferner $OR' = \omega'$, $OR = r$, so hat man

(g) $$\omega' = s^2 / r.$$

Dieses ergiebt sich durch dieselbe Betrachtung, durch welche wir von der einen Fläche zur anderen übergegangen sind. Wir können aber die Richtigkeit der Formel (g) auch direct nachweisen. Ist die Richtung von OR' durch die Cosinus l', m', n' bestimmt, so haben wir nach § 104 (l)

(h) $$x'(a'^2 - \omega'^2) = l' \omega' (a'^2 - r'^2) \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen (h) dienen zur Bestimmung von ω', l', m', n'. Setzen wir $\omega' = s^2 / r$ und

$$l' = x / r, \quad m' = y / r, \quad n' = z / r$$

und berücksichtigen wir die Gleichungen (c), (d), (e) und (g), so erhalten die Gleichungen (h) die Form

$$x(a^2 - \omega^2) = l \omega (a^2 - r^2) \text{ u. s. w.}$$

Da diese Gleichungen identisch sind mit denen in § 104 (l), so ergiebt sich, dass der Schnittpunkt zwischen OR' und der Wellenfläche derjenige Punkt ist, in welchem die Tangentialebene BR die Wellenfläche berührt. Aus (c) und (g) folgt ferner, dass

(i) $$r' \omega = r \omega' \text{ oder } OB . OB' = OR . OR'.$$

Um die Strahlenrichtung mit Hülfe der reciproken Wellenfläche

zu bestimmen, verlängern wir die Wellennormale bis zum Schnitt mit der reciproken Wellenfläche. Die Richtung des Strahles ist dann senkrecht zur Tangentialebene, die im Schnittpunkte construirt ist.

§ 107. Die einaxigen Krystalle.

Wenn zwei von den Constanten a, b, c gleich gross sind, z. B. $b = c$, so werden die Verhältnisse wesentlich einfacher und unsere Betrachtungen finden dann eine wichtige Anwendung bei der Brechung in den einaxigen Krystallen. Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 zu finden, wenden wir die Gleichung § 102 (g) an, welche übergeht in

$$\text{(a)} \quad \omega^4 - [b^2 + l^2 b^2 + (1 - l^2) a^2]\, \omega^2 + b^2 [l^2 b^2 + (1 - l^2) a^2] = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$\text{(b)} \quad \omega_1^2 = b^2, \quad \omega_2^2 = l^2 b^2 + (1 - l^2) a^2.$$

Demnach ist die eine Geschwindigkeit ω_1 constant; die Geschwindigkeit ω_2 hängt von der Richtung der Wellennormale ab oder von dem Winkel, welchen die Wellennormale mit der Elasticitätsaxe a bildet. Diese Axe bezeichnen wir als *optische Axe;* sie fällt mit der Hauptaxe des Krystalls zusammen. In der Richtung dieser optischen Axe haben wir nur *eine* Geschwindigkeit der Wellenebenen und also auch der Strahlen. Bezeichnen wir mit ε den Winkel zwischen der Wellennormale und der optischen Axe, so ist

$$\text{(c)} \quad \omega_2^2 = a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon.$$

Eine ebene Lichtwelle theilt sich also beim Eintritt aus einem isotropen in ein optisch einaxiges Medium in zwei Lichtwellen, von denen die eine sich mit der Geschwindigkeit ω_1 fortpflanzt, die von der Richtung der Wellennormale unabhängig ist. Diese Welle bezeichnen wir als die *gewöhnliche Welle.* Die andere Welle, welche als *ausserordentliche Welle* bezeichnet wird, hat eine Geschwindigkeit, die sich mit der Richtung der Wellennormale ändert.

Die Gleichung der Wellenfläche für die optisch einaxigen Krystalle erhalten wir aus § 104 (n), indem $b = c$ gesetzt wird.

Dann ergiebt sich

(d) $$(r^2 - b^2)\left(a^2 x^2 + b^2 (y^2 + z^2) - a^2 b^2\right) = 0.$$

Die Wellenfläche besteht also aus einer Kugel mit dem Radius b und einem Rotationsellipsoid mit der Polaraxe 2b und der Aequatorialaxe 2a; die Kugel und das Ellipsoid berühren sich einander in der Polaraxe. In Figur 128 ist AA_1 die Polaraxe oder die optische Axe, AR_1A_1 eine Schnittebene durch die Kugelfläche und AR_2A_1 eine Schnittebene durch das Ellipsoid. OB_2R_1 sei die Normale zur ebenen Welle POQ, B_1D und B_2R_2 sind zwei Tangentialebenen zur Wellenfläche, die beide zur Wellennormale senkrecht sind. OR_1 und OB_2 sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung der Wellennormale. Die von uns betrachtete Schnittebene, welche sowohl die optische Axe als auch die Wellennormale enthält, bezeichnen wir als *Hauptschnitt*. Für die ausserordentliche Welle ist OR_2 die Strahlenrichtung, wenn im Punkte R_2 die Ebene B_2R_2 das Ellipsoid berührt. Die Richtung der electrischen Kraft giebt B_2U_2, welches senkrecht zu OR_2 ist. Für die ordentliche Welle fallen Strahlenrichtung und Wellennormale zusammen und die Richtung der electrischen Kraft ist senkrecht zur Ebene der Figur.

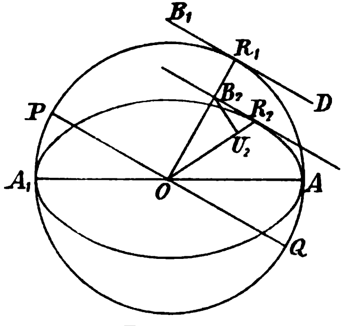


Fig. 128.

In der Figur 128 ist die Polaraxe $AA_1 = 2b$ grösser als die Aequatorialaxe $2a$; diejenigen Krystalle, für welche dieses zutrifft, bezeichnet man als *positive Krystalle*. Ist dagegen $a > b$, so ist der Krystall *negativ*. Die Kugel kann das Ellipsoid umschliessen oder umgekehrt; *Krystalle der ersteren Art nennt man positive, die der zweiten Art negative*. Kalkspath ist ein negativer Krystall, Bergkrystall ist ein positiver.

Setzen wir in § 102 (e) $\omega = b$, so ergiebt sich

(e) $$\lambda_1 = 0 \text{ und } \delta_1 = \tfrac{1}{2}\pi,$$

d. h. *die Richtung der electrischen Kraft für die ordentliche*

Welle ist sowohl senkrecht zur optischen Axe als auch zur Wellennormalen, sie ist also senkrecht zum Hauptschnitt, wie wir oben bereits bemerkt haben.

Um die Richtung der electrischen Kraft für die ausserordentliche Welle aus § 102 (e) zu erhalten, führen wir daselbst den in (b) angegebenen Werth für ω_2 ein und beachten, dass $l = \cos \varepsilon$, $m = \sin \varepsilon$, $n = 0$. Dann erhalten wir

$$\lambda_2 = \frac{a^2 \cos \delta_2}{(a^2 - b^2) \cos \varepsilon}, \quad \mu_2 = -\frac{b^2 \cos \delta_2}{(a^2 - b^2) \sin \varepsilon}, \quad \nu_2 = 0.$$

Demnach ist die Richtung der electrischen Kraft für die ausserordentliche Welle dem Hauptschnitte parallel. Aus den letzten Gleichungen ergiebt sich

$$1 / \cos^2 \delta_2 = (a^4 \sin^2 \varepsilon + b^4 \cos^2 \varepsilon) / (a^2 - b^2)^2 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon,$$

woraus

$$\text{(f)} \qquad \operatorname{tg} \delta_2 = \pm (a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon) / (a^2 - b^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$

folgt. Somit gelangen wir zu den Gleichungen

$$\text{(g)} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = \pm a^2 \sin \varepsilon / \sqrt{a^4 \sin^2 \varepsilon + b^4 \cos^2 \varepsilon}, \\ \mu_2 = \mp b^2 \cos \varepsilon / \sqrt{a^4 \sin^2 \varepsilon + b^4 \cos^2 \varepsilon}, \\ \nu_2 = 0. \end{cases}$$

§ 108. Die Doppelbrechung an einer Krystallfläche.

Wenn ein polarisirter Lichtstrahl auf die ebene Oberfläche eines doppelt brechenden Mediums trifft, so findet sowohl Reflexion wie auch Brechung statt. Die x-Axe des Coordinatensystems sei dem Einfallslothe parallel, die z-Axe sei senkrecht zur Einfallsebene; die y-Axe ist dann der Schnittlinie zwischen der Einfallsebene und der brechenden Fläche parallel. Für die Componenten der electrischen Kraft des einfallenden Strahles haben wir wie in § 100

$$\text{(a)} \qquad X_i = \lambda_i f_i, \quad Y_i = \mu_i f_i, \quad Z_i = \nu_i f_i,$$

$$f_i = F_i \cos \left[2\pi / T . \left(t - (-x \cos \alpha + y \sin \alpha) / \Omega\right)\right],$$

oder, wenn wir nur den reellen Theil berücksichtigen,

$$\text{(b)} \qquad f_i = F_i e^{k i [t - (-x \cos \alpha + y \sin \alpha) / \Omega]}.$$

In diesen Gleichungen ist α der Einfallswinkel und Ω die

Geschwindigkeit des Lichtes ausserhalb des Krystalles. Zu diesen Gleichungen kommt noch die Bedingung, dass die electrische Kraft zur Richtung des Strahles senkrecht ist. Da die Richtung des einfallenden Strahles mit den Axen die Winkel $\pi - \alpha$, $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ und $\frac{1}{2}\pi$ bildet, so ist demnach

(c) $$-\lambda_i \cos\alpha + \mu_i \sin\alpha = 0.$$

Bei der entsprechenden Bezeichnung für den reflectirten Strahl haben wir

(d) $$\begin{cases} X_r = \lambda_r f_r, \quad Y_r = \mu_r f_r, \quad Z_r = \nu_r f_r, \\ f_r = F_r \cdot e^{ki[t-(l_r x + m_r y + n_r z)/\Omega]}. \end{cases}$$

Damit die electrische Kraft senkrecht zur Richtung des Strahles ist, muss

(e) $$\lambda_r l_r + \mu_r m_r + \nu_r n_r = 0$$

sein. Endlich haben wir für den gebrochenen Strahl

(f) $$X_b = \lambda_b f_b, \quad Y_b = \mu_b f_b, \quad Z_b = \nu_b f_b,$$

(g) $$f_b = F_b e^{ki[t-(l_b x + m_b y + n_b z)/\omega]}.$$

ω hängt ab von l_b, m_b, n_b oder von der Fortpflanzungsrichtung der gebrochenen Welle. Die Grenzbedingungen sind dieselben wie bei den isotropen Körpern. Ueberall in der Grenzfläche, für welche $x = 0$ ist, haben wir

$$Y_i + Y_r = Y_b \quad \text{oder} \quad \mu_i F_i e^{ki(t - y\sin\alpha/\Omega)}$$
$$+ \mu_r F_r e^{ki(t-(m_r y + n_r z)/\Omega)} = \mu_b F_b e^{ki(t-(m_b y + n_b z)/\omega)}.$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von y und z bestehen muss, so haben wir

(h) $$\sin\alpha/\Omega = m_r/\Omega = m_b/\omega$$

und

(i) $$0 = n_r/\Omega = n_b/\omega$$

ist. Nach der letzten Gleichung ist $0 = n_r = n_b$, d. h. *die Wellennormalen für den reflectirten und gebrochenen Strahl liegen in der Einfallsebene.* Aus (h) folgt, dass $m_r = \sin\alpha$ ist, d. h. *der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.* Die Richtung des reflectirten Strahles wird also in derselben Weise bestimmt wie bei der Reflexion an einem isotropen Körper.

Ist β der Brechungswinkel für die Wellennormale, so wird

$$l_b = -\cos\beta, \quad m_b = \sin\beta, \quad n_b = 0,$$

also nach (h)

$$\sin\alpha / \Omega = \sin\beta / \omega.$$

Bestimmen wir die Richtung der Wellennormale durch die Cosinus der Winkel, welche dieselbe mit den Elasticitätsaxen bildet, so haben wir zur Bestimmung von ω die Gleichung

$$\text{(l)} \qquad l^2/(a^2-\omega^2) + m^2/(b^2-\omega^2) + n^2/(c^2-\omega^2) = 0.$$

Bezeichnen (xa), (ya) u. s. w. die Winkel zwischen den Elasticitätsaxen und den Coordinatenaxen, so haben wir

$$l = l_b \cos(x\,a) + m_b \cos(y\,a) + n_b \cos(z\,a).$$

Setzen wir hier die oben gegebenen Werthe für l_b, m_b u. s. w. ein, so ergiebt sich

$$\text{(m)} \qquad \begin{cases} l = -\cos\beta\,.\cos(x\,a) + \sin\beta\,.\cos(y\,a) \\ m = -\cos\beta\,.\cos(x\,b) + \sin\beta\,.\cos(y\,b) \\ n = -\cos\beta\,.\cos(x\,c) + \sin\beta\,.\cos(y\,c). \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (m) und (l) kann ω durch β ausgedrückt werden. Die Gleichung, welche man dabei erhält, bestimmt in Verbindung mit (k) den Brechungswinkel. Im Allgemeinen wird man für β zwei Werthe, β_1 und β_2, erhalten, von denen der eine oder auch beide imaginär sein können; in diesem Falle ist die Reflexion vollständig.

Fig. 129.

Die Richtung der Wellennormale und die Richtung des Strahles kann man durch die von Huygens angegebene Construction finden. Um den Punkt O (Fig. 129) als Mittelpunkt wird die Kugelfläche PD construirt, deren Radius $OD = \Omega$ ist, wo Ω die Lichtgeschwindigkeit in der Luft bedeutet. Die Kugel wird im Punkte D von der Verlängerung des einfallenden Strahles getroffen. Die Ebene, welche die Kugelfläche in D berührt,

schneidet die brechende Fläche in einer geraden Linie, welche in der Figur in Q projicirt ist. Durch diese Linie wird die Tangentialebene QR zur Wellenfläche FR gelegt, deren Mittelpunkt in O liegt. Auf die Tangentialebene QR wird von O aus das Loth $OB = \omega$ gefällt. OB ist dann die Normale zur gebrochenen Welle und $L'OB = \beta$, wenn LOL' das Einfallsloth ist. Einerseits ist $OB = \omega$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Richtung OB und andererseits ist

$$OQ = OD / \sin\alpha = OB / \sin\beta$$

oder

$$\Omega / \sin\alpha = \omega / \sin\beta,$$

sodass auch die Gleichung (k) erfüllt ist. OB ist die Richtung der Wellennormale des gebrochenen Strahles, OR ist die entsprechende Strahlenrichtung. Da die Wellenfläche in Wirklichkeit zwei Netze hat, so können durch Q zwei Tangentialebenen an die Wellenfläche gelegt werden. Durch die Construction werden also zwei Wellennormalen und zwei Strahlenrichtungen bestimmt.

Die betrachtete Construction dient eigentlich nur zur Veranschaulichung der Lichtbrechung; sie kann nicht zu einer wirklichen Bestimmung der Fortpflanzungsrichtung durch Construction in der Ebene benutzt werden, weil der Berührungspunkt R nicht in der Einfallsebene liegt; indessen können wir die Richtung der Wellennormale durch eine von Mac Cullagh gegebene Construction in der Einfallsebene erhalten.

Ziehen wir durch D (Fig. 129) die Linie DE senkrecht zur brechenden Fläche, so liegt der Schnittpunkt B' zwischen DE und der Wellennormale OB, dass

$$OB.OB' = OD^2$$

ist. Es ist nämlich

$$OB = OQ.\sin\beta, \quad OB' = OE / \sin\beta.$$

Ferner ist, wie leicht aus der Fig. 129 zu erkennen

$$OQ.OE = OD^2.$$

Daraus ergiebt sich die Beziehung

$$OB.OB' = OD^2.$$

so wird

$$AB - C^2 = a^2 b^2$$

und

$$\Omega^2 / \sin^2 \alpha = A \operatorname{cotg}^2 \beta_2 + 2 C \operatorname{cotg} \beta_2 + B.$$

Hieraus ergiebt sich

(b) $$A \operatorname{cotg} \beta_2 = - C + \sqrt{A\, \Omega^2 / \sin^2 \alpha - a^2 b^2}.$$

Ist die Krystallaxe zur Einfallsebene senkrecht, so haben wir

$$(x\, a) = (y\, a) = \tfrac{1}{2} \pi,$$

woraus folgt

$$\sin \alpha = N_e \sin \beta_2, \quad \text{wenn} \quad N_e = \Omega / a$$

das ausserordentliche Brechungsverhältniss ist. Werden a und b durch N_e und N_o ausgedrückt, so ergiebt sich aus (b)

(c) $$\begin{cases} (N_0^2 \sin^2 \psi + N_e^2 \cos^2 \psi) \operatorname{cotg} \beta_2 = -(N_0^2 - N_e^2) \sin \psi \cos \psi \\ \qquad + N_0 N_e \sqrt{\sin^{-2} \alpha\, (N_0^2 \sin^2 \psi + N_e^2 \cos^2 \psi) - 1}. \end{cases}$$

Um die Gleichung der reciproken Wellenfläche zu erhalten, wird $\Omega = 1$ gesetzt, und in der Gleichung für die Wellenfläche wird N_e an die Stelle von a, N_0 an die Stelle von b gesetzt. Dadurch erhalten wir aus § 107 (d)

(d) $$(r^2 - N_0^2)[N_e^2 x^2 + N_o^2 (y^2 + z^2) - N_0^2 N_e^2] = 0$$

als Gleichung für die reciproke Wellenfläche, welche wir auf die Elasticitätsaxen als Coordinatenaxen beziehen. Dasselbe Resultat erhalten wir auch aus § 108 (o), wenn $N_1 = N_e$ und $N_2 = N_3 = N_0$ gesetzt wird.

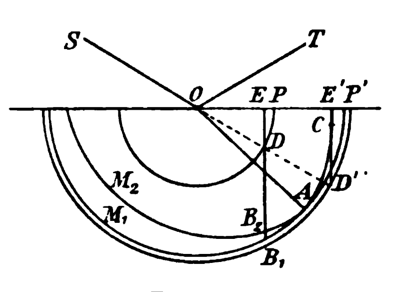


Fig. 130.

In Fig. 130 ist OP die brechende Fläche, OA die optische Axe, welche in der Einfallsebene liegen soll; AM_1 und AM_2 sind die Curven, in welchen die Einfallsebene die reciproke Wellenfläche schneidet. AM_1 ist ein Kreis mit dem Radius N_0, AM_2 ist eine Ellipse, deren halbe grosse Axe OA gleich N_0 und deren halbe kleine Axe OM_2 gleich N_e ist. Mit dem Radius $OD = 1$ zeichnen wir einen Kreis, der die Verlänge-

rung des einfallenden Strahles in D schneidet. Die Linie ED, welche zur brechenden Fläche senkrecht ist, scheidet die reciproke Wellenfläche in den Punkten B_1 und B_2. Die Normalen der gebrochenen Wellen sind dann OB_1 und OB_2. Für die ordentliche Welle fällt die Strahlenrichtung mit der Wellennormalen OB_1 zusammen; für die ausserordentliche Welle ist die Strahlenrichtung zur Tangentialebene im Punkte B_2 des Ellipsoïd senkrecht.

Wird der Krystall in eine Flüssigkeit getaucht, deren Brechungsverhältniss grösser ist als dasjenige des Krystalles, so tritt an die Stelle des Kreises PD ein anderer Kreis mit grösserem Radius, z. B. $P'D'$. Durchschneidet dieser Kreis die Verlängerung des einfallenden Strahles in D', so werden die Richtungen der Wellennormalen durch die Schnittpunkte zwischen der reciproken Wellenfläche und der Linie $D'E'$ bestimmt, welche zur brechenden Fläche senkrecht ist. In diesem Falle kann eine totale Reflexion eintreten. Schneidet $D'E'$ die reciproke Wellenfläche gar nicht, so kann keine Brechung stattfinden; schneidet aber $D'E'$ nur die eine Schnittcurve, so ergiebt sich nur ein gebrochener Strahl. Berührt aber, wie in der Fig. 130, $D'E'$ die Ellipse in einem Punkte C, so findet noch Brechung statt; die entsprechende Strahlenrichtung ist der Grenzfläche OP parallel.

Unsere Darstellung der Optik beruht auf Maxwell's Auffassung des Lichtes als electrische Schwingungen. Eine ausführlichere Behandlung auf derselben Grundlage hat H. A. Lorentz gegeben. Eine Darstellung der wichtigsten optischen Theorien rührt von Glasebrook her und ist in dem Report of the British Association for the Adv. of Science 1885 veröffentlicht. In neuerer Zeit hat H. v. Helmholtz eine Theorie der Dispersion des Lichtes gegeben, bei deren Entwicklung er von der electromagnetischen Lichttheorie ausgeht.

Dreizehnter Abschnitt.

Wärmetheorie.

§ 110. Der Zustand eines Körpers.

Sind die Massentheilchen eines Systems in Bewegung und wirken dieselben zugleich auf einander, so besitzt das System eine gewisse *Energie U.* Die Energie eines Systems discreter Massenpunkte besteht aus der *kinetischen* und *potentiellen Energie.* Die erstere ist von den *augenblicklichen Geschwindigkeiten* der Massenpunkte abhängig, die letztere von den gegenseitigen Entfernungen der Massenpunkte oder von der *Configuration* des Massensystems; beide zusammen bestimmen den *augenblicklichen Zustand* des Systems. Daraus ergiebt sich, dass die Energie nur von dem augenblicklichen Zustande des Systems abhängt, und dass dieselbe unabhängig von den Zuständen ist, in denen sich das System früher befunden hat. Das Princip der Energie gilt zunächst nur für ein System discreter Massenpunkte; wir machen in der mechanischen Wärmetheorie die Annahme, dass dasselbe Princip oder ein ihm entsprechendes für alle Systeme von Massenpunkten gilt.

Jedem Körper wohnt daher eine gewisse Energie inne, die wir als *innere Energie* des Körpers bezeichnen, da wir keine Rücksicht auf den Theil der Energie nehmen, welcher von den Wechselwirkungen mit anderen Körpern herrührt. In Folge der im Innern des Körpers vorhandenen Energie ist derselbe im Stande, *Arbeit* zu leisten; dabei treten Veränderungen in der Gestalt, im Volumen, in der Temperatur u. s. w. des Körpers ein. Die Energie ist allein durch den Zustand des Körpers bestimmt; besitzt der Körper in einem bestimmten Zustande die Energie U und wird derselbe dann irgend welchen Veränderungen nach Gestalt, Grösse u. s. w. unterworfen und schliesslich in seinen ursprünglichen Zustand zurückgeführt, so muss die innere Energie wieder gleich U sein.

Zur Bestimmung der inneren Energie eines Körpers ist die Kenntniss der Grössen erforderlich, welche den *Zustand* eines Körpers bestimmen. Nach den Gesetzen von Boyle und Gay-Lussac ist der Zustand eines idealen Gases vollkommen durch den Druck und das Volumen bestimmt. Durch die beiden letzteren Grössen ist die Temperatur gegeben. Das Boyle'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz liefert eine Gleichung, welche einen Zusammenhang zwischen dem Drucke, der Temperatur und dem Volumen angiebt; diese Gleichung bezeichnen wir als *Zustandsgleichung* des Gases, weil sie es gestattet, den Zustand eines idealen Gases unter irgend welchen Bedingungen zu bestimmen, wenn derselbe unter bestimmten Bedingungen bekannt ist, nämlich bei 0° C. und 760 mm Druck. Bei den wirklich zur Untersuchung gelangenden Gasen treten an Stelle der Gleichung, welche die Gesetze von Boyle und Gay-Lussac ausdrückt, andere, welche die erstere als Grenzfall enthalten. Der Zustand einer Flüssigkeit ist im Allgemeinen durch dieselben Grössen bestimmt; doch sind die Gestalt der Oberfläche und die Natur der berührenden Körper auf den Zustand von Einfluss. Sowohl bei den Gasen als auch bei den Flüssigkeiten können noch die Einwirkungen electrischer und magnetischer Kräfte in Betracht kommen. Zur Kenntniss des Zustandes der festen Körper ist in der Regel eine grosse Anzahl von Grössen erforderlich, zumal wenn dieselben den Einwirkungen von Kräften unterworfen werden, die in ihnen Spannungen hervorrufen. Man nennt die Gleichung, welche alle Grössen verbindet, die den Zustand bestimmen, *die Zustandsgleichung*.

Da der Zustand eines Gases nur vom Drucke p und dem Volumen v abhängt, so kann derselbe durch einen Punkt der Ebene mit den Coordinaten p und v dargestellt werden; eine Reihe solcher Punkte oder eine Curve stellt eine Reihe aufeinanderfolgender Zustände dar. Wir legen die v-Axe des Coordinatensystems in der Ebene horizontal, die p-Axe (Fig. 131) vertical. Das Gas habe zu Anfang das Volumen v_0 beim Drucke p_0; sein Zustand ist dann durch den Punkt A dargestellt. Dehnt sich das Gas bei constantem Drucke p_0 aus, so ist der Zustand durch eine horizontale Linie AB dargestellt, welche

der v-Axe parallel ist und als *Curve constanten Druckes* bezeichnet wird. Die verticalen geraden Linien stellen die *Curven constanten Volumens* dar. Wird dem Gase, dessen Anfangszustand durch A dargestellt ist, bei constantem Volumen v_0 Wärme zugeführt, so ändert sich der Zustand des Gases längs der Geraden AC, und der Druck des Gases nimmt zu. Bleibt die Temperatur eines Gases bei den aufeinanderfolgenden Zuständen constant, so ist nach dem Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetze

$$v \,.\, p = \text{const.}$$

Demnach sind die *Curven constanter Temperatur* oder die *Isothermen* gleichseitige Hyperbeln, welche die Coordinatenaxen als Asymptotenaxen haben. Soll der Zustand eines Gases sich in solcher Weise ändern, dass seine Temperatur constant bleibt, so ist dazu entweder eine *Compression mit Wärmeentziehung* oder eine *Expansion mit Wärmezufuhr* erforderlich. Versetzen wir also ein Gas in den Anfangszustand A und halten wir durch Compression verbunden mit Wärmeentziehung oder durch Expansion verbunden mit Wärmezuführung die Temperatur des Gases constant, so ändert sich der Zustand des letzteren längs der Hyperbel DAE. Wir können uns das in einem Behälter eingeschlossene Gas mit einer unendlich grossen Wärmequelle in Verbindung denken, deren Temperatur der Temperatur des Gases im Punkte A gleich ist. Aendern wir nun das Volumen des Gases, so nimmt die Wärmequelle bald Wärme auf, bald giebt sie Wärme ab, das Gas behält aber stets die Temperatur der Wärmequelle.

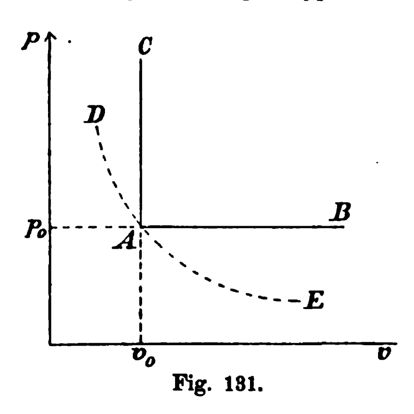


Fig. 131.

Wird das in einem Gefässe eingeschlossene Gas durch eine *adiathermane* Hülle gegen Wärmezufluss und Wärmeabfluss geschützt, so wird das Gas durch Compression erhitzt und seine Temperatur steigt, bei der Ausdehnung kühlt es sich ab

und seine Temperatur sinkt. In diesem Falle bezeichnen wir die Zustandsänderungen als *adiabatische*, und die Curve, welche dieselben darstellt, heisst *adiabatische* oder *isentropische Curve*.

Der Zustand eines festen Körpers kann allgemein nicht in der Ebene dargestellt werden, da derselbe von mehr als zwei Coordinaten abhängig ist.

Unter einem *Kreisprocesse* versteht man eine solche Zustandsänderung, welche von einem gegebenen Zustande O aus auf einem beliebigen Wege fortschreitet, jedoch schliesslich zum ursprünglichen Zustande O zurückgeht. Lässt man einen Körper einen Kreisprocess durchlaufen, so ist die aus der Umgebung aufgenommene Energie gleich der an dieselbe abgegebenen. In den Dampfmaschinen haben wir ein System von Körpern, die periodisch immer wieder in denselben Zustand zurückkehren. Aus der Wirkung der Dampfmaschinen ergiebt sich, *dass Wärme und Arbeit gleichartige oder äquivalente Grössen sind*, welche in einander umgewandelt werden können, beide sind also Energieformen. Genaue Untersuchungen haben dieses bestätigt. Die hervorgebrachte Menge der einen Energieform ist stets der aufgewandten Menge der anderen Energieform proportional. Diesen Satz von der *Aequivalenz zwischen Arbeit und Wärme* hat zuerst R. Mayer (1842) aufgestellt. Spätere Beobachtungen von Joule u. a. haben gezeigt, dass die Arbeitsmenge, welche einer Wärmeeinheit oder der Wärmemenge, die zur Erhöhung der Temperatur eines Gramm Wasser um 1^0 C. erforderlich ist, gleich $4{,}2 . 10^7$ absoluten Arbeitseinheiten (C. G. S.) ist. Dieses Resultat nennt man auch den *ersten Hauptsatz*, welcher lautet: *Wärme und Arbeit sind äquivalent; Arbeit kann aus Wärme gewonnen und Wärme durch Arbeit erzeugt werden.* Das *Arbeitsäquivalent* oder das *mechanische Aequivalent* der Wärmeeinheit soll mit J bezeichnet werden.

Wird einem Körper die Wärmemenge dQ zugeführt, so erhält er die Energie $J.dQ$. Diese kann theils zur Vermehrung der inneren Energie U des Körpers, theils zur Leistung einer Arbeit dW dienen, z. B. dadurch, dass der Körper gegen einen Widerstand sich ausdehnt. Wir haben dann

(a) $$J.dQ = dU + dW.$$

Zur Anwendung dieser Gleichung, welche als *erste Hauptgleichung* bezeichnet wird, betrachten wir den Körper ABC (Fig. 132), auf dessen Oberfläche überall der gleiche Druck p wirkt. In Folge der Ausdehnung erhalte der Körper das Volumen $A'B'C'$. Von der Begrenzung des Oberflächenelementes $AB = dS$ werden die Normalen AA' und BB' bis

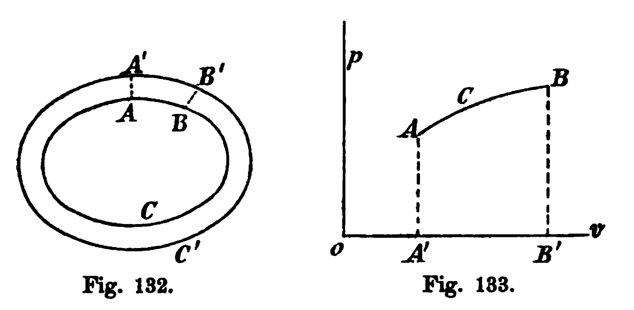


Fig. 132. Fig. 133.

zur neuen Oberfläche gezogen. Wir setzen $AA' = \nu$ und erhalten für die vom Körper geleistete Arbeit

$$\int \nu p \, . \, dS = p \int \nu \, . \, dS = p \, . \, dv,$$

wenn dv die gesammte Volumenvergrösserung des Körpers bezeichnet. Die Gleichung (a) lautet dann

$$\text{(b)} \qquad J \, . \, dQ = dU + p \, . \, dv.$$

Ist der Zustand eines Körpers durch die unabhängigen Variabeln p und v bestimmt, so entsprechen einem Punkte A (Fig. 133) die bestimmten Werthe p_1 und v_1. Der Körper durchlaufe eine Reihe von Zuständen, welche durch die Curve ACB dargestellt sind; dem Punkte B entsprechen die unabhängigen Variabeln p_2 und v_2. Dann ist nach (b)

$$\text{(c)} \qquad JQ = U_2 - U_1 + \int_1^2 p \, . \, dv.$$

Q ist die während der Zustandsänderungen zugeführte Wärmemenge, $U_2 - U_1$ ist der Zuwachs der inneren Energie und $\int_1^2 p \, . \, dv$ ist die ausgeführte Arbeit. $U_2 - U_1$ ist durch die Anfangs- und Endwerthe von p und v oder durch die Lage

der Punkte A und B bestimmt. Dagegen wird die äussere Arbeit durch den Flächeninhalt der Figur $A'ABB'A'$ gemessen; *diese Arbeit ist also von der Art des Ueberganges von einem Zustande zum anderen abhängig.* Dasselbe gilt auch für Q. Da U eine Function von p und v ist, so erhalten wir

(d) $$J.dQ = \partial U/\partial p.dp + (\partial U/\partial v + p)dv.$$

Kennt man die Function U, so ist es möglich, die Wärmemenge zu finden, welche erforderlich ist, um irgend eine Veränderung im Zustande des Körpers hervorzubringen. U wird nach der Gleichung (c) bestimmt, indem man die vom Körper aufgenommene Wärmemenge Q und die von demselben geleistete Arbeit misst und den Zuwachs an innerer Energie ermittelt. Bislang ist die Kenntniss der Grösse U noch sehr beschränkt.

§ 111. Die idealen Gase.

Clément und Desormes und später Joule haben durch Versuche gezeigt, dass ein Gas, wenn es sich ausdehnt, ohne einen Widerstand zu überwinden, also ohne Arbeit zu leisten, seine Temperatur nicht ändert.[1] Der Anfangs- und Endzustand eines Gases, das sich ausdehnt, ohne Arbeit zu leisten, liegt also auf derselben Isotherme, d. h. *die innere Energie der Gase ist eine Function der Temperatur allein* und ist also unabhängig vom Volumen, wenn die Temperatur unveränderlich bleibt. Nehmen wir die Temperatur ϑ und das Volumen v der Gase als unabhängige Variable, so haben wir

$$J.dQ = \partial U/\partial \vartheta.d\vartheta + \partial U/\partial v.dv + p.dv.$$

Nun ist $\partial U/\partial v = 0$, und also

$$J.dQ = \partial U/\partial \vartheta.d\vartheta + p.dv.$$

Wird diese Gleichung angewandt auf 1 Gramm Luft, so ist $\partial U/\partial \vartheta = J c_v$, wenn die *specifische Wärme* der Luft bei *constantem Volumen* mit c_v bezeichnet wird, d. h. die Wärmemenge, welche man der Masseneinheit eines Gases zuführen muss,

[1] Genauere Messungen zeigen, dass sich das Gas ein wenig abkühlt. Daraus folgt, dass zwischen den einzelnen Theilen des Gases anziehende Kräfte vorhanden sind.

um dasselbe um einen Grad zu erwärmen, wenn dabei nicht das Volumen, wohl aber der Druck sich ändert. *Ist die specifische Wärme c_v der Gase bei constantem Volumen constant, so muss die innere Energie U eines Gases eine lineare Function der Temperatur sein.*

Bei den idealen Gasen ist die Zustandsgleichung zwischen dem Drucke, dem Volumen und der Temperatur

$$p v = R \vartheta ,$$

wo R eine Constante ist. *Sind ϑ und v die unabhängigen Variablen des Gases,* so haben wir

$$\text{(a)} \qquad J . dQ = J c_v . d\vartheta + p . dv ,$$

wo c_v nach den Beobachtungen von Regnault vom Drucke und der Temperatur des Gases unabhängig ist. *Werden dagegen ϑ und p als unabhängige Variable* gewählt, so muss v als Function derselben betrachtet werden, und wir haben dann

$$dv = \partial v / \partial \vartheta . d\vartheta + \partial v / \partial p . dp .$$

Die Gleichung (a) lautet jetzt

$$J . dQ = (J c_v + p . \partial v / \partial \vartheta) d\vartheta + p . \partial v / \partial p . dp .$$

Aus der Zustandsgleichung $p v = R \vartheta$ ergiebt sich

$$p . \partial v / \partial \vartheta = R \quad \text{und} \quad p . \partial v / \partial p = - v ,$$

und

$$J . dQ = (J c_v + R) d\vartheta - v . dp .$$

Um die *specifische Wärme c_p* bei *constantem Drucke* zu haben, d. h. die Wärmemenge, welche der Masseneinheit des Gases zugeführt werden muss, um dasselbe um einen Grad zu erwärmen, wenn dabei das Volumen, nicht aber der Druck geändert werden soll, setzen wir $dp = 0$ und erhalten

$$c_p = c_v + R / J ,$$

$$\text{(b)} \qquad J . dQ = J c_p . d\vartheta - v . dp .$$

Werden endlich p und v als unabhängige Variable gewählt, so ist

$$d\vartheta = \partial \vartheta / \partial p . dp + \partial \vartheta / \partial v . dv .$$

Aus der Zustandsgleichung $p v = R \vartheta$ folgt

$$R . \partial \vartheta / \partial p = v , \quad R . \partial \vartheta / \partial v = p , \quad R . d\vartheta = v . dp + p . dv ,$$

und nach (b)

(c) $$R \,.\, dQ = c_v v \,.\, dp + c_p p \,.\, dv.$$

Sind also die specifische Wärme c_p und die Constante R bekannt, so kann nach (c) die specifische Wärme für jede Zustandsänderung in der vp-Ebene ermittelt werden. Die specifische Wärme hat für einen gegebenen Zustand in der vp-Ebene unendlich viele Werthe, je nach der Richtung, in welcher die Zustandsänderung fortschreitet.

Die Ausdrücke (a), (b), (c) zeigen eine merkwürdige Eigenschaft. Wird einer derselben, z. B. (a), durch ϑ dividirt, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung

$$J \,.\, dQ / \vartheta = J c_v \,.\, d\vartheta / \vartheta + R \,.\, dv / v.$$

Geht z. B. das Gas vom Zustande A (Fig. 133) zum Zustande B über und haben die Temperatur und das Volumen in diesen Punkten bezw. die Werthe ϑ_1, v_1 und ϑ_2, v_2, so ergiebt sich durch Integration

(d) $$J \,.\, \int dQ / \vartheta = J \,.\, c_v \,.\, \log(\vartheta_2 / \vartheta_1) + R \,.\, \log(v_2 / v_1).$$

Während also das Integral $\int dQ$ abhängig von dem Wege ist, auf welchem das Gas von dem einen Zustande in den anderen gelangt, ist das Integral $\int dQ / \vartheta$ unabhängig von diesem Wege.

Clausius hat die Grösse

$$S = J \,.\, \int dQ / \vartheta$$

als *Entropie* bezeichnet, und dieser Begriff ist von grosser Bedeutung in der Wärmetheorie. *Wenn ein Körper von einem Zustande zu einem anderen übergeht, so ist die Vergrösserung der Entropie durch die Coordinaten des Anfangs- und Endpunktes bestimmt.* Dieser Satz ist hier zunächst nur für ein Gas bewiesen, er gilt aber für alle Körper.

Findet die Zustandsänderung eines Gases längs einer isothermen Curve statt, so haben wir nach (a)

$$J \,.\, dQ = p \,.\, dv.$$

Mit Berücksichtigung der Zustandsgleichung ergiebt sich hieraus

(e) $$JQ = \int_1^2 p \,.\, dv = R\vartheta \,.\, \log(v_2 / v_1).$$

Die ganze zugeführte Wärmemenge wird also dazu gebraucht, um die Temperatur constant zu halten. Setzen wir der Reihe nach v_2 gleich μv_1, $\mu^2 v_1$, $\mu^3 v_1$ u. s. f., wo μ eine beliebige Zahl bedeutet, so ergiebt sich für Q entsprechend

$$Q = R\vartheta / J . \log \mu, \quad 2R\vartheta / J . \log \mu, \quad 3R\vartheta / J . \log \mu \text{ u. s. f.}$$

Findet die Zustandsänderung eines Gases längs einer Temperaturcurve statt, und bilden die zugeführten Wärmemengen eine arithmetische Progression, so bilden nach der Gleichung (e) die Volumina eine geometrische Progression; gleichzeitig ändert sich der Druck proportional mit der Dichte.

Wenn die Zustandsänderung eines Gases längs einer adiabatischen Curve stattfindet, so haben wir nach (c)

$$c_v \log p + c_p \log v = c_1 .$$

Wird $c_p / c_v = k$ gesetzt, so ergiebt sich

$$\text{(f)} \qquad p v^k = c,$$

wo c eine Constante ist. Die Gleichung (f) ist die *Gleichung der adiabatischen Curven.* Mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung ergiebt sich aus (f)

$$R \vartheta v^{k-1} = c.$$

Führen wir in diese Formel die Dichte $\delta = M / v$ des Gases ein, wo M die Masse des Gases ist, so ergiebt sich, dass die Temperatur des Gases proportional der $(k-1)$-Potenz der Dichte ist, wenn der Zustand des Gases auf einer adiabatischen Curve fortschreitet.

Ferner erhalten wir aus § 110 (b) die Beziehung

$$\int_1^2 p . dv = U_1 - U_2 .$$

Die Arbeit wird also auf Kosten der inneren Energie geleistet, wenn der Zustand des Gases auf einer adiabatischen Curve fortschreitet.

§ 112. Die Kreisprocesse.

Bei den einfachen umkehrbaren Kreisprocessen, d. h. bei solchen, in denen alle Veränderungen so eintreten, dass die umgekehrten unter denselben Umständen vor sich gehen können,

muss ausser dem vermittelnden Körper, welcher den Kreisprocess durchläuft, noch ein zweiter vorhanden sein, der die Wärme abgiebt, und ein dritter, welcher sie aufnimmt. Bei den Dampf- resp. Gasmaschinen ist das Wasser oder der Dampf resp. das Gas der vermittelnde Körper. Die Feuergase und Wände des Dampfkessels geben die Wärme ab und das Condensationswasser nimmt die Wärme auf. Der Dampf resp. das Gas durchlaufen eine Reihe von Zuständen, und kehren wenigstens bei einzelnen Maschinen in den ursprünglichen Zustand zurück, um dann wieder denselben Process zu durchlaufen. Da die innere Energie U am Anfange und Ende des Processes denselben Werth hat, so ist nach § 110 (a)

$$JQ = W, \tag{a}$$

wo Q die Differenz zwischen der aufgenommenen und abgegebenen Wärme ist.

Die ganze von dem vermittelnden Körper aufgenommene und nicht an den kälteren Körper abgegebene Wärmemenge ist also das geleistete Arbeitsäquivalent. Ist der vermittelnde Körper ein Gas, so haben wir für den Kreisprocess

$$JQ = \int p\,dv.$$

Die Entropie eines Gases ist nur von den Coordinaten abhängig und hat also am Anfange und am Schlusse des Kreisprocesses denselben Werth. Ist S_1 die Entropie im Ausgangspunkte, so ist dieselbe in einem beliebigen Zeitpunkte während des Processes gleich $S_1 + \int dQ/\vartheta$. Wird die Integration über den ganzen Kreisprocess ausgedehnt, so erhält die Entropie den Werth S_1, und es ist also

$$\int dQ/\vartheta = 0.$$

Wir wollen einen speciellen, den sogenannten Carnot'schen *Kreisprocess* näher betrachten, der von grosser Bedeutung für die Wärmetheorie gewesen ist. Ein Gramm Gas habe den durch den Punkt B (Fig. 134) in der vp-Ebene dargestellten Zustand. Die den Kreisprocess darstellende Curve sei von zwei isothermischen Curven BC und ED und von zwei adiabatischen Curven CD und BE gebildet. Das Gas dehne sich zunächst bei der constanten Temperatur ϑ_1 aus, indem wir es mit einem un-

endlich grossen Körper M_1 von der Temperatur ϑ_1 in Berührung bringen und indem wir dabei den äusseren Druck auf das Gas so reguliren, dass es in den Zustand C längs des Weges BC gelangt. Während der Zustandsänderung BC wird von dem Gase die Wärmemenge Q_1 absorbirt und die durch die Fläche $BCC'B'$ dargestellte Arbeit geleistet. Das Gas dehnt sich dann weiter aus, indem sein Zustand auf der adiabatischen Curve CD fortschreitet, dabei sinkt die Temperatur auf ϑ_2. Sodann wird das Gas mit einem unendlich grossen Körper M_2 von der Temperatur ϑ_2 in Berührung gebracht und zusammengepresst; es möge dabei die Wärmemenge Q_2 an M_2 abgeben. Sein Zustand werde durch E dargestellt. Endlich wird das Gas weiter zusammengepresst, nachdem es mit einer adiathermanen Umhüllung versehen ist, wobei es in den ursprünglichen Zustand B zurückkehrt. Das Integral $\int p.dv$, erstreckt über den ganzen Kreisprocess, giebt den Flächeninhalt von $BCDE$ und stellt die von dem Gase geleistete Arbeit dar. Wir haben nach § 110 (a)

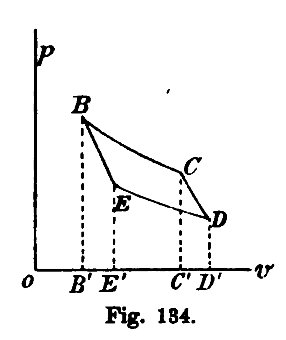


Fig. 134.

(c) $$J(Q_1 - Q_2) = W.$$

Bei der Ausdehnung von B bis C erhält die Entropie den Zuwachs Q_1 / ϑ_1, dieselbe bleibt auf dem Wege von C bis D erhalten und wird von D bis E um Q_2 / ϑ_2 vermindert. Auf dem Wege EB ist die Entropie wieder unveränderlich. Da das Gas bei der Rückkehr nach B dieselbe Entropie besitzt wie beim Beginn, so haben wir

(d) $$Q_1 / \vartheta_1 - Q_2 / \vartheta_2 = 0 \quad \text{oder} \quad Q_1 / \vartheta_1 = Q_2 / \vartheta_2.$$

Aus (c) und (d) ergiebt sich

(e) $$W = J(Q_1 - Q_2) = J Q_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2) / \vartheta_1.$$

Die bei dem betrachteten Kreisprocesse geleistete Arbeit ist also proportional der absorbirten Wärmemenge Q_1 und dem Temperaturunterschiede $\vartheta_1 - \vartheta_2$, dagegen umgekehrt proportional der absoluten Temperatur ϑ_1, bei welcher die Wärme

absorbirt wird. Die ganze aus der ersten Wärmequelle M_1 aufgenommene Wärme ist nicht in Arbeit verwandelt, sondern diese Wärme ist durch Vermittelung des Gases in zwei Theile zerlegt, von denen der eine in Arbeit verwandelt wird, der andere aber nach M_2 übergeführt wird.

Der *öconomische Coefficient* ζ des Carnot'schen Kreisprocesses ist das Verhältniss der in Arbeit umgewandelten Wärme zu derjenigen Wärme, welche dem Gase überhaupt zugeführt ist. Wir haben

$$\zeta = W / JQ_1 = (\vartheta_1 - \vartheta_2) / \vartheta_1.$$

Demnach ist der öconomische Coefficient nur von den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 der benutzten Wärmequellen abhängig. Betrachten wir den umgekehrten Kreisprocess, so ändert sich der Zustand des Gases zunächst längs BE, auf dem Wege ED nimmt das Gas eine gewisse Wärmemenge von M_2 auf und erhält zu gleicher Zeit ein gewisses Arbeitsquantum von aussen auf dem Wege DC. Die empfangene Wärme und Arbeit, welche letztere in Wärme verwandelt wird, giebt das Gas an den Körper M_1 auf dem Wege CB ab. Bei dem vorher von uns betrachteten Kreisprocesse wurde *Wärme in Arbeit* verwandelt, bei dem umgekehrten Processe wird *Arbeit in Wärme* verwandelt.

§ 113. Das Carnot'sche und Clausius'sche Theorem.

Im Vorhergehenden ist gezeigt worden, dass für jeden umkehrbaren Kreisprocess

$$\int dQ / \vartheta = 0$$

ist, wenn der den Kreisprocess durchlaufende Körper ein Gas ist. Wir wollen untersuchen, ob dieser Satz seine Gültigkeit behält, wenn an Stelle des Gases irgend ein anderer Körper tritt. Wir betrachten den einfachen Fall, in welchem der Process längs zwei isothermen Curven BC und ED (Fig. 134) und zwei adiabatischen Curven CD und BE ausgeführt wird. Die Zustandsänderung gehe in der durch die Reihenfolge der Buchstaben $BCDE$ angegebenen Richtung vor sich. Wenn der Körper bei der Temperatur ϑ_1 sich von B bis C ausdehnt, so möge er die Wärmemenge Q_1 empfangen; während derselbe

von D bis E sich zusammenzieht, giebt er die Wärmemenge Q_2 ab. Während der Wege CD und EB findet weder eine Wärmezufuhr noch eine Wärmeabgabe statt. Bei dem beschriebenen Processe wird dem Körper im Ganzen die Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ zugeführt. Da der Körper in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, so ist die Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ äquivalent der geleisteten Arbeit, die also $J(Q_1 - Q_2)$ ist.

Im Jahre 1824 publicirte S. Carnot eine Arbeit über die bewegende Kraft der Wärme, worin er einen merkwürdigen Satz über den Zusammenhang zwischen Wärme und Arbeit aufstellte. Carnot war der Ansicht, dass die Wärme als Grundstoff in unveränderlicher Menge vorhanden sei. In der Dampfmaschine ist die Wärmemenge Q_1 vom Dampfe bei einer höheren Temperatur ϑ_1 aufgenommen, diese Wärme wird im Condensator abgegeben bei einer niedrigen Temperatur ϑ_2 und in dem Sturze der Wärme (chute du calorique) von der höheren Temperatur des Kessels zu der tieferen des Condensators suchte Carnot die treibende Kraft der Wärme. Die beim Uebergange der Wärme von höherer zu tieferer Temperatur geleistete Arbeit wurde mit der Arbeit verglichen, welche eine fallende Flüssigkeit oder irgend ein fallender Körper leisten kann. Die letztere Arbeit ist dem Gewichte des fallenden Körpers und der Fallhöhe proportional. Für die Arbeit der Wärme stellte Carnot demnach den Ausdruck

$$K Q_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

auf, wo K eine Function der absoluten Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 ist. Diese Auffassung Carnot's wurde durch die Erfahrung bestätigt, aber sie steht in Widerspruch mit der mechanischen Wärmetheorie, insofern sie die Wärmemenge als eine unveränderliche Grösse betrachtet. Sehen wir indessen hiervon ab, so ist für den betrachteten Kreisprocess

$$\text{(a)} \qquad J(Q_1 - Q_2) = K Q_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2).$$

Da K von der Natur des die Arbeit leistenden Körpers unabhängig sein muss, so haben wir, wenn der Körper ein Gas ist, nach § 112 (e)

$$\text{(b)} \qquad K = J / \vartheta_1.$$

Also ergiebt sich

$$(Q_1 - Q_2) / (\vartheta_1 - \vartheta_2) = Q_1 / \vartheta_1$$

und also

$$Q_1 / \vartheta_1 = Q_2 / \vartheta_2,$$

d. h. *durchläuft ein beliebiger Körper denselben Carnot'schen Kreisprocess beliebig oft, indem wir den Körper abwechselnd mit zwei grossen Wärmequellen in Berührung bringen, so verhalten sich die Wärmemengen, welche der Körper abwechselnd aus der einen Wärmequelle entnimmt und an die andere abgiebt, ebenso wie die Temperaturen der Wärmequellen.*

Dass dieser Satz für einen Kreisprocess von der betrachteten Art gilt, welcher auch der arbeitende Körper sein mag, scheint ausser jedem Zweifel zu sein. Die Anwendung des Satzes auf vielen Gebieten der Physik und der Chemie hat bislang nicht zu Widersprüchen mit der Erfahrung geführt. Im Uebrigen ist von verschiedenen Seiten der Versuch gemacht worden, einen directen Beweis für die Richtigkeit des Satzes zu liefern; den ersten und wichtigsten Versuch nach dieser Richtung verdanken wir Clausius, dessen Betrachtung in folgender Weise veranschaulicht werden soll.

Ein Gas durchlaufe den Kreisprocess $BCDE$ (Fig. 135), welcher von den isothermen Curven BC und DE gebildet wird, die den absoluten Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 entsprechen, und von den adiabatischen Curven CD und BE. Bei der Ausdehnung von B bis C empfange das Gas aus einer unendlich grossen Wärmequelle M_1 von der constanten Temperatur ϑ_1 die Wärmemenge Q_1. Dann möge sich das Gas von C bis D ausdehnen, während weder Wärme zugeführt noch abgegeben wird. Das Gas sei sodann mit der unendlich grossen Wärmequelle M_2 von der constanten Temperatur ϑ_2 in Berührung gebracht und gebe die Wärmemenge Q_2 beim Zusammendrücken an M_2 ab. Endlich werde das Gas auf der adiabatischen Curve EB zum ursprünglichen Zustande B zurückgeführt. Während des Kreisprocesses hat das Gas aus der Wärmequelle M_1 die Wärmemenge Q_1 erhalten, welche durch Vermittelung des Gases in zwei Theile zerlegt ist. Der eine Theil ist als Wärmemenge Q_2 auf die Wärmequelle M_2 übertragen, der andere ist in Arbeit umgewandelt, welche der

Grösse nach durch den Inhalt der Fläche $BCDE$ dargestellt wird.

$B'C'$ und $E'D'$ (Fig. 135) seien bezw. die den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 entsprechenden isothermen Curven für einen anderen Körper, etwa für Wasserdampf. $C'D'$ und $B'E'$ seien zwei adiabatische Curven, welche so ausgewählt sind, dass die Fläche $B'C'D'E'$ gleich der Fläche $BCDE$ ist. Wird der Wasserdampf einem ähnlichen Processe unterworfen wie das Gas, so nimmt er während der Ausdehnung $B'C'$ bei der Berührung mit der Wärmequelle M_1 die Wärmemenge $Q_1 + q$ auf, und beim Uebergange von D' nach E' während der Berührung mit der Wärmequelle M_2 giebt er an die letztere die Wärmemenge Q_2' ab. Die vom Dampfe geleistete Arbeit ist gleich der von dem Gase geleisteten, weil die Fläche $BCDE$ gleich der Fläche $B'C'D'E'$ ist, und also haben wir

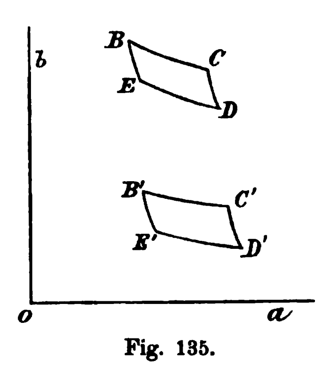


Fig. 135.

$$Q_1 + q - Q_2' = Q_1 - Q_2, \text{ also } Q_2' = Q_2 + q.$$

Während der Dampf bei der Ausdehnung längs $B'C'$ die Wärmemenge $Q_1 + q$ aufnimmt, giebt er längs des Weges $D'E'$ die Wärmemenge $Q_2 + q$ ab.

Der beschriebene Kreisprocess kann auch in entgegengesetzter Richtung ausgeführt werden. Der Wasserdampf kann sich z. B. längs der isentropischen Curve $B'E'$ ausdehnen; darauf wird er mit der Wärmequelle M_2 in Berührung gebracht und dehnt sich von E' bis D' aus, wobei die Wärmemenge $Q_2 + q$ aus M_2 entnommen wird. Sodann wird der Dampf zusammengedrückt längs der isentropischen Curve $D'C'$ und wird ferner längs des Weges $C'B'$ mit der Wärmequelle M_1 in Berührung gebracht. Bei der eintretenden Compression giebt der Wasserdampf an M_1 die Wärmemenge $Q_1 + q$ ab. Zur Ausführung dieses Processes müsste eine Arbeitsmenge zugeführt werden, welche mit der Wärme

$$Q_1 + q - (Q_2 + q) = Q_1 - Q_2$$

äquivalent ist; diese Arbeit wird in der Figur 135 durch die Fläche $B'C'D'E'$ dargestellt.

Wir betrachten endlich zwei Maschinen. Die eine sei eine Gasmaschine, in welcher das Gas den Kreisprocess $BCDE$ durchläuft, die andere sei eine Dampfmaschine, in welcher der Dampf den umgekehrten Kreisprocess $B'E'D'C'$ durchläuft. Beide Maschinen erhalten sich gegenseitig in Bewegung, wenn wir von der Reibung und anderen Widerständen absehen. Dabei entnimmt die Gasmaschine bei jedem Umlaufe aus der Wärmequelle M_1 die Wärmemenge Q_1 und giebt an die Wärmequelle M_2 die Wärmemenge Q_2 ab; gleichzeitig entnimmt die Dampfmaschine aus M_2 die Wärmemenge $Q_2 + q$ und giebt die Wärmemenge $Q_1 + q$ zurück an M_1. Demnach erhält unter diesen Verhältnissen die höhere Wärmequelle M_1 bei jedem Umlaufe die Wärmemenge q, während die tiefere Wärmequelle M_2 dieselbe Wärmemenge hergiebt; diese Ueberführung der Wärmemenge q aus der tieferen zur höheren Quelle geschieht, ohne dass eine Arbeit geleistet wird.

Demnach könnte also die Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Körper überströmen. Dieses aber erklärte Clausius für einen Widerspruch gegen alle Erfahrung über die Wärmeerscheinungen. Während die Wärme sonst alle Zeit das Bestreben zeigt, vom wärmeren zum kälteren Körper überzugehen, tritt bei dem oben beschriebenen Processe das Entgegengesetzte auf. Gegen diese Ansicht von Clausius ist der Einwand erhoben worden, dass eine thermoelectrische Kette, in welcher die einen Löthstellen auf der Temperatur 100°, die anderen auf der Temperatur 0° erhalten werden, einen Strom hervorbringen kann, welcher einen Platindraht zum Glühen bringt, wobei die Wärme also vom kälteren zum wärmeren Körper, dem glühenden Platin, übergeht. Allein Clausius hebt hervor, dass diese Bewegung der Wärme in aufsteigender Richtung durch die gleichzeitig an den kalten Berührungsstellen entwickelte Wärmemenge compensirt wird.

Clausius hat daher den Grundsatz aufgestellt: *Die Wärme kann niemals aus einem kälteren in einen wärmeren Körper ohne Aufwand von Arbeit und ohne Erzeugung irgend welcher Zustandsänderungen übergehen.* Auf Grund des Satzes von Clausius

ist demnach $q = 0$ und also ist für jeden Kreisprocess der beschriebenen Art, welcher Körper auch immer demselben unterworfen wird,

(a) $$Q_1 / \vartheta_1 = Q_2 / \vartheta_2.$$

Wir können nun zeigen, dass ein ähnlicher Satz für einen ganz willkürlichen Kreisprocess gilt. Die Zustandsänderung des Körpers erfolge zunächst auf der Curve BC von B aus (Fig. 136). Wird durch B die isotherme Curve BD und durch C die adiabatische Curve CD gelegt, so kann statt des Weges BC der Weg BDC gesetzt werden, d. h. es wird der Körper zunächst bei der constanten Temperatur längs BD und dann weiter längs DC bei constanter Entropie, also ohne Wärmezufuhr und Wärmeabgabe, ausgedehnt. Ist BC unendlich klein, so werden auch BD und DC unendlich klein, und die Zustandsänderung BC kann durch die beiden anderen BD und DC ersetzt werden. Der Körper erhält auf beiden Wegen denselben Zuwachs dU an innerer Energie, die äussere Arbeit ist in dem einen Falle $BCC'B'$ und in dem anderen Falle $BDCC'B'$. Da aber $B'C' = dv$ unendlich klein ist, während $B'B = p$ endlich bleibt, so verschwindet die Fläche BDC gegenüber der Fläche $BCC'B'$. Wird die zugeführte Wärmemenge mit dQ bezeichnet, so haben wir also

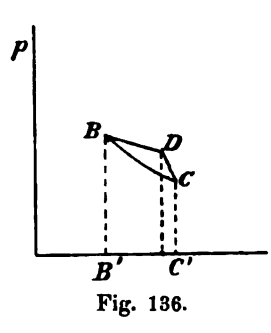


Fig. 136.

$$J.dQ = dU + p.dv,$$

sowohl auf dem Wege BC als auf dem Wege BDC.

Es sei $BCPDEQ$ (Fig. 137) ein beliebiger Kreisprocess, Bc, Cc', Ed, Dd' seien isotherme Curven, BE, CD u. s. w. seien adiabatische Curven. Der Körper nehme bei der Zustandsänderung BC die Wärmemenge dQ_1 auf und gebe längs DE die Wärmemenge dQ_2 ab. Nach den früheren Betrachtungen nimmt dann auch der Körper bei der Zustandsänderung längs Bc die Wärmemenge dQ_1 auf und giebt längs dE die Wärmemenge dQ_2 ab. Für den Kreisprocess $BcdE$ haben wir also $$dQ_1 / \vartheta_1 = dQ_2 / \vartheta_2,$$

wenn ϑ_1 und ϑ_2 die den Isothermen Bc und Ed entsprechenden absoluten Temperaturen sind. In derselben Weise ist für Cc' und Dd' u. s. w.

$$dQ_1'/\vartheta_1' = dQ_2'/\vartheta_2',\quad dQ_1''/\vartheta_1'' = dQ_2''/\vartheta_2'' \text{ u. s. w.}$$

Sind Q und P die Punkte, in welchen der Kreis von zwei isothermen Curven berührt wird, so haben wir durch Addition

$$\text{(b)} \qquad \int dQ_1/\vartheta_1 = \int dQ_2/\vartheta_2,$$

wo dQ_1 die auf einem Elemente von $QBCP$ zugeführte Wärmemenge und ϑ_1 die entsprechende Temperatur, ferner dQ_2 die

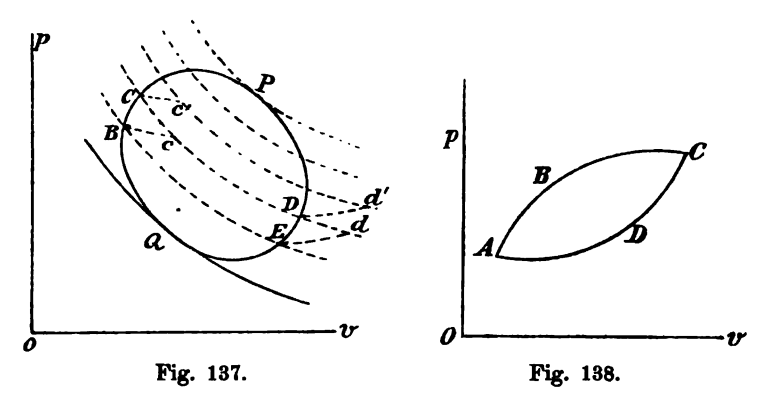


Fig. 137. Fig. 138.

auf einem Elemente von $PDEQ$ abgegebene Wärmemenge ist mit der entsprechenden Temperatur ϑ_2. *Wird die zugeführte Wärme positiv, die abgegebene negativ gerechnet, so ist die Summe aller bei einem umkehrbaren Kreisprocesse zugeführten unendlich kleinen Wärmemengen, jede dividirt durch die augenblicklich vorhandene absolute Temperatur, gleich Null,* d. h.

$$\text{(c)} \qquad \int dQ/\vartheta = 0.$$

Dieses ist der *zweite Hauptsatz* der mechanischen Wärmetheorie.

Der Satz (c), welchen Clausius zuerst in dieser Form ausgesprochen hat, kann noch in anderer Weise ausgedrückt werden. $ABCD$ (Fig. 138) sei ein Kreisprocess und also ist

$$\int_{ABCDA} dQ/\vartheta = 0.$$

Wir zerlegen das Integral in zwei Theile

$$ {}_B\int_A^C dQ\,/\,\vartheta + {}_D\int_C^A dQ\,/\,\vartheta = 0, $$

das erstere Integral ist von A über B nach C zu erstrecken, das letztere von C über D nach A. Es ist also auch

$$ {}_B\int_A^C dQ\,/\,\vartheta = -{}_D\int_C^A dQ\,/\,\vartheta = {}_D\int_A^C dQ\,/\,\vartheta. $$

Geht ein Körper vom Zustande A in den Zustand C über, so ist also der Werth des Integrals $\int dQ\,/\,\vartheta$ im Punkte C von dem Wege unabhängig. Hat der Punkt A die Coordinaten ϑ_1 und v_1 und der Punkt C die Coordinaten ϑ_2 und v_2, so haben wir

$$ \int_1^2 dQ\,/\,\vartheta = f(\vartheta_2, v_2) - f(\vartheta_1, v_1). $$

Clausius hat die Bezeichnung „*Entropie*" eingeführt, indem er setzte

$$ dS = J\,.\,dQ\,/\,\vartheta. $$

Daraus ergiebt sich

$$ J\int_1^2 dQ\,/\,\vartheta = S_2 - S_1. $$

Die Function S giebt die Entropie des Körpers; dieselbe ist nur vom augenblicklichen Zustande abhängig, dagegen unabhängig von allen voraufgegangenen Zuständen.

§ 114. Die Anwendung des zweiten Hauptsatzes.

Nach den früheren Betrachtungen [vergl. § 110 (a)] haben wir

(a) $$ J\,.\,dQ = dU + p\,.\,dv. $$

Ist der Zustand des Körpers durch die unabhängigen Variabeln ϑ und v allein bestimmt, so lautet die Gleichung (a) in anderer Form

(b) $$ J\,.\,dQ = (\partial U\,/\,\partial\vartheta)_v\,.\,d\vartheta + \big((\partial U\,/\,\partial v)_\vartheta + p\big)\,dv, $$

wo die angefügten Indices v und ϑ andeuten sollen, dass diese

Grössen bei der Differentiation als constant betrachtet werden. Wird die Entropie mit S bezeichnet, so haben wir

$$dS = J.dQ/\vartheta = 1/\vartheta.(\partial U/\partial\vartheta)_v.d\vartheta + \left(1/\vartheta.(\partial U/\partial v)_\vartheta + p/\vartheta\right) dv.$$

Da die Entropie S hier eine Function von v und ϑ ist, so können wir setzen

$$(\partial S/\partial\vartheta)_v = 1/\vartheta.(\partial U/\partial\vartheta)_v; \quad (\partial S/\partial v)_\vartheta = 1/\vartheta.(\partial U/\partial v)_\vartheta + p/\vartheta.$$

Aus demselben Grunde ist aber auch

$$\partial(\partial S/\partial\vartheta)_v/\partial v = \partial(\partial S/\partial v)_\vartheta/\partial\vartheta,$$

und ferner

$$\partial(\partial S/\partial\vartheta)_v/\partial v = 1/\vartheta.\partial(\partial U/\partial\vartheta)_v/\partial v,$$

$$\partial(\partial S/\partial v)_\vartheta/\partial\vartheta = 1/\vartheta.\partial(\partial U/\partial v)_\vartheta/\partial\vartheta - 1/\vartheta^2.(\partial U/\partial v)_\vartheta + \partial(p/\vartheta)_v/\partial\vartheta.$$

Also ergiebt sich

$$\text{(c)} \qquad (\partial U/\partial v)_\vartheta = \vartheta^2.\partial(p/\vartheta)_v/\partial\vartheta,$$

da auch U nur eine Function von ϑ und v und

$$\partial(\partial U/\partial v)_\vartheta/\partial\vartheta = \partial(\partial U/\partial\vartheta)_v/\partial v \text{ ist.}$$

Der Differentialgleichung (c) muss die innere Energie genügen. Der zweite Hauptsatz gewährt also das Mittel zur Bestimmung der inneren Energie. Aus den Gleichungen (c) und (b) ergiebt sich

$$\text{(d)} \qquad J.dQ = (\partial U/\partial\vartheta)_v.d\vartheta + \left(\vartheta^2\partial(p/\vartheta)_v/\partial\vartheta + p\right) dv.$$

Ist demnach die Zustandsgleichung und die specifische Wärme $c_v = 1/J.(\partial U/\partial\vartheta)_v$ bekannt, so kann durch die Gleichung (d) die Wärmemenge bestimmt werden, welche zu einer beliebigen Zustandsänderung des Körpers erforderlich ist.

Die Wärmemenge, welche ein Körper erhalten hat, ist nicht durch den augenblicklichen Zustand des Körpers bestimmt und kann also nicht als Function der Coordinaten betrachtet werden. Wir können jedoch setzen

$$\text{(e)} \qquad J(\partial Q/\partial\vartheta)_v = (\partial U/\partial\vartheta)_v, \quad J(\partial Q/\partial v)_\vartheta = (\partial U/\partial v)_\vartheta + p,$$

indem $(\partial Q/\partial\vartheta)_v.d\vartheta$ die Wärmemenge ist, welche gebraucht wird, um der Temperatur den Zuwachs $d\vartheta$ zu ertheilen, während das Volumen constant bleibt und $(\partial Q/\partial v)_\vartheta.dv$ die Wärmemenge ist, welche zur Volumenvergrösserung dv bei

constanter Temperatur gebraucht wird. Es ist aber nicht

$$\partial^2 Q / \partial \vartheta \, \partial v = \partial^2 Q / \partial v \, \partial \vartheta.$$

Aus der Gleichung (e) erhalten wir

$$\partial (\partial Q / \partial \vartheta)_v / \partial v - \partial (\partial Q / \partial v)_\vartheta / \partial \vartheta = - 1 / J . (\partial p / \partial \vartheta)_v .$$

Die Differentialgleichung (c) wird auf das Verhalten eines idealen Gases angewandt, für welches $p/\vartheta = R/v$ ist. Demnach wird $(\partial U / \partial v)_\vartheta = 0$, was mit dem in § 111 Entwickelten übereinstimmt.

Soll überhaupt die Energie eines Körpers bei constanter Temperatur von seinem Volumen unabhängig sein, so muss nach (c) die Zustandsgleichung desselben die Form

$$p / \vartheta = f(v)$$

haben.

§ 115. Die Differentialquotienten.

In der Regel ist die Zustandsgleichung nicht bekannt, dagegen weiss man bei manchen Körpern, wenn auch innerhalb enger Grenzen, wie das Volumen vom Drucke und der Temperatur abhängt. Für ein gewisses Gebiet kann also die Zustandsgleichung aufgestellt werden, welche die Form

$$\text{(a)} \qquad f(v, p, \vartheta) = 0$$

haben möge. *Bleibt der Druck p constant*, so ist

$$f(p, v + dv, \vartheta + d\vartheta) = 0 \text{ und } \partial f / \partial v . dv + \partial f / \partial \vartheta . d\vartheta = 0.$$

Das Verhältniss zwischen dv und $d\vartheta$ schreiben wir in der Form $(\partial v / \partial \vartheta)_p$. Das Volumen v des Körpers wird meist in der Form

$$v = v_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + \ldots)$$

angegeben, wo $t = \vartheta - 273$ ist. Wir haben demnach

$$(\partial v / \partial \vartheta)_p = v \big(\alpha + 2\beta(\vartheta - 273) + \ldots\big) / \big(1 + \alpha(\vartheta - 273) + \ldots\big).$$

Wenn β sehr klein ist, so wird

$$\text{(b)} \qquad (\partial v / \partial \vartheta)_p = v\alpha.$$

Diese Formel kann übrigens stets auch dann benutzt werden, wenn α eine Function von ϑ ist.

Ist dagegen in der Gleichung (a) *die Temperatur ϑ constant*, so haben wir

$$\partial f / \partial p . dp + \partial f / \partial v . dv = 0,$$

und hierdurch kann die Veränderung des Volumens durch den Druck bei constanter Temperatur ermittelt werden. Da eine Druckvergrösserung eine Verminderung des Volumens zur Folge hat, so ist $(\partial v / \partial p)_\vartheta$ negativ. Aus der Elasticitätstheorie (vergl. § 29) haben wir für flüssige und feste Körper

$$\lambda \partial v / v = -\partial p \quad \text{und} \quad \Theta = \partial v / v = -(1 - 2k) 3 \partial p / E$$

zu setzen. Also wird

$$\text{(c)} \qquad (\partial v / \partial p)_\vartheta = -v / \lambda.$$

Für die idealen Gase ergiebt sich aus der Zustandsgleichung, dass $(\partial v / \partial p)_\vartheta = -v / p$ ist, also wird $\lambda = p$.

Wenn das Volumen des Körpers constant bleibt, so wird durch die Temperaturzunahme $d\vartheta$ des Körpers der Druck um dp gesteigert; wir erhalten auf diese Weise eine dritte Grösse $(\partial p / \partial \vartheta)_v$. Ausser den betrachteten Differentialquotienten sind noch drei andere zu berücksichtigen, nämlich $\partial \vartheta / \partial v$, $\partial p / \partial v$ und $\partial \vartheta / \partial p$, welche mit den erwähnten durch folgende Beziehungen

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} (\partial v / \partial \vartheta)_p . (\partial \vartheta / \partial v)_p = 1, \quad (\partial v / \partial p)_\vartheta . (\partial p / \partial v)_\vartheta = 1, \\ (\partial p / \partial \vartheta)_v . (\partial \vartheta / \partial p)_v = 1 \end{cases}$$

verknüpft sind.

LM und NP (Fig. 139) seien zwei isotherme Curven, welchen die Temperaturen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ entsprechen. Wir haben dann

$$(\partial p / \partial v)_\vartheta = \operatorname{tg} AEv,$$

wenn AE die Tangente im Punkte A der isothermen Curve mit dem Parameter ϑ ist. Steht BAD senkrecht zu Ov und ist AC parallel mit Ov, so wird

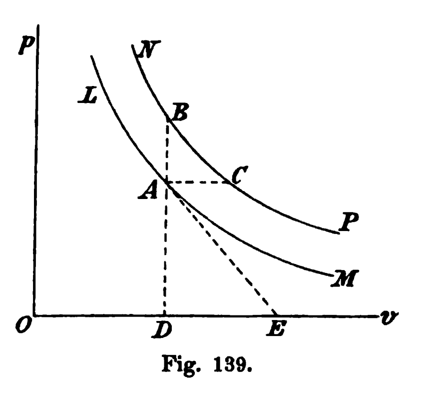


Fig. 139.

$$\operatorname{tg} AEv = -AD / DE = -AB / AC,$$

und demnach

$$(\partial p / \partial v)_\vartheta = - AB / AC.$$

Ferner ist zugleich

$$(\partial v / \partial \vartheta)_p = AC / d\vartheta, \quad (\partial \vartheta / \partial p)_v = d\vartheta / AB.$$

Also erhalten wir

(e) $$(\partial p / \partial v)_\vartheta . (\partial v / \partial \vartheta)_p . (\partial \vartheta / \partial p)_v = - 1.$$

Aus den Gleichungen (d) und (e) erkennt man, dass es hinreichend ist, zwei von einander unabhängige Differentialquotienten zu kennen. Die Gleichung (e) kann auch folgendermaassen abgeleitet werden. Wenn p als Function von v und ϑ betrachtet wird, so haben wir

$$dp = (\partial p / \partial v)_\vartheta . dv + (\partial p / \partial \vartheta)_v . d\vartheta.$$

Nehmen wir einen constanten Druck an, also $dp = 0$, so wird

$$dv / d\vartheta = - (\partial p / \partial \vartheta)_v / (\partial p / \partial v)_\vartheta.$$

Die hier auftretende Grösse $dv / d\vartheta$ ist eben die mit $(\partial v / \partial \vartheta)_p$ bezeichnete; wir gelangen damit wiederum zur Gleichung (e) zurück.

Für die Gase ist

$$(\partial p / \partial v)_\vartheta = - p / v; \quad (\partial v / \partial \vartheta)_p = R / p; \quad (\partial \vartheta / \partial p)_v = v / R.$$

Diese Werthe genügen der Gleichung (e).

Für die Flüssigkeiten und festen Körper haben wir

$$(\partial v / \partial \vartheta)_p = \alpha v, \quad (\partial v / \partial p)_\vartheta = - v / \lambda.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (e) ist dann

(f) $$(\partial p / \partial \vartheta)_v = \alpha \lambda.$$

§ 116. Flüssige und feste Körper.

Sind ϑ und v unabhängige Variable, so haben wir nach § 111

(a) $$J . dQ = (\partial U / \partial \vartheta)_v . d\vartheta + \left((\partial U / \partial v)_\vartheta + p\right) . dv.$$

Bei Anwendung des zweiten Hauptsatzes erhalten wir dann nach § 114 (c)

(b) $$(\partial U / \partial v)_\vartheta = \vartheta^2 . \partial (p / \vartheta)_v / \partial \vartheta = \vartheta . (\partial p / \partial \vartheta)_v - p.$$

Dadurch erlangt die Gleichung (a) die Form

(c) $$J.dQ = (\partial U / \partial \vartheta)_v . d\vartheta + \vartheta . (\partial p / \partial \vartheta)_v . dv.$$

Bezeichnen wir die specifische Wärme bei constantem Volumen mit c_v, so ist

(d) $$J.c_v = (\partial U / \partial \vartheta)_v.$$

Mit Rücksicht auf § 115 (f) lautet die Gleichung (c)

(e) $$dQ = c_v . d\vartheta + \vartheta \alpha \lambda . dv / J.$$

Aus den Gleichungen (b) und (d) folgt

(f) $$J . \partial c_v / \partial v = \partial^2 U / \partial v \partial \vartheta = \vartheta . \partial (\partial p / \partial \vartheta)_v / \partial \vartheta,$$

und also in Rücksicht auf § 115 (f)

(g) $$J . \partial c_v / \partial v = \vartheta . \partial (\alpha \lambda) / \partial \vartheta.$$

Dieses ergiebt sich auch aus der Gleichung (e) bei Benutzung des zweiten Hauptsatzes. Die Gleichung (g) zeigt, dass c_v vom Volumen unabhängig ist, wenn $\alpha \lambda$ nicht von der Temperatur abhängt.

Um den Zusammenhang zwischen der zugeführten Wärmemenge einerseits und dem Drucke und der Temperatur andererseits auszudrücken, setzen wir

$$dv = (\partial v / \partial \vartheta)_p . d\vartheta + (\partial v / \partial p)_\vartheta . dp,$$

und erhalten dann aus (c)

$$J.dQ = \{(\partial U / \partial \vartheta)_v + \vartheta . (\partial p / \partial \vartheta)_v . (\partial v / \partial \vartheta)_p\} d\vartheta$$
$$+ \vartheta . (\partial p / \partial \vartheta)_v . (\partial v / \partial p)_\vartheta . dp,$$

oder in Rücksicht auf § 115 (e)

(h) $$J.dQ = \{Jc_v - \vartheta . (\partial v / \partial \vartheta)_p^2 / (\partial v / \partial p)_\vartheta\} d\vartheta - \vartheta . (\partial v / \partial \vartheta)_p . dp.$$

Ist c_p die specifische Wärme bei constantem Drucke, so haben wir

$$c_p = c_v - \vartheta / J . (\partial v / \partial \vartheta)_p^2 / (\partial v / \partial p)_\vartheta.$$

Da nun $\partial v / \partial p$ stets negativ ist, so ist $c_p > c_v$, wofern nicht $\partial v / \partial \vartheta = 0$ wird, was z. B. für Wasser bei 4° C. eintritt.

Werden die in § 115 für die Differentialquotienten gefundenen Werthe eingeführt, so erhalten wir

(i) $$J.dQ = \{Jc_v + \alpha^2 \lambda v \vartheta\} d\vartheta - \alpha v \vartheta . dp$$

und

(k) $$c_p = c_v + \alpha^2 \lambda v \vartheta / J.$$

Die Temperatur einer Flüssigkeit oder eines festen Körpers wird durch Compression verändert. Setzen wir in der Gleichung (i) $dQ = 0$, so ist die Temperaturzunahme $d\vartheta$ bei der Steigerung des Druckes um dp

$$d\vartheta = + \alpha v \vartheta / c_p J . dp,$$

d. h. *die Temperatur nimmt mit wachsendem Drucke zu, wenn α positiv ist, also wenn bei einer Erwärmung der Körper sich ausdehnt; ist dagegen α negativ, so nimmt die Temperatur bei steigendem Drucke ab.*

§ 117. Die Wärmeentwickelung bei der Dehnung.

Wird auf die Flächeneinheit der Endflächen eines festen cylindrischen Körpers der Druck p ausgeübt, so erfährt die Längeneinheit die Verkürzung p / s, wo s eine Constante ist. Ist l die ursprüngliche Länge des Cylinders bei der Temperatur 0° C., so ist die Länge L desselben bei der Temperatur ϑ und dem Drucke p, wenn die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird,

(a) $$L = l . (1 - p / s) . \big(1 + \beta(\vartheta - 273)\big),$$

wo β der *Ausdehnungscoefficient* ist.

Wird der Körper um dL verlängert und erfährt er die Temperaturzunahme $d\vartheta$, so ist dazu die Wärmemenge dQ erforderlich; die bei der Ausdehnung geleistete Arbeit ist $A . p . dL$, wenn A der Querschnitt des Cylinders ist. Es sei M die Masse des Körpers und U die innere Energie in der Masseneinheit bei der Temperatur ϑ und der Länge L, so haben wir

(b) $$J . dQ = M . \partial U / \partial \vartheta . d\vartheta + (M . \partial U / \partial L + Ap) . dL.$$

Bei Anwendung des zweiten Hauptsatzes auf diesen Ausdruck erhalten wir

$$\partial (M / \vartheta . \partial U / \partial \vartheta) / \partial L = \partial (M / \vartheta . \partial U / \partial L + Ap / \vartheta) / \partial \vartheta$$

oder

$$M . (\partial U / \partial L)_\vartheta = \vartheta^2 . A . \partial (p / \vartheta)_L / \partial \vartheta .$$

Demnach ergiebt sich

$$J.dQ = M.(\partial U/\partial \vartheta)_L . d\vartheta + \vartheta . A . (\partial p/\partial \vartheta)_L . dL.$$

Werden ϑ und p als unabhängige Variable betrachtet, so ist

$$dL = (\partial L/\partial \vartheta)_p . d\vartheta + (\partial L/\partial p)_\vartheta . dp$$

und

$$J.dQ = [M.(\partial U/\partial \vartheta)_L + \vartheta . A . (\partial p/\partial \vartheta)_L . (\partial L/\partial \vartheta)_p] d\vartheta$$
$$+ \vartheta . A . (\partial p/\partial \vartheta)_L . (\partial L/\partial p)_\vartheta . dp.$$

Da die Formveränderung sehr klein ist, so haben wir, wenn mit c_p die specifische Wärme bei constantem Drucke bezeichnet wird,

$$\text{(c)} \qquad J.dQ = JMc_p . d\vartheta - \vartheta A . (\partial L/\partial \vartheta)_p . dp,$$

da nach Analogie des § 115 (e)

$$(\partial p/\partial \vartheta)_L . (\partial \vartheta/\partial L)_p . (\partial L/\partial p)_\vartheta = -1$$

ist. Wird der Druck auf die Endfläche um dp vermehrt, sodass der Gesammtdruck $A.dp = P$ ist und wird keine Wärme zugeführt, so wächst die Temperatur des Körpers um

$$d\vartheta = \vartheta P L \beta / J M c_p,$$

oder, wenn die Masse der Längeneinheit mit m bezeichnet wird, um

$$d\vartheta = \vartheta \beta P / J m c_p.$$

Wäre durch die Kraft P der Cylinder ausgedehnt, so würde eine entsprechende Abkühlung eingetreten sein.

§ 118. Van der Waals' Zustandsgleichung.

Die Zustandsgleichung eines idealen Gases ist $pv = R\vartheta$; die isotherme Curve ist also eine gleichseitige Hyperbel. Die wirklichen Gase verhalten sich jedoch bei niedriger Temperatur und hohem Drucke wesentlich anders. Eine bestimmte Gasmenge habe bei einer gegebenen Temperatur das Volumen OC' (Fig. 140) und befinde sich unter dem Drucke CC'. Wird der Druck vergrössert, während die Temperatur constant bleibt, so wird das Volumen verkleinert. Zuletzt ist der Raum mit dem betrachteten Gase *gesättigt;* der entsprechende Druck sei DD'. DD' ist dann die *Spannkraft des gesättigten Dampfes*

bei der betrachteten Temperatur. Wird das Volumen noch weiter verkleinert, so bleibt der Druck constant, während ein Theil des Dampfes in den tropfbarflüssigen Zustand übergeht. Schliesslich ist der ganze Dampf in den tropfbarflüssigen Zustand übergegangen; das entsprechende Volumen sei OF'. *Solange also Dampf und Flüssigkeit sich in demselben Raume befinden, ist die isotherme Curve eine gerade Linie, welche der Axe Ov parallel ist.* Wird das Volumen der Flüssigkeit nun verkleinert, so wächst der Druck sehr rasch an, die zugehörige isotherme Curve ist in Fig. 140 durch FG dargestellt. Durch

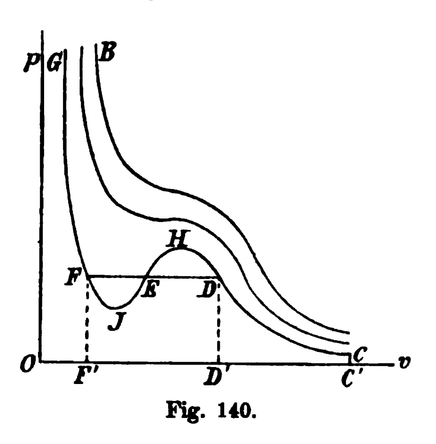


Fig. 140.

Versuche mit Kohlensäure hat Andrews gefunden, dass mit steigender Temperatur die Strecke DF kürzer wird, und dass bei einer gewissen Temperatur, welche als *kritische Temperatur* von ihm bezeichnet ist, die Länge der Strecke DF Null wird. Bleibt die Temperatur der Kohlensäure constant, so ändert sich der Zustand derselben auf Curven, die in Fig. 141 nach den Untersuchungen von Andrews dargestellt sind. Die Abscissen stellen das Volumen, die Ordinaten stellen den Druck dar. Betrachten wir z. B. die isotherme Curve $ABCD$, welche der Temperatur 15,1° C. entspricht, so befindet sich im Punkte A die Kohlensäure noch im gasförmigen Zustande; bei B ist die Kohlensäure als gesättigter Dampf zu betrachten. Wird die Compression noch weiter ausgeführt, so tritt eine Verdichtung ein, während der Druck so lange constant bleibt,

bis die Kohlensäure in den tropfbarflüssigen Zustand übergegangen ist, d. h. bis der Zustand der Kohlensäure durch *C* dargestellt ist. Von *C* ab nimmt der Druck sehr rasch zu, wenn das Volumen vermindert wird. Bei der Temperatur 21,5° C. beginnt die Verdichtung erst bei *B'*; der horizontale

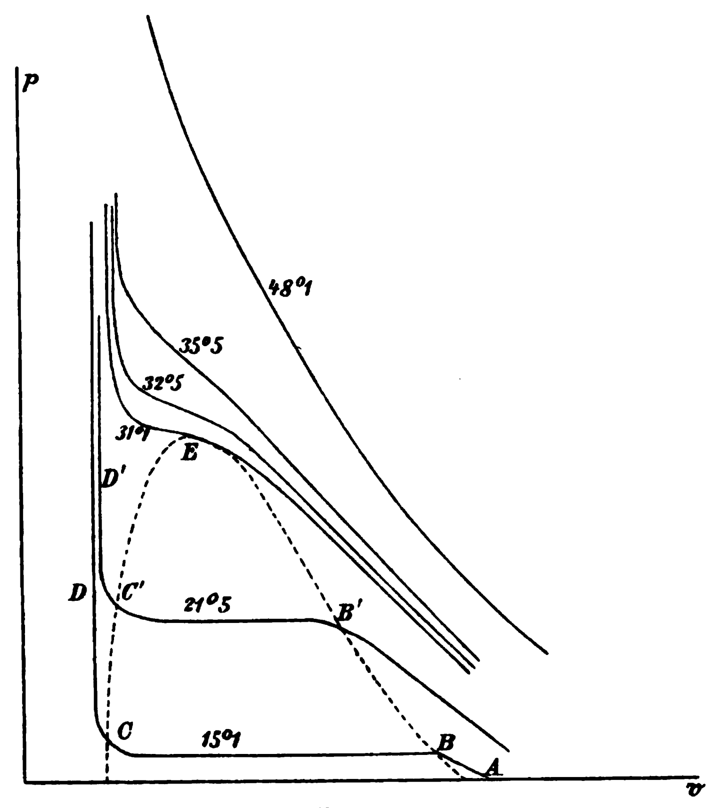


Fig. 141.

Theil der isothermen Curve ist hier kürzer. Bei 31,1° C. ist der horizontale Theil der isothermen Curve gleich Null; wir haben jetzt die kritische Temperatur erreicht. Die Isothermen, welche höheren Temperaturen entsprechen, sind stetig gekrümmt; es ist also unmöglich, die Kohlensäure in den tropfbarflüssigen Zustand zu bringen bei einer Temperatur,

welche höher als 31,1° C. ist. Bei höheren Temperaturen als 31,1° C. ist demnach bei der Kohlensäure kein sichtbarer Unterschied zwischen dem luftförmigen und dem flüssigen Zustande vorhanden. Bei der kritischen Temperatur hat die Flüssigkeit dieselbe Dichte, wie der gesättigte Dampf. *Der Dampf kann nur dann durch Compression in den flüssigen Zustand übergeführt werden, wenn seine Temperatur unter der kritischen Temperatur liegt.*

James Thomson hat an Stelle der hier beschriebenen isothermen Curve eine continuirliche Curve $CDHEJFG$ (Fig. 140) gesetzt; der Theil $DHEJF$ soll dem instabilen Zustande entsprechen, und es scheint wirklich aus verschiedenen Versuchen über das Verhalten der Dämpfe und Flüssigkeiten beim Siedepunkte hervorzugehen, dass es möglich ist, den Dampf in den durch DH und FJ dargestellten Zuständen zu erhalten, während die Zustände HEJ durchaus instabil sind, da einer Volumenverminderung auch eine Druckverminderung entspricht.

J. Clerk Maxwell hat auf eine merkwürdige Eigenschaft der betrachteten Isotherme aufmerksam gemacht, welche aus den Hauptsätzen der Wärmetheorie sich ergiebt. Durchläuft ein Gas den Kreisprocess $FEDHEJF$, so empfange der Körper beim geradlinigen Uebergange von F nach D die Wärmemenge L und gäbe längs der Curve $DHEJF$ die Wärmemenge L' ab; die Temperatur ist auf beiden Wegen dieselbe. Da das Gas einen vollständigen Kreisprocess durchlaufen hat, so haben wir

$$\int dQ / \vartheta = L / \vartheta - L' / \vartheta = 0,$$

und also

$$L = L'.$$

Da also bei diesem Kreisprocesse keine Wärme verbraucht ist, so kann auch keine Arbeit geleistet sein, und es ist demnach die Fläche FJE gleich der Fläche DHE. Ist demnach die isotherme Curve $CDHEJFG$ gegeben, so kann der maximale Druck des Dampfes dadurch ermittelt werden, dass man die Linie FD so bestimmt, dass die Flächen FJE und DHE gleich gross werden.

Van der Waals hat eine Zustandsgleichung der Gase aufgestellt, welche genauer das Verhalten der Gase verfolgen lässt und welche gestattet, die kritische Temperatur zu berechnen. Nicht nur durch den äusseren Druck, sondern auch durch die wechselseitige Anziehung der Moleküle wird das Gas zusammengehalten; diese Anziehung können wir uns durch eine Vergrösserung p' des äusseren Druckes p ersetzt denken. Da bei wachsender Dichte sowohl die anziehenden als die angezogenen Moleküle näher zusammenrücken, so muss p' dem Quadrate der Dichte direct, also dem Quadrate des Volumens indirect proportional sein, und wir setzen demnach $p' = a/v^2$, sodass der Gesammtdruck des Gases $p + a / v^2$ ist. Ausserdem haben die Moleküle nicht den ganzen Raum v bei ihrer Bewegung zur Verfügung, sondern die Moleküle nehmen selbst einen Theil des Raumes v ein. Van der Waals nimmt an, dass das Volumen eines flüssigen Körpers nicht unter eine gewisse Grenze sinken kann, ohne dass die Beweglichkeit der Theile aufhört. An Stelle des wahren Volumens v des Körpers betrachtet er daher ein Volumen $v - b$, wo b eine sehr kleine Grösse ist, welche aber sehr viel grösser ist (ca. 4—8 mal), als das Volumen aller Moleküle des Gases. Die Bewegung der Moleküle kann also nur in dem Raume $(v - b)$ stattfinden. So erhalten wir die Zustandsgleichung

$$(p + a / v^2)(v - b) = R\vartheta. \tag{a}$$

Für ein sehr grosses Volumen v ergiebt sich wiederum die Zustandsgleichung der idealen Gase.

Die Lage der Punkte H und J (Fig. 140), in denen die Tangenten der isothermen Curve der v-Axe parallel sind, ergiebt sich aus der Gleichung

$$dp / dv = 0$$

oder

$$p + a / v^2 - 2a(v - b) / v^3 = 0. \tag{b}$$

Dieses ist die Gleichung der Curve, welche durch alle Punkte geht, in welchen die isothermen Curven Tangenten haben, welche der Axe Ov parallel sind. Alle diese isothermen Curven entsprechen nun Temperaturen, bei welchen der Körper sowohl tropfbarflüssig als auch luftförmig sein kann. Erst wenn

die beiden Punkte zusammenfallen, gelangen wir zum kritischen Zustande. Da aber die zwei zusammenfallenden Punkte eine Verbindungslinie haben müssen, welche der Axe Ov parallel ist, so haben wir in der vorigen Gleichung für den kritischen Zustand $dp/dv = 0$, oder

(c) $$6a(v - b)/v^4 - 4a/v^3 = 0.$$

Bezeichnen wir mit v_1 das *kritische Volumen*, d. h. das Volumen der Masseneinheit des Gases oder der Flüssigkeit bei der kritischen Temperatur, so erhalten wir aus der letzten Gleichung

(d) $$v_1 = 3b.$$

Dementsprechend werden die kritische Temperatur ϑ_1 und der kritische Druck p_1, welcher nöthig ist, damit die Flüssigkeit bei einer Temperatur, die unendlich wenig unter der kritischen Temperatur liegt, nicht siede.

(e) $$\vartheta_1 = 1/R.8a/27b, \quad p_1 = a/27b^2.$$

Diese Resultate ergeben sich, wenn wir den Werth von v_1 in (b) und (a) einführen.

Werden v_1, ϑ_1 und p_1 zu Einheiten des Volumens, der Temperatur und des Druckes gewählt, so kann gesetzt werden

$$v = Vv_1 = V.3b, \; p = Pp_1 = P.a/27b^2, \; \vartheta = T\vartheta_1 = T.8a/27bR,$$

und die Zustandsgleichung lautet dann

(f) $$(P + 3/V^2)(3V - 1) = 8T.$$

Hieraus ergiebt sich folgender Satz: *Drückt man den Druck in Theilen des kritischen Druckes, das Volumen in Theilen des kritischen Volumens, und die absolute Temperatur in Theilen der absoluten kritischen Temperatur aus, so werden die Isothermen für alle Körper dieselben.* Wir betrachten jetzt einige Anwendungen der Formel (f).

a) Die Gleichung (f) kann in die Form

$$3PV - P + 9/V - 3/V^2 = 8T$$

gebracht werden. Ist V gross, d. h. ist der Körper luftförmig. so können wir P durch $\frac{8}{3}T/V$ ersetzen und erhalten

$$3PV = 8T + (\tfrac{8}{3}T - 9).1/V + 3/V^2.$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite kann unberücksichtigt bleiben. Die Gase befolgen demnach das Mariotte'sche Gesetz, wenn $T = 27/8$ und $\vartheta = T\vartheta_1 = 27/8 . \vartheta_1$ ist. Hat ϑ einen kleineren Werth, so verhält sich das Gas wie ein Dampf; hat ϑ einen grösseren Werth, so verhält es sich wie atmosphärische Luft.

b) Der Coefficient α_v, welcher als *Spannungscoefficient* (früher Ausdehnungscoefficient bei constantem Volumen) bezeichnet wird und die Aenderung des Druckes bei der Temperaturerhöhung von 1° C. bei constantem Volumen des Gases angiebt, wird folgendermaassen bestimmt. Wir haben

$$\alpha_v = 1/p . \partial p / \partial \vartheta = 1/\vartheta_1 P . \partial P / \partial T = 1/\vartheta_1 . 8/(3PV - P)$$
$$= 1/\vartheta_1 . 1/(T - \tfrac{9}{8} . 1/V + \tfrac{3}{8} . 1/V^2).$$

Für sehr grosse Werthe von V wird $\alpha_v = 1/\vartheta$, entsprechend einem idealen Gase. Ferner ist

$$\alpha_v . \vartheta_1 = 1/(T - \tfrac{9}{8} . 1/V + \tfrac{3}{8} . 1/V^2).$$

Als correspondirende Zustände definirt van der Waals solche, bei denen die Volumina, Drucke und Temperaturen für beide in demselben Verhältniss stehen zu denselben Grössen im kritischen Zustande, d. h. wenn

$$v/v_1 = v'/v_1' = V, \quad p/p_1 = p'/p_1' = P, \quad \vartheta/\vartheta_1 = \vartheta'/\vartheta_1' = T,$$

wo die Grössen v', v_1', p' u. s. w. sich auf das zweite Gas beziehen; so haben wir

$$\alpha_v \vartheta_1 = \alpha_v' \vartheta_1' \quad \text{oder} \quad \alpha_v / \alpha_v' = \vartheta_1' / \vartheta_1 .$$

Die Coefficienten α_v und α_v' verhalten sich demnach in correspondirenden Zuständen umgekehrt wie die kritischen Temperaturen.

c) *Der Ausdehnungscoefficient* α_p, welcher die Vergrösserung des Volumens bei der Temperaturzunahme 1° C. und bei constantem Drucke angiebt, ist folgendermaassen definirt

$$\alpha_p = 1/v . \partial v / \partial \vartheta = 1/\vartheta_1 V . \partial V / \partial T$$
$$= 1/\vartheta_1 . 1/(T + \tfrac{1}{8} P - \tfrac{9}{4} . 1/V + \tfrac{9}{8} . 1/V^2).$$

Bei wachsendem Werthe V nähert sich α_p dem Werthe α_v. Sind die Körper in correspondirendem Zustande, so haben wir

$$\alpha_p \vartheta_1 = \alpha_p' \vartheta_1'.$$

Ist der Ausgangspunkt für diese Betrachtungsweise richtig, so muss sie auch Anwendung finden auf die Ausdehnung der Flüssigkeiten durch die Wärme. Da der Druck bei den Flüssigkeiten nur von untergeordneter Bedeutung ist, so genügt es, die Ausdehnungscoefficienten bei correspondirenden Temperaturen zu vergleichen. Die von v. d. Waals angestellten Berechnungen haben gezeigt, dass der Satz der Hauptsache nach für Flüssigkeiten mit bekannten kritischen Temperaturen richtig ist.

d) *Der Druck gesättigter Dämpfe.*

Zur Bestimmung des Druckes gesättigter Dämpfe benutzen wir das oben erwähnte Theorem von Maxwell, welches aussagt, dass die Fläche $F'FEDD'$ (Fig. 140) der Fläche $F'FJEHDD'$ gleich ist, d. h. wenn $OF' = V_1$, $OD' = V_2$ und $F'F = D'D = P_1$ gesetzt wird, haben wir

$$P_1(V_2 - V_1) = \int_{V_1}^{V_2} P . d V.$$

Durch Ausführung der Integration ergiebt sich bei Benutzung der Zustandsgleichung (f)

(g) $\frac{8}{3} . T . \log\left((3V_2 - 1)/(3V_1 - 1)\right) = (P_1 + 3/V_1 V_2)(V_2 - V_1).$

Für die Punkte F und D gelten die Gleichungen

$(P_1 + 3/V_1^2)(3V_1 - 1) = 8T$ und $(P_1 + 3/V_2^2)(3V_2 - 1) = 8T.$

Werden V_1 und V_2 aus diesen drei Gleichungen eliminirt, so ergiebt sich eine Beziehung zwischen dem Drucke P_1 des gesättigten Dampfes und der Temperatur T. Hieraus können wir mit v. d. Waals den Schluss ziehen: *Ist für verschiedene Körper die absolute Temperatur derselbe Theil der kritischen Temperatur, so ist auch der Druck des gesättigten Dampfes für dieselben ein gleich grosser Theil des kritischen Druckes.* Aehnliche Sätze gelten über die Abhängigkeit des Volumens der gesättigten Dämpfe vom Drucke und von der Temperatur.

Auf Grund der von v. d. Waals angestellten Untersuchungen hat Clausius eine etwas veränderte Form der Zustandsgleichung angegeben, nämlich

$$\left(p + a/\vartheta(v + \beta)^2\right)(v - b) = R\vartheta.$$

Diese Gleichung stellt die wirklichen Verhältnisse besser dar, aber sie führt übrigens im Wesentlichen zu denselben Resultaten, wie jene. Geht man von der bekannten Gleichung

(h) $$J.dQ = (\partial U / \partial \vartheta)_v d\vartheta + ((\partial U / \partial v)_\vartheta + p) dv$$

aus, so gelangt man bei Anwendung des zweiten Hauptsatzes zu der Relation [vergl. § 114 (c)]

$$(\partial U / \partial v)_\vartheta = \vartheta^2 . \partial (p / \vartheta)_v / \partial \vartheta .$$

Nach der Zustandsgleichung von Clausius ist

$$p / \vartheta = R / (v - b) - a / \vartheta^2 (v + \beta)^2 ,$$

und demnach

(i) $$(\partial U / \partial v)_\vartheta = 2a / \vartheta (v + \beta)^2 .$$

Wird die Temperatur um $d\vartheta$, das Volumen um dv vergrössert, so erhält die innere Energie den Zuwachs

(k) $$dU = Jc_v . d\vartheta + 2a / \vartheta (v + \beta)^2 . dv ,$$

wo

$$Jc_v = (\partial U / \partial \vartheta)_v$$

eine unbekannte Function von ϑ und v ist. Sind die Aenderungen der Temperatur sehr gering, so kann c_v, wie die Beobachtungen zeigen, als constant betrachtet werden. Wächst die Temperatur von ϑ auf $\vartheta + \triangle \vartheta$, während v von v_1 auf v_2 wächst, so wird der Zuwachs $\triangle U$ der inneren Energie näherungsweise gleich

(l) $$\triangle U = Jc_v . \triangle \vartheta + 2a / \vartheta . (1 / v_1 - 1 / v_2) .$$

Dehnt das Gas sich aus, ohne einen Widerstand zu haben, so bleibt die innere Energie unverändert. Setzen wir demnach in der Gleichung (l) $\triangle U = 0$, so ergiebt sich

(m) $$\triangle \vartheta = - 2a / Jc_v \vartheta . (1 / v_1 - 1 / v_2) .$$

Die Temperatur sinkt in diesem Falle.

§ 119. Der gesättigte Dampf.

Wird das Volumen eines Gramm Dampf oder das *specifische Volumen* mit v_1 und das Volumen eines Gramm Flüssigkeit mit v_2 bezeichnet, so ist der Raum v von einem Gramm Flüssigkeit mit Dampf

(a) $$v = v_1 x + v_2 (1 - x) ,$$

wenn x Gramm Dampf und also $(1-x)$ Gramm Flüssigkeit im Raum enthalten sind. Ist U_1 die innere Energie des Dampfes, U_2 die der Flüssigkeit, so ist die innere Energie U eines Gemisches beider

(b) $$U = U_1 x + U_2 (1-x).$$

Solange der Dampf gesättigt ist, hängen die innere Energie und der Druck nur von der Temperatur ab; der Druck und das Volumen der Flüssigkeit werden ebenfalls durch die Temperatur bestimmt. Wir haben also für ein Gemisch von Flüssigkeit mit gesättigtem Dampf

(c) $$p = f(\vartheta),$$

p ist die Spannung des gesättigten Dampfes für die Temperatur ϑ; folglich ist ϑ der Siedepunkt der Flüssigkeit beim Drucke p.

Diejenige Wärmemenge, welche zur Umwandlung 1 Gramm Flüssigkeit in Dampf bei der constanten Temperatur ϑ und dem entsprechenden Drucke p erforderlich ist, heisst *Verdampfungswärme L.* Diese Wärme vermehrt einerseits die innere Energie, andererseits dient sie zur Leistung äusserer Arbeit. Ist U_2 die Energie der Flüssigkeit bei ϑ^0, U_1 die des Dampfes bei derselben Temperatur, so hat die innere Energie den Zuwachs $U_1 - U_2$ erfahren. Da der Druck p constant ist, so ist die äussere Arbeit

$$\int_{v_2}^{v_1} p\, dv = p(v_1 - v_2).$$

Die Arbeit, welche zur Bildung eines Gramm Dampf erforderlich ist, wird

(d) $$J.L = U_1 - U_2 + p(v_1 - v_2).$$

Wenn eine Mischung von Flüssigkeit und Dampf sowohl Wärme empfängt als auch das Volumen ändert, so ist der Zuwachs an innerer Energie, da ϑ und x variiren

(e) $$dU = (U_1 - U_2)\,dx + \big(x\,.\,\partial U_1 / \partial \vartheta + (1-x)\,.\,\partial U_2 / \partial \vartheta\big)\,d\vartheta.$$

Da nach der Gleichung (a)

(f) $$dv = (v_1 - v_2)\,dx + \big(x\,.\,\partial v_1 / \partial \vartheta + (1-x)\,.\,\partial v_2 / \partial \vartheta\big)\,d\vartheta,$$

so ergiebt sich aus der Gleichung $J.dQ = dU + p\,.\,dv$, dass die zugeführte Wärme sich bestimmt aus

$$\text{(g)} \quad \begin{cases} J.dQ = \{x(\partial U_1 / \partial \vartheta + p . \partial v_1 / \partial \vartheta) + (1-x)(\partial U_2 / \partial \vartheta \\ \quad + p . \partial v_2 / \partial \vartheta)\} d\vartheta + (U_1 + p v_1 - U_2 - p v_2) dx. \end{cases}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $d\vartheta = 0$, so ergiebt sich durch Integration von $x = 0$ bis $x = 1$ die Gleichung (d). Bringen wir die Gleichung (g) in die Form

$$J . dQ = \Theta . d\vartheta + X . dx,$$

so folgt aus dem Carnot-Clausius'schen Theorem

$$\partial(\Theta / \vartheta) / \partial x = \partial(X / \vartheta) / \partial \vartheta.$$

Es ist aber

$$\partial(\Theta / \vartheta) / \partial x = 1 / \vartheta . (\partial U_1 / \partial \vartheta + p . \partial v_1 / \partial \vartheta) - 1 / \vartheta . (\partial U_2 / \partial \vartheta + p . \partial v_2 / \partial \vartheta).$$

$$\partial(X / \vartheta) / \partial \vartheta = 1 / \vartheta . (\partial U_1 / \partial \vartheta + p . \partial v_1 / \partial \vartheta + v_1 . \partial p / \partial \vartheta) - 1 / \vartheta . (\partial U_2 / \partial \vartheta + p . \partial v_2 / \partial \vartheta + v_2 . \partial p / \partial \vartheta) - 1 / \vartheta^2 . (U_1 + p v_1 - U_2 - p v_2).$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$\text{(h)} \qquad U_1 - U_2 = (v_1 - v_2) . \vartheta . \partial p / \partial \vartheta - p(v_1 - v_2),$$

und dadurch ist die Differenz zwischen der inneren Energie des Dampfes und derjenigen der Flüssigkeit bestimmt.

Aus den Gleichungen (d) und (h) erhalten wir

$$\text{(i)} \qquad J L = (v_1 - v_2) \vartheta . \partial p / \partial \vartheta.$$

Nun ist aber offenbar $v_1 > v_2$, demnach ist auch $\partial p / \partial \vartheta$ eine positive Grösse. *Der Siedepunkt ist also um so höher, je höher der Druck ist.*

Man kann die Gleichung (i) auch auf den *Schmelzprocess* anwenden. v_1 bedeutet dann das Volumen der Flüssigkeit und v_2 das Volumen des festen Körpers. Hier sind zweierlei Substanzen zu unterscheiden, wir haben solche, deren Volumen während des Schmelzens wächst (z. B. Wachs), und solche, deren Volumen während des Schmelzens abnimmt (z. B. Eis). Bei den ersteren ist $v_1 > v_2$ und $\partial p / \partial \vartheta =$ posit., bei den letzteren ist $v_1 < v_2$ und $\partial p / \partial \vartheta =$ neg. *Bei den Substanzen, deren Volumen während des Schmelzprocesses wächst, liegt die Schmelztemperatur um so höher, je höher der Druck ist. Bei den übrigen Substanzen, deren Volumen während des Schmelzens*

abnimmt, sinkt die Schmelztemperatur um so tiefer, je höher der Druck ist.

Soll der Raum immer nur gesättigten Dampf enthalten, so ergiebt sich aus (g), da $x = 1$ ist,

$$J . d Q = (\partial U_1 / \partial \vartheta + p . \partial v_1 / \partial \vartheta) d \vartheta . \tag{k}$$

$d Q$ ist also die Wärmemenge, welche dem Dampfe zugeführt werden muss, damit dessen Temperatur den Zuwachs $d \vartheta$ erhält, und damit gleichzeitig derselbe gesättigt bleibt.

Nach der Gleichung (d) ist

$$U_1 - U_2 = J L - p (v_1 - v_2) .$$

Wird die specifische Wärme der Flüssigkeit mit c bezeichnet, und ist k eine Constante, so kann $U_2 = J c \vartheta + k$ gesetzt werden. Betrachten wir v_2 als constant, so ergiebt sich

$$\partial U_1 / \partial \vartheta = J c + J . d L / d \vartheta - (v_1 - v_2) . \partial p / \partial \vartheta - p . \partial v_1 / \partial \vartheta .$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (i) haben wir dann aus (k)

$$d Q = (d L / d \vartheta - L / \vartheta + c) d \vartheta .$$

Wird die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um den Dampf um 1° C. zu erwärmen, während derselbe zugleich gesättigt bleibt, mit h bezeichnet, so haben wir

$$h = d L / d \vartheta - L / \vartheta + c . \tag{l}$$

§ 120. Die Entropie.

Die Betrachtungen, welche hier über das Gleichgewicht zwischen einer Flüssigkeit und ihrem Dampfe angestellt sind, lassen sich auch in vielen anderen Fällen mit Nutzen verwenden, besonders bei chemischen Aufgaben. In Wirklichkeit gehen alle Betrachtungen von der Gleichung $\int d Q / \vartheta = 0$ für einen Kreisprocess aus. M. Planck hat allgemeine Formeln angegeben, welche solche Aufgaben leicht zu behandeln gestatten. Die Körper, deren chemisches Gleichgewicht untersucht werden soll, befinden sich im Raume V und sind einem äusseren Drucke bei der Temperatur ϑ unterworfen. Eine Aenderung in der Zusammensetzung oder in dem Mischungsverhältniss ist von einer Volumenänderung $d V$ und einer Temperaturänderung $d \vartheta$ begleitet, gleichzeitig wird von der

Umgebung die Wärmemenge dQ aufgenommen. Ist S die Entropie, U die innere Energie des Systems, so haben wir

(a) $$dS = (dU + P.dV)/\vartheta.$$

Der Zustand des betrachteten Systems von Körpern ist durch den Druck P, die Temperatur ϑ und durch gewisse andere Variable n, n_1, n_2 u. s. w. bestimmt. Enthält der Raum z. B. Wasser und gesättigten Wasserdampf, und ist die ganze Masse gleich M, so kann man die Dampfmenge Mn und die Flüssigkeitsmenge Mn_1 setzen, wo $n + n_1 = 1$ ist. Handelt es sich um einen *Dissociationsvorgang*, so mag n die Anzahl der Moleküle des ursprünglichen Gases sein, während n_1 und n_2 die Zahlen der dissociirten Moleküle angegeben. Demnach hängt der Zustand eines Systems überhaupt ab von den Grössen ϑ, P, n, n_1, n_2 ..., und wir haben

(b) $$\begin{cases} dU = \partial U/\partial\vartheta . d\vartheta + \partial U/\partial P . dP + \partial U/\partial n . dn \ldots; \\ dV = \partial V/\partial\vartheta . d\vartheta + \partial V/\partial P . dP + \partial V/\partial n . dn \\ \qquad + \partial V/\partial n_1 . dn_1 \ldots \\ dS = \partial S/\partial\vartheta . d\vartheta + \partial S/\partial P . dP + \partial S/\partial n . dn \\ \qquad + \partial S/\partial n_1 . dn_1 + \ldots \end{cases}$$

Nach der Definition (a) der Entropie ist

(b') $$\begin{cases} \partial S/\partial\vartheta = 1/\vartheta . (\partial U/\partial\vartheta + P . \partial V/\partial\vartheta), \\ \partial S/\partial V = 1/\vartheta . (\partial U/\partial V + P . \partial V/\partial P), \end{cases}$$

da ϑ und P unabhängig von einander sind. Aus (a) und (b) folgt, da ϑ und P nicht von n, n_1, n_2, ... abhängen,

$$\partial S/\partial n . dn + \partial S/\partial n_1 . dn_1 + \ldots = \partial((U + PV)/\vartheta)/\partial n \\ + \partial((U + PV)/\vartheta)/\partial n_1 + \ldots$$

Setzen wir

(c) $$\Phi = S - (U + PV)/\vartheta,$$

so nimmt die vorige Gleichung die Form

(d) $$\partial\Phi/\partial n . dn + \partial\Phi/\partial n_1 . dn_1 + \partial\Phi/\partial n_2 . dn_2 + \ldots = 0$$

an. Sind die Grössen n, n_1, n_2 ... von einander unabhängig, so haben wir

$$\partial\Phi/\partial n = \partial S/\partial n - 1/\vartheta . (\partial U/\partial n + P . \partial V/\partial n)$$

und die analogen Gleichungen, welche auch in diesem Falle

sich unmittelbar aus (a) ergeben. Im Allgemeinen wird jedoch eine Beziehung unter den Grössen n, n_1, n_2 ... bestehen. Als Beispiel für diese Betrachtungsweise behandeln wir das Problem der Zustandsveränderung. Befindet sich in einem gegebenen Raume eine Dampfmenge Mn und eine Flüssigkeitsmenge Mn_1, so haben wir wie oben $n + n_1 = 1$. Dann gelten folgende Gleichungen

$$S = Mns + Mn_1 s_1, \quad U = Mnu + Mn_1 u_1, \quad V = Mnv + Mn_1 v_1,$$

wo s, u, v bezw. die Entropie, die innere Energie und das Volumen des Dampfes bezeichnen; s_1, u_1 und v_1 haben die entsprechende Bedeutung für die Flüssigkeit. Nach der Gleichung (c) haben wir dann

$$\Phi = Mn\left(s - (u + Pv) / \vartheta\right) + Mn_1\left(s_1 - (u_1 + Pv_1) / \vartheta\right)$$

und

$$0 = M\left(s - (u + Pv) / \vartheta\right) dn + M\left(s_1 - (u_1 + Pv_1) / \vartheta\right) dn_1 .$$

Zugleich ist $dn + dn_1 = 0$. Das Gleichgewicht zwischen Dampf und Flüssigkeit ist also vorhanden, wenn

$$\text{(e)} \qquad s\vartheta - u - Pv = s_1\vartheta - u_1 - Pv_1$$

ist. Da in dieser Gleichung (e) alle Grössen allein von P und ϑ abhängen, so kann sie in die Form

$$P = f(\vartheta)$$

gebracht werden. Die Gleichung (e) giebt demnach die Abhängigkeit des Druckes des gesättigten Dampfes von der Temperatur.

Wenn die Masseneinheit Flüssigkeit zu Dampf bei der Temperatur ϑ übergeht, so erhält die Entropie den Zuwachs

$$\text{(f)} \qquad s - s_1 = JL / \vartheta .$$

Nach der Gleichung (e) erhalten wir also

$$JL = u - u_1 + P(v - v_1),$$

wie in § 119 (d). Wird die Gleichung (e) differenziirt in Bezug auf ϑ und wird P als Function von ϑ betrachtet, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\partial s / \partial \vartheta = 1 / \vartheta . (\partial u / \partial \vartheta + P . \partial v / \partial \vartheta);$$
$$\partial s_1 / \partial \vartheta = 1 / \vartheta . (\partial u_1 / \partial \vartheta + P . \partial v_1 / \partial \vartheta)$$

die Relation

$$J \,.\, L = (v - v_1)\, \vartheta \,.\, \partial P / \partial \vartheta.$$

Die hier behandelte Methode kann auch auf ein gewisses Streben begründet werden, das in der Natur hervortritt. Die meisten Naturprocesse sind von Wärmeentwicklungen begleitet; die Energie scheint demnach die Neigung zu haben, besonders in Form von Wärme aufzutreten, und diese hat das Bestreben von den Körpern mit höherer Temperatur zu denen mit niederer Temperatur überzugehen. Bei allen solchen Umwandlungen bleibt die gesammte Energie unverändert, aber sie verliert mehr und mehr die Fähigkeit sich in kinetische Energie umzuwandeln. Ein Körper, welcher eine Wärmemenge Q_1 enthält und die Temperatur ϑ_1 hat, während alle ihn umgebenden Körper die Temperatur ϑ_2 haben, kann nach § 112 (e) eine kinetische Energie $Q_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2) / \vartheta_1$ hervorbringen. Je niedriger demnach ϑ_1 ist, desto geringer wird also die hervorgebrachte kinetische Energie, wenn ϑ_2 unverändert bleibt.

Clausius drückt dieses in dem Satze aus: *Die Entropie nimmt beständig zu, sie strebt einem Maximum zu.* Geht z. B. eine Wärmemenge Q durch Leitung oder Strahlung über von einem Körper mit einer höheren Temperatur ϑ_1 zu einem anderen mit der niedrigeren Temperatur ϑ_2, so erhält die Entropie dabei den Zuwachs

$$\triangle S = Q / \vartheta_2 - Q / \vartheta_1.$$

Nur bei einem Kreisprocesse, bei welchem die Körper, welche Wärme empfangen, dieselbe Temperatur haben wie diejenigen, welche Wärme abgeben, und bei welchem das ganze System sich im indifferenten Gleichgewichte befindet, bleibt die Entropie unverändert, da nach Ausführung des Kreisprocesses

$$\int d\,Q / \vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \triangle S = 0$$

ist. Dasselbe ist auch der Fall in jedem Augenblicke während des Kreisprocesses, wenn man sowohl auf die Entropie des arbeitenden Körpers als auf die des umgebenden Körpers Rücksicht nimmt; empfängt der erstere die Wärmemenge dQ, so hat der letztere die Wärmemenge dQ abgegeben; da beide Theile dieselbe Temperatur haben, ist die Entropie also unver-

ändert geblieben. Dieses gilt jedoch nur für ideale Kreisprocesse; bei jeder wirklichen Wärmebewegung geht die Wärme von höherer zu niederer Temperatur über, die Entropie muss also wachsen.

Die Bedingung für eine gewisse Aenderung im Zustande eines Systems ist also eine Vergrösserung der Entropie; Veränderungen, bei denen die Entropie vermindert wird, sind unmöglich. Im Gleichgewichte ist der Zustand des Körpers also in solcher Weise, dass bei jeder kleinen Veränderung entweder die Entropie vermehrt wird oder unverändert bleibt.

Wir kommen dabei zurück zu den Gleichgewichtsbedingungen (a). Durch die Zuführung der Wärmemenge dQ wird die Entropie des betrachteten Körpers um dS vermehrt; der Zuwachs der gesammten Entropie ist demnach $dS - dQ / \vartheta$, diese Grösse soll gleich Null sein. Da $dQ = dU + P.dV$ ist, erhalten wir

$$dS - 1 / \vartheta . (dU + P.dV) = 0.$$

§ 121. Die Dissociation.

Wird ein Gas durch Erwärmung oder Druckverminderung in zwei oder mehrere Gase gespalten, so dissociirt sich dasselbe; wie weit die Dissociation vorgeschritten ist, hängt von dem Drucke und der Temperatur ab. Um diese zu ermitteln, ist die Function

$$\text{(a)} \qquad \Phi = S - (U + PV) / \vartheta$$

zu bestimmen. Ist n die Anzahl der Molecüle des ursprünglichen Gases und sind n_1, $n_2 \ldots$ die Zahlen der Molecüle der Dissociationsproducte, so haben wir für die gesammte innere Energie U den Ausdruck

$$U = nu + n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots,$$

wo u, u_1, u_2 die Energien der einzelnen Molecüle bezeichnen. Ist m die Masse eines Molecüls, c_v die specifische Wärme desselben bei constantem Volumen, so kann man die innere Energie bei ϑ^0 C. gleich $Jmc_v \vartheta + h$ setzen, wo h eine Constante ist. Wird Jmc_v mit c bezeichnet, so haben wir

$$\text{(b)} \qquad U = n(c\vartheta + h) + n_1(c_1 \vartheta + h_1) + \ldots.$$

Ist v das Volumen eines Molecüls eines Gases, p der Druck desselben, so ist $pv = R\vartheta$, wo R von der Natur des Gases unabhängig ist. Der Einfachheit wegen setzt Planck $R = 1$. Da die Gase gleichförmig über den ganzen Raum ausgebreitet sind, so ist $nv = n_1 v_1 = \ldots = V$ und also

$$pV = n\vartheta, \quad p_1 V = n_1 \vartheta \text{ u. s. w.}$$

$$PV = (n + n_1 + n_2 + \ldots)\vartheta. \tag{c}$$

Durch diese Gleichung wird V als Function von $P, \vartheta, n, n_1 \ldots$ dargestellt.

Die Entropie des Systems ist gleich der Summe der Entropien aller Gase, also

$$S = ns + n_1 s_1 + n_2 s_2 + \ldots,$$

wenn mit s die Entropie des Molecüls bezeichnet wird. Benutzen wir c in der oben angegebenen Bedeutung, so ist die Entropie eines Molecüls nach § 111 (d) gleich

$$c \,.\log \vartheta + \log v + k.$$

Hier ist $nv = V$ und also in Rücksicht auf die Gleichung (c)

$$s = c\,.\log\vartheta + \log\left(\vartheta / P.(n + n_1 + n_2 + \ldots)/n\right) + k.$$

Wird

$$C = n/(n + n_1 + n_2 + \ldots), \quad C_1 = n_1/(n + n_1 + n_2 + \ldots) \text{ u. s. w.},$$

$$C + C_1 + \ldots = 1,$$

gesetzt, so haben wir

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} S = n[(c+1)\log\vartheta - \log P - \log C + k] \\ \quad + n_1[(c_1+1)\log\vartheta - \log P - \log C_1 + k_1] + \ldots. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (b), (c) und (d) nimmt (a) die Form an

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} \Phi = n[(c+1)(\log\vartheta - 1) - \log P - \log C + k - h/\vartheta] \\ \quad + n_1[(c_1+1)(\log\vartheta - 1) - \log P - \log C_1 + k_1 - h_1/\vartheta] + \ldots. \end{cases}$$

Es ist aber

$$\partial(n\,.\log C + n_1\,.\log C_1 + \ldots)/\partial n = \log C$$

und ferner

$$\partial\Phi/\partial n = (c+1)(\log\vartheta - 1) - \log P - \log C + k - h/\vartheta. \tag{f}$$

Aehnliche Ausdrücke gelten für die übrigen Differential-

quotienten. Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichgewichtsbedingung

$$\partial \Phi / \partial n . dn + \partial \Phi / \partial n_1 . dn_1 + \ldots = 0$$

ergiebt sich, dass zur Lösung der Aufgabe nur die Kenntniss der zwischen den Grössen $n, n_1, n_2 \ldots$ bestehenden Relationen erforderlich ist.

Soll man z. B. die Dissociation der Jodwasserstoffsäure in Jod und Wasserstoff untersuchen, so kann die Gasmischung folgendermaassen angedeutet werden

$$n JH, \quad n_1 H_2, \quad n_2 J_2.$$

Durch die Dissociation werden zwei Molecüle Jodwasserstoffsäure zu einem Molecül Wasserstoff und einem Molecül Jod; das Verhältniss zwischen dn, dn_1, dn_2 ist demnach $: -2:1:1$. Setzen wir allgemein

$$dn : dn_1 : dn_2 : \ldots = \nu : \nu_1 : \nu_2 : \ldots,$$

so lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\text{(g)} \quad \nu . \partial \Phi / \partial n + \nu_1 . \partial \Phi / \partial n_1 + \nu_2 . \partial \Phi / \partial n_2 + \ldots = 0.$$

Aus den Gleichungen (f) und (g) erhalten wir

$$\text{(h)} \quad \Sigma [\nu (c + 1)(\log \vartheta - 1) - \nu \log P - \nu \log C + \nu k - \nu h / \vartheta] = 0.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung nimmt Planck an, dass die Atomwärme auch für die zusammengesetzten Gase constant ist, und dass die Molecularwärme gleich der Summe der Atomwärmen ist; die Erfahrung zeigt, dass dieses in allen Fällen näherungsweise richtig ist. Werden die Anzahlen der Atome, welche sich in der Verbindung befinden, mit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ bezeichnet, so können wir also setzen

$$c = \gamma \alpha, \quad c_1 = \gamma \alpha_1, \quad c_2 = \gamma \alpha_2 \ldots.$$

Da die Anzahl der Atome bei der Dissociation unverändert bleibt, so ist die Summe $n \alpha + n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + \ldots$ constant, und demnach

$$\alpha . dn + \alpha_1 . dn_1 + \alpha_2 . dn_2 + \ldots = 0.$$

Folglich ist auch

$$\nu \alpha + \nu_1 \alpha_1 + \nu_2 \alpha_2 + \ldots = 0 \quad \text{und} \quad \nu c + \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \ldots = 0.$$

Wird ferner

$$\nu + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots = \nu_0; \ \nu h + \nu_1 h_1 + \nu_2 h_2 + \ldots = -\log h_0;$$
$$\nu(k-1) + \nu_1(k_1 - 1) + \ldots = \log k_0$$

gesetzt, so ergiebt sich aus (h)

$$\nu \log C + \nu_1 \log C_1 + \nu_2 \log C_2 + \ldots = \log k_0 + (\log h_0) / \vartheta$$
$$+ \nu_0 . \log (\vartheta / P)$$

oder

$$\text{(i)} \qquad C^{\nu} . C_1^{\nu_1} . C_2^{\nu_2} \ldots = k_0 . h_0^{1/\vartheta} . (\vartheta / P)^{\nu_0}.$$

Für Jodwasserstoff haben wir demnach $\nu_0 = 0$ und

$$C_1 C_2 / C^2 = k_0 . h_0^{1/\vartheta}.$$

Ist ursprünglich nur Jodwasserstoff vorhanden, so wird $n_1 = n_2$, also $C_1 = C_2$ und

$$C_1 / C = \sqrt{k_0 . h_0^{1/\vartheta}}.$$

Es ist aber $C_1 / C = n_1 / n$. Demnach ist der Grad der Dissociation unabhängig vom Drucke, derselbe wächst aber mit der Temperatur. Die Dissociation kann jedoch in dem betrachteten Falle nicht vollständig werden, da für $\vartheta = \infty$ sich $C_1 / C = \sqrt{k_0}$ ergiebt.

Nach der Gleichung (i) hat der Druck keinen Einfluss auf den Dissociationsgrad, wenn durch die Dissociation nicht das Gesammtvolumen geändert wird. Dieses letztere ist der Fall, wenn $\nu_0 = 0$ ist. Wächst dagegen das Volumen bei der Dissociation, so verhindert eine Vergrösserung des Druckes die letztere. Dieses tritt ein bei dem Stickstoffdioxyd N_2O_4, aus dem ein Molecül durch Dissociation umgebildet wird zu zwei Molecülen NO_2, hier ist $\nu = -1$, $\nu_1 = 2$, also

$$C_1^2 / C = k_0 . h_0^{1/\vartheta} . \vartheta / P;$$

diese Gleichung bestimmt in Verbindung mit $C_1 + C = 1$ den Dissociationsgrad.

Um die durch die Werthe dn, dn_1, $dn_2 \ldots$ bestimmte Dissociation bei constanter Temperatur und bei constantem Drucke hervorzubringen, ist die Wärmemenge Q erforderlich, welche sich bestimmt aus

$$J . dQ = dU + P . dV,$$

oder nach den Gleichungen (b) und (c) aus

$$J . d Q = \Sigma (c \vartheta + h) d n + \vartheta . \Sigma d n.$$

Da $\Sigma \nu c = 0$ ist, so wird die Wärmemenge, welche zu der durch die Grössen ν, ν_1, ν_2 ... bestimmten Dissociation erforderlich ist, bestimmt durch

$$\text{(k)} \quad J . Q = \nu h + \nu_1 h_1 + \nu_2 h_2 + \ldots + \nu_0 \vartheta = \nu_0 \vartheta - \log h_0.$$

Zu demselben Resultate gelangen wir von der Gleichung

$$J . d Q = \vartheta . d S$$

unter Berücksichtigung der Beziehungen (d) und (h).

Vierzehnter Abschnitt.

Die Wärmeleitung.

§ 122. Die Fourier'sche Gleichung.

Wenn die Temperatur in den verschiedenen Theilen eines Körpers verschieden ist, so gehen allmählich so lange Veränderungen vor bis alle Theile des Körpers dieselbe Temperatur haben, d. h. bis *Temperaturgleichgewicht* eingetreten ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Körper weder Wärme von der Umgebung aufnimmt, noch Wärme an dieselbe abgiebt. Je schneller der Gleichgewichtszustand eintritt, um so besser leitet der Körper die Wärme. Ohne irgend eine Annahme über die Natur der Wärme zu machen, können wir sagen, dass die Wärme im Körper so lange strömt, bis jener Gleichgewichtszustand eingetreten ist. Wir definiren als *Stromstärke der Wärmebewegung* diejenige Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit tritt. Durch das Flächenelement $d S$ im Inneren des Körpers geht also in der Zeit $d t$ die Wärmemenge

$$Q . d S . d t,$$

wo Q die Stromstärke der Wärmebewegung durch das Element dS ist. Sind U, V, W die *Componenten der Stromstärke* nach den Coordinatenaxen, so geht durch das Flächenelement $dy\,dz$ in der Zeit dt die Wärmemenge $U.dy.dz.dt$, während durch die Flächenelemente $dx.dz$ und $dx.dy$ in der Zeit dt bezw. die Wärmemengen $V.dx.dz.dt$ und $W.dx.dy.dt$ strömen.

Benutzen wir die allgemeinen Gleichungen des § 14 für strömende Bewegungen, so erhalten wir für Q

$$\text{(a)} \qquad Q = lU + mV + nW,$$

wo l, m, n die Richtungscosinus der Normale des Flächenelementes dS sind.

OO' (Fig. 142) sei ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten $OA = a$, $OB = b$ und $OC = c$ parallel den Coordinaten-

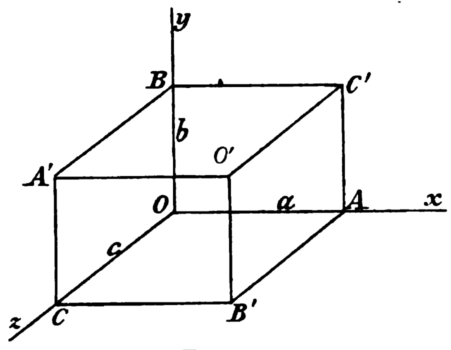


Fig. 142.

axen sind. Wenn im Punkte O die Componenten der Stromstärke U, V, W sind, so sind dieselben in A bezw.

$$U + \partial U / \partial x . a, \quad V + \partial V / \partial x . a, \quad W + \partial W / \partial x . a,$$

indem a, b, c so klein sind, dass wir nur die ersten Glieder der Entwicklung zu berücksichtigen brauchen. Durch die Fläche $OBA'C$ erhält das Parallelepiped in der Zeit dt die Menge $U.dt.bc$, durch die Fläche $AC'O'B'$ strömt in derselben Zeit aus dem Parallelepiped die Menge

$$(U + \partial U / \partial x . a) bc . dt.$$

Das Parallelepiped hat also die Menge $-\partial U / \partial x . a . bc . dt$

aufgenommen. Berücksichtigen wir auch die übrigen Seitenflächen, so ist die Wärmemenge, welche im Parallelepiped geblieben ist,

$$-(\partial U/\partial x + \partial V/\partial y + \partial W/\partial z) \,.\, abc \,.\, dt$$

oder, wenn wir $a \,.\, b \,.\, c = dv$ setzen,

$$-(\partial U/\partial x + \partial V/\partial y + \partial W/\partial z)\, dv\, dt.$$

Ist c die specifische Wärme des Körpers, ϱ die Dichte desselben, so erhöht jene Wärmemenge die Temperatur ϑ des Körpers um $d\vartheta$, wo $d\vartheta$ durch folgende Gleichung bestimmt ist

$$\text{(b)} \qquad c\varrho \,.\, d\vartheta = -(\partial U/\partial x + \partial V/\partial y + \partial W/\partial z)\, dt.$$

Diese Gleichung gilt aber nur dann, wenn die aufgenommene Wärme allein zur Temperaturänderung verwendet wird und nicht etwa gleichzeitig Aenderungen des Aggregatzustandes oder chemische Veränderungen eintreten. Zuweilen entsteht auch Wärme im Inneren des Körpers, welche nicht in Form von Wärme in den Körper gedrungen ist, sondern welche in Folge innerer Reibung oder durch einen electrischen Strom im Körper entstanden ist.

Die Stromcomponenten U, V, W hängen von der Wärmevertheilung im Körper und von der Natur des Körpers ab. Leitet der Körper die Wärme nach allen Richtungen gleich gut, ist er z. B. *isotrop*, so kann man die Stromstärken in folgender Weise bestimmen. A und B seien zwei unendlich benachbarte Punkte innerhalb des Körpers, in welchen bezw. die Temperaturen ϑ und ϑ' sind. dv sei der Abstand der Punkte A und B, und k das Leitungsvermögen für die Wärme. dann ist die Stärke des Wärmestromes in der Richtung AB gegeben durch

$$Q = k(\vartheta - \vartheta')/dv.$$

Das *Leitungsvermögen* ist demnach die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Querschnittes strömt, wenn die Temperaturdifferenz der Begrenzungsflächen 1^0 ist und der Abstand der Begrenzungsflächen gleich einem Centimeter ist.

Weil aber $\vartheta' = \vartheta + d\vartheta/dv \,.\, dv$ ist, so haben wir auch

$$\text{(c)} \qquad Q = -k \,.\, d\vartheta/dv.$$

Für die Stromcomponenten U, V, W erhalten wir in ähnlicher Weise die Ausdrücke

(d) $U = -k \, . \, \partial \vartheta / \partial x, \quad V = -k \, . \, \partial \vartheta / \partial y, \quad W = -k \, . \, \partial \vartheta / \partial z.$

In Wirklichkeit ist das Leitungsvermögen k eine Function von ϑ; wir wollen aber der Einfachheit wegen annehmen, dass k constant sei. Aus (b) und (d) erhalten wir

(e) $c \varrho \, . \, \partial \vartheta / \partial t = k (\partial^2 \vartheta / \partial x^2 + \partial^2 \vartheta / \partial y^2 + \partial^2 \vartheta / \partial z^2).$

Diese Gleichung ist zuerst von Fourier aufgestellt und soll daher als *Fourier'sche Gleichung* bezeichnet werden. Die specifische Wärme c, die Dichte ϱ und das Leitungsvermögen k sind Functionen von ϑ; wir wollen sie aber als Constante betrachten. Der Fourier'schen Gleichung können wir auch die Form

(f) $\partial \vartheta / \partial t = \varkappa^2 (\partial^2 \vartheta / \partial x^2 + \partial^2 \vartheta / \partial y^2 + \partial^2 \vartheta / \partial z^2)$

geben, wo

(g) $\varkappa^2 = k / c \varrho$ ist.

In der folgenden Tabelle sind die Werthe von k und $\varkappa$ bei den Temperaturen 0° und 100° C. für einzelne Metalle nach L. Lorenz mitgetheilt.

	k_0	k_{100}	$\varkappa_0$	$\varkappa_{100}$
Kupfer . .	0,7198	0,7226	0,909	0,873
Zinn . . .	0,1598	0,1423	0,392	0,344
Eisen . . .	0,1665	0,1627	0,202	0,179
Blei . . .	0,0836	0,0764	0,242	0,222.

§ 123. Der stationäre Zustand.

Der Wärmezustand des Körpers ist *stationär*, wenn die Temperaturen der einzelnen Theile des Körpers verschieden sind, aber im Laufe der Zeit sich nicht ändern. In diesem Falle giebt jedes Theilchen nach der einen Seite soviel Wärme ab als es von der anderen Seite empfängt, und die Temperatur ist unabhängig von der Zeit t und nur abhängig von den Coordinaten x, y, z. Für den stationären Zustand lautet die Gleichung § 122 (f)

(a) $\partial^2 \vartheta / \partial x^2 + \partial^2 \vartheta / \partial y^2 + \partial^2 \vartheta / \partial z^2 = \nabla^2 \vartheta = 0.$

Die Stromcomponenten werden durch die Gleichungen § 122 (d) ausgedrückt.

Wärmeströmung in einer Platte. Wir betrachten eine dünne Platte, deren Seitenflächen L und M der yz-Ebene parallel sind. Die Seitenflächen haben bezw. die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2. In diesem Falle ist der Wärmestrom der x-Axe parallel und die Temperatur ϑ hängt in der Nähe der x-Axe allein von x ab, sodass nach (a)

$$d^2\vartheta \,/\, dx^2 = 0$$

ist. Also wird $\vartheta = px + q$. Haben die Seitenflächen L und M vom Coordinatenanfangspunkte bezw. die Abstände a und b, so haben wir

$$\vartheta_1 = pa + q, \quad \vartheta_2 = pb + q$$

und ferner

$$\vartheta = (b\vartheta_1 - a\vartheta_2) \,/\, (b - a) - (\vartheta_1 - \vartheta_2)\, x \,/\, (b - a).$$

Bezeichnen wir den Abstand $b - a$ der Seitenflächen mit e, so ist die Stärke U des Wärmestromes

$$U = k(\vartheta_1 - \vartheta_2) \,/\, e. \tag{c}$$

Ueberhaupt entspricht jedes Integral der Gleichung (a) einem stationären Wärmezustande. Ist

$$\vartheta = f(x, y, z)$$

ein Integral von (a), so sind

$$\vartheta_1 = f(x, y, z) \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = f(x, y, z),$$

wo ϑ_1 und ϑ_2 constant sind, die Gleichungen für zwei Flächen constanter Temperatur oder für zwei *isotherme Flächen*. Wird der Körper begrenzt von den Flächen, welche durch ϑ_1 und ϑ_2 bestimmt sind, und ist ϑ eine Temperatur, die zwischen ϑ_1 und ϑ_2 liegt, so ist

$$\vartheta = f(x, y, z)$$

die Gleichung für eine beliebige isotherme Fläche.

Wärmeströmung in einer Kugel. Sind m und c Constante und ist $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so ist

$$\vartheta = m \,/\, r + c$$

eine Lösung von (a). Setzen wir also

$$\vartheta_1 = m \,/\, r_1 + c, \quad \vartheta_2 = m \,/\, r_2 + c,$$

so ist

(d) $$\vartheta = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2) r_1 r_2}{r (r_2 - r_1)} - \frac{r_1 \vartheta_1 - r_2 \vartheta_2}{r_2 - r_1}$$

die Gleichung für das System der isothermen Flächen, welche in diesem Falle Kugelflächen sind. Für den Wärmestrom U in der Richtung r haben wir

(e) $$U = - k . d\vartheta / dr = k(\vartheta_1 - \vartheta_2) r_1 r_2 / r^2 (r_2 - r_1).$$

Aus den Gleichungen (d) und (e) ergeben sich auch die Temperatur und die Wärmeströmung in einer Hohlkugel, deren innere und äussere Fläche bezw. die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 haben. Die gesammte Wärmemenge, welche durch die Hohlkugel ausströmt, ist

$$4\pi r^2 U = 4\pi k (\vartheta_1 - \vartheta_2) r_1 r_2 / (r_2 - r_1).$$

Wärmeströmung in einem Rohre. Sind c und c' Constante und ist $r^2 = x^2 + y^2$, so ist nach § 15

$$\vartheta = c \log r + c'$$

ein Integral von (a). Wird also

$$\vartheta_1 = c . \log r_1 + c', \quad \vartheta_2 = c . \log r_2 + c'$$

gesetzt, so erhalten wir

(f) $$\begin{cases} \vartheta = (\vartheta_1 - \vartheta_2) \log r / (\log r_1 - \log r_2) \\ + (\vartheta_1 \log r_2 - \vartheta_2 \log r_1) / (\log r_2 - \log r_1). \end{cases}$$

In der Richtung r ist der Wärmestrom U

$$U = k(\vartheta_1 - \vartheta_2) / r (\log r_2 - \log r_1).$$

Die Wärmemenge, welche durch eine Längeneinheit des Rohres ausströmt, ist

(g) $$2\pi r U = 2\pi k (\vartheta_1 - \vartheta_2) / (\log r_2 - \log r_1).$$

§ 124. Die periodische Wärmeströmung in einer Richtung.

Wenn die Temperatur des Körpers nur von einer Coordinate, z. B. x, abhängt, so lautet die Fourier'sche Gleichung

(a) $$\partial \vartheta / \partial t = \varkappa^2 . \partial^2 \vartheta / \partial x^2.$$

In welcher Weise diese Gleichung integrirt werden kann, soll später untersucht werden. Vorläufig wollen wir einzelne Inte-

grale betrachten, welche einfachen und wichtigen Fällen entsprechen.

Die Temperatur des Erdkörpers ändert sich im Laufe des Jahres; sie steigt und fällt wie die Temperatur der Luft. Allein das Maximum der Temperatur tritt um so später ein, je tiefer man in das Erdinnere eindringt; dasselbe gilt natürlich auch von dem Minimum der Temperatur. In der nachfolgenden Betrachtung wollen wir die Eigenwärme der Erde nicht berücksichtigen.

Ist die Temperatur an der Erdoberfläche durch

$$\vartheta = \sin \alpha t \tag{b}$$

gegeben, so kann man die Temperatur im Erdinnern durch

$$\vartheta = P . \sin \alpha t + Q . \cos \alpha t \tag{c}$$

ausdrücken, wo P und Q Functionen des Abstandes x sind, den der betrachtete Punkt von der Erdoberfläche hat. Setzen wir für ϑ den Ausdruck (c) ein in (a), so wird

$$P\alpha . \cos \alpha t - Q\alpha . \sin \alpha t = \varkappa^2 (\sin \alpha t . d^2 P / dx^2 + \cos \alpha t . d^2 Q / dx^2).$$

Demnach muss

$$\varkappa^2 . d^2 P / dx^2 = -Q\alpha \quad \text{und} \quad \varkappa^2 . d^2 Q / dx^2 = P\alpha$$

sein. Setzt man nun $\varepsilon^2 = \alpha / \varkappa^2$, so wird

$$\text{(d), (e)} \quad d^4 P / dx^4 = -\varepsilon^4 P \quad \text{und} \quad Q = -1/\varepsilon^2 . d^2 P / dx^2.$$

Zur Integration der Gleichung (d) setzen wir

$$P = A e^{px}$$

und erhalten

$$p = \varepsilon \sqrt[4]{-1}.$$

Das Integral der Gleichung (d) erhält dann folgende Form:

$$P = A e^{(1+\sqrt{-1})\varepsilon x/\sqrt{2}} + B e^{(1-\sqrt{-1})\varepsilon x/\sqrt{2}} + C e^{(-1+\sqrt{-1})\varepsilon x/\sqrt{2}} + D e^{(-1-\sqrt{-1})\varepsilon x/\sqrt{2}}.$$

Da $\vartheta = 0$ sein muss für $x = \infty$, so wird $A = B = 0$ und also

$$P = C e^{(-1+\sqrt{-1})\varepsilon x/\sqrt{2}} + D e^{(-1-\sqrt{-1})\varepsilon x/\sqrt{2}}.$$

Nach der Gleichung (e) erhalten wir

$$Q = \left(C e^{(-1+\sqrt{-1})\varepsilon x/\sqrt{2}} - D e^{(-1-\sqrt{-1})\varepsilon x/\sqrt{2}}\right) . \sqrt{-1}.$$

Aber nach den Gleichungen (b) und (c) ist $P = 1$ und $Q = 0$ für $x = 0$, also wird $C = D = \frac{1}{2}$. Demnach erhalten wir

$$P = e^{-\varepsilon x / \sqrt{2}} . \cos\left(\varepsilon x / \sqrt{2}\right); \quad Q = -e^{-\varepsilon x / \sqrt{2}} . \sin\left(\varepsilon x / \sqrt{2}\right)$$

und

$$\vartheta = e^{-\varepsilon x / \sqrt{2}} . \sin\left(\alpha t - \varepsilon x / \sqrt{2}\right).$$

Setzen wir den Werth für ε ein, so ergiebt sich

$$\vartheta = e^{-x\sqrt{^1/_2 \alpha} / \varkappa} . \sin\left(\alpha t - x\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha} / \varkappa\right).$$

Der Unterschied zwischen der höchsten und tiefsten Temperatur in der Tiefe x unter der Erdoberfläche ist also

$$2 e^{-x\sqrt{^1/_2 \alpha} / \varkappa} .$$

Dieser Unterschied hängt demnach wesentlich von α ab. Je schneller die Temperatur an der Oberfläche wechselt, desto geringer ist der Einfluss dieses Wechsels auf die Temperatur im Inneren. Setzen wir z. B. die Temperatur an der Oberfläche gleich

$$\vartheta = \sin(2\pi t / T),$$

so ist jener Unterschied zwischen der höchsten und tiefsten Temperatur gleich

$$2 e^{-x\sqrt{\pi / T} / \varkappa}$$

und dieser ist sehr viel grösser, wenn T die Dauer eines Jahres als die eines Tages ist.

In Wirklichkeit gestalten sich die Verhältnisse anders als wir dieselben hier dargestellt haben, weil die Temperatur an der Oberfläche nicht in einfacher Weise ausgedrückt werden kann. Die Hauptzüge der Erscheinung ergeben jedoch die vorhergehenden Betrachtungen.

§ 125. **Eine erwärmte Fläche.**

Die Temperatur in einem unendlichen Körper sei überall Null, ausgenommen in einer Ebene, in welcher jede Flächeneinheit die Wärmemenge σ enthält. Dieser Zustand sei zur Zeit $t = 0$ vorhanden. Fourier hat gezeigt, dass die Temperatur ϑ in einem Punkte, dessen Abstand von der erwärmten Ebene x ist, zur Zeit t durch

(a) $$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma\varkappa}{2k\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa^2 t}}$$

gegeben ist, wo k das Leitungsvermögen und $\varkappa$ die in § 122 (g) definirte Grösse ist. Wir untersuchen nun, ob dieser Ausdruck für ϑ allen Bedingungen genügt, und zwar zunächst der Differentialgleichung

$$\partial\vartheta / \partial t = \varkappa^2 . \partial^2\vartheta / \partial x^2.$$

Aus (a) erhalten wir

(b), (c) $$\partial\vartheta/\partial t = (-1/2t + x^2/4\varkappa^2 t^2)\vartheta, \quad \partial\vartheta/\partial x = -x\vartheta/2\varkappa^2 t,$$

(d) $$\partial^2\vartheta / \partial x^2 = (-1/2\varkappa^2 t + x^2/4\varkappa^4 t^2)\vartheta.$$

Aus (b) und (d) ergiebt sich, dass die Differentialgleichung erfüllt ist. Für $t = 0$ ist $\vartheta = 0$ für alle Werthe von x mit Ausnahme des Werthes $x = 0$. Denn die Function

$$z e^{-z^2}$$

nähert sich dem Grenzwerthe Null, wenn z unendlich gross wird. Wenn ϑ durch die Gleichung (a) bestimmt ist, so können wir ferner zeigen, dass jede Flächeneinheit der erwärmten Fläche S zur Zeit $t = 0$ die Wärmemenge σ enthält. Die gesammte Wärmemenge, welche im Raume vorhanden ist, wird durch den Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S\varrho c\,\vartheta . dx = \frac{S\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\varkappa\sqrt{t}} e^{-x^2/4\varkappa^2 t} . dx$$

gegeben.

Weil aber

(e) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq = \sqrt{\pi}$$

ist, so muss die zu jeder Zeit im Raume vorhandene Wärmemenge $S\sigma$ sein. Weil aber diese Wärmemenge zur Zeit $t = 0$ auf der unendlichen Fläche S vorhanden ist, so muss die Flächeneinheit zur Zeit $t = 0$ die Wärmemenge σ enthalten.

Aus (a) ergiebt sich, dass $\vartheta = 0$ ist sowohl für $t = 0$ als auch für $t = \infty$; zu einer bestimmten Zeit muss also ϑ ein Maximum sein. Dieser Zeitpunkt wird gefunden aus

(f) $$\dot{\vartheta} = 0,$$

welches ergiebt

$$t = x^2 / 2\varkappa^2.$$

Der entsprechende Werth von ϑ ist

(g) $$\vartheta = 1 / \sqrt{2\pi e} . \sigma / c \varrho x.$$

Aus der Gleichung (a) erkennen wir, dass die Wärme sich mit unendlich grosser Geschwindigkeit ausbreitet, denn ϑ ist überall von Null verschieden, sobald nur t grösser als Null ist.

Wir wollen jetzt die Temperatur zu jeder Zeit in einem Raume bestimmen, in dem die ursprüngliche Wärmevertheilung nur von einer der Coordinaten abhängt. Für $t = 0$ sei $\vartheta = f(a)$, wo a der Abstand von der yz-Ebene ist. Der Theil S des Raumgebietes, welches von zwei parallelen Ebenen begrenzt wird, für welche $x = a$ und $x = a + da$ ist, enthält die Wärmemenge

$$S\sigma = S . da . \varrho c . f(a).$$

Also ist die Wärmemenge σ, welche in der Flächeneinheit der Lamelle vorhanden ist,

$$\sigma = da . \varrho c . f(a).$$

Wenn der übrige Theil des Raumes die Temperatur Null hat, so strömt von dem betrachteten Theile nach beiden Seiten die Wärme aus und in einem Punkte, dessen Abstand von der yz-Ebene gleich x ist, welcher also von der betrachteten Lamelle den Abstand $x - a$ hat, ist nach (a) die Temperatur

$$d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\varrho c \varkappa}{2k\sqrt{t}} e^{-(x-a)^2 / 4\varkappa^2 t} . f(a) \, da.$$

Die übrigen entsprechenden Lamellen senden die Wärme nach demselben Gesetze aus, und wir haben demnach

(h) $$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\varkappa\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2/4\varkappa^2 t} f(a) \, da.$$

Setzt man

(i) $$q = (a - x) / 2\varkappa\sqrt{t},$$

so wird

$$\vartheta = 1 / \sqrt{\pi} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} f(x + 2\varkappa q\sqrt{t}) \, dq.$$

Durch die Ausdrücke (h) und (i) ist die vorgelegte Aufgabe vollständig gelöst. Setzt man in der Gleichung (i) $t = 0$ und benutzt man (e), so ergiebt sich sogleich $\vartheta = f(x)$.

Ist z. B. die Anfangstemperatur constant und gleich ϑ_0 für $-l < x < +l$, aber gleich Null ausserhalb dieser Grenzen, so wird die Integration in (h) zwischen diesen Grenzen ausgeführt, sodass

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\vartheta_0}{2\varkappa\sqrt{t}} \int_{-l}^{+l} e^{-(x-\alpha)^2/4\varkappa^2 t}\, d\alpha \tag{k}$$

ist.

§ 126. Die Ausbreitung der Wärme von einem Punkte.

In einem unendlich grossen Körper sei die Temperatur überall gleich Null, ausgenommen in einem Punkte, in welchem eine Wärmemenge m concentrirt ist. Wir wollen die Wärmevertheilung zu einer beliebigen Zeit t im Körper untersuchen. Die Aufgabe hat Fourier zuerst behandelt, er fand für die Temperatur ϑ im Abstande r von m den Ausdruck

$$\vartheta = m\varkappa^2 / k \,.\, (1 / 2\varkappa\sqrt{\pi t})^3 \,.\, e^{-r^2/4\varkappa^2 t}. \tag{a}$$

Wir zeigen, dass dieser Ausdruck allen Bedingungen genügt. Befindet sich der Punkt mit der Wärmemenge m im Coordinatenanfangspunkt, so nimmt die Fourier'sche Gleichung

$$\partial\vartheta / \partial t = \varkappa^2 (\partial^2\vartheta / \partial x^2 + \partial^2\vartheta / \partial y^2 + \partial^2\vartheta / \partial z^2)$$

nach § 15 die Form an

$$\partial\vartheta / \partial t = \varkappa^2 (\partial^2\vartheta / \partial r^2 + 2 / r \,.\, \partial\vartheta / \partial r), \tag{b}$$

weil ϑ nur von r abhängt. Der letzten Gleichung kann man die Form

$$\partial(r\vartheta) / \partial t = \varkappa^2 \partial^2 (r\vartheta) / \partial r^2 \tag{c}$$

geben. Aus (a) erhalten wir

$$\left\{\begin{aligned} \partial(r\vartheta)/\partial t &= (-3/2t + r^2/4\varkappa^2 t^2) \,.\, r\vartheta, \\ \partial(r\vartheta)/\partial r &= (1/r - r/2\varkappa^2 t) \,.\, r\vartheta, \\ \partial^2(r\vartheta)/\partial r^2 &= (-3/2\varkappa^2 t + r^2/4\varkappa^4 t^2) \,.\, r\vartheta \end{aligned}\right. \tag{d}$$

und erkennen daraus, dass die Fourier'sche Gleichung erfüllt ist. Für $t = 0$ ist ferner $\vartheta = 0$. Die ursprünglich vor-

handene Wärmemenge ist wirklich m, denn die gesammte Wärmemenge zu einer beliebigen Zeit ist durch

$$\int_0^\infty 4\pi r^2 . dr . \varrho c \vartheta = \int_0^\infty 4\pi r^2 . dr . m (1 / 2\varkappa \sqrt{\pi t})^3 . e^{-r^2/4\varkappa^2 t}$$

gegeben. Setzt man

$$q = r / 2\varkappa \sqrt{t},$$

so erhält das Integral die Form

$$4 m / \sqrt{\pi} . \int_0^\infty e^{-q^2} q^2 dq .$$

Durch theilweise Integration und Berücksichtigung der Gleichung § 125 (e) findet man, dass das letzte Integral den Werth m hat.

Der Zeitpunkt t, in welchem ϑ seinen höchsten Werth hat, ergiebt sich aus der Gleichung

$$\dot{\vartheta} = 0$$

oder nach (d)

$$t = r^2 / 6\varkappa^2;$$

der entsprechende Werth von ϑ ist

$$\vartheta = (1 / \sqrt{\tfrac{2}{3}\pi e})^3 . m / c \varrho r^3 .$$

§ 127. Die Ausbreitung der Wärme in einem unbegrenzten Körper.

Wir wollen mit Hülfe der gefundenen Resultate die Ausbreitung der Wärme in einem unendlichen Körper untersuchen, wenn die Vertheilung der Wärme in einem bestimmten Zeitpunkte gegeben ist. Zur Zeit $t = 0$ sei $\vartheta = f(a, b, c)$, wo a, b, c die Coordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems sind. Ein Raumelement $da . db . dc$ enthält die Wärmemenge

$$dm = f(a, b, c) . k / \varkappa^2 . da\, db\, dc .$$

Breitet sich diese Wärmemenge über den Körper aus, so bringt sie nach § 126 (a) die Erwärmung

$$d\vartheta = (1 / 2\varkappa \sqrt{\pi t})^3 e^{-[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]/4\varkappa^2 t} . f(a, b, c)\, da\, db\, dc$$

hervor.

Nimmt man die Summe über alle Erwärmungen, welche von der betrachteten Wärmevertheilung herrühren, so erhält man für die Temperatur ϑ im Punkte x, y, z

$$\text{(a)} \quad \vartheta = (1/2\varkappa\sqrt{\pi t})^3 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]/4\varkappa^2 t} . f(a,b,c)\, da\, db\, dc.$$

Dieser Ausdruck für ϑ ist ein Integral der Differentialgleichung

$$\text{(b)} \qquad \partial\vartheta/\partial t = \varkappa^2(\partial^2\vartheta/\partial x^2 + \partial^2\vartheta/\partial y^2 + \partial^2\vartheta/\partial z^2).$$

Man beachte, dass die Integration dieser Gleichung von der Integration der einfacheren Gleichung

$$\text{(c)} \qquad \partial X/\partial t = \varkappa^2\partial^2 X/\partial x^2$$

abhängt. Ist nämlich X eine Function von x und t, welche der Gleichung (c) genügt und sind Y und Z bezw. Functionen von y, t und z, t, welche den analogen Gleichungen (c) für y und z genügen, so befriedigt

$$\vartheta = XYZ$$

die Gleichung (b). Wir haben

$$YZ\dot{X} + XZ\dot{Y} + XY\dot{Z} = \varkappa^2(YZ.\partial^2 X/\partial x^2 + XZ.\partial^2 Y/\partial y^2 + XY.\partial^2 Z/\partial z^2).$$

Aus (c) und den analogen Gleichungen für y und z ergiebt sich, dass diese Gleichung erfüllt ist. Nach § 125 (a) ist (c) erfüllt durch

$$X = 1/\sqrt{t}\,.\,e^{-(x-a)^2/4\varkappa^2 t},$$

demnach ist der Ausdruck

$$1/\sqrt{t}.e^{-(x-a)^2/4\varkappa^2 t}.1/\sqrt{t}.e^{-(y-b)^2/4\varkappa^2 t}.1/\sqrt{t}.e^{-(z-c)^2/4\varkappa^2 t}$$

ein Integral der Gleichung (b). Ebenso ist auch

$$\vartheta = C\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1/\sqrt{t})^3 . e^{-[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]/4\varkappa^2 t} . f(a,b,c)\, da\, db\, dc$$

ein Integral der Gleichung (b). C ist eine Constante und $f(a, b, c)$ eine willkürliche Function von a, b, c. Setzen wir

$$\alpha = (a-x)/2\varkappa\sqrt{t}, \quad \beta = (b-y)/2\varkappa\sqrt{t}, \quad \gamma = (c-z)/2\varkappa\sqrt{t},$$

so ergiebt sich

$$\vartheta = (2\varkappa)^3 C \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} f(x + 2\varkappa\alpha\sqrt{t},\ y + 2\varkappa\beta\sqrt{t},$$
$$z + 2\varkappa\gamma\sqrt{t})\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Nimmt man nun $t = 0$, so ergiebt sich mit Hülfe von § 125 (e)

$$\vartheta = (2\varkappa)^3 . C(\sqrt{\pi})^3 f(x, y, z).$$

Ist $f(x, y, z)$ ein Ausdruck für die Temperatur im Anfange der Zeit, so setzt man

$$C = 1 / (2\varkappa\sqrt{\pi})^3$$

und erhält also

$$\text{(d)}\quad \begin{cases} \vartheta = (1/\sqrt{\pi})^3 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} f(x + 2\varkappa\alpha\sqrt{t}, \\ y + 2\varkappa\beta\sqrt{t},\ z + 2\varkappa\gamma\sqrt{t})\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (*a*) und (*d*) sind identisch, wovon man sich durch Einführung der vorhin benutzten Substitution überzeugen kann.

§ 128. Die Eisbildung.

Eine Wassermasse habe überall im Innern die Temperatur $\vartheta = 0$; ihre Oberfläche sei in Berührung mit einer Fläche, welche die Temperatur $-\vartheta_0$ hat. ϑ_0 kann constant oder variabel sein, soll aber stets unter Null liegen. Unter der Fläche mit der Temperatur $-\vartheta_0$ wird eine Eisschicht gebildet, die Dicke ε der Eisschicht ist eine Function der Zeit t. Die Temperatur ϑ in der Eismasse selbst ist eine Function von t und vom Abstande x von der Oberfläche. Für $x = \varepsilon$ haben wir stets $\vartheta = 0$. In der Eismasse gilt überall die Gleichung

$$\text{(a)}\qquad \partial\vartheta / \partial t = \varkappa^2 \partial^2\vartheta / \partial x^2.$$

An der Grenzfläche zwischen Eis und Wasser wird fortgesetzt neues Eis gebildet. Die Wärmemenge, welche in der Zeit dt, durch die Einheit der untersten Eisschicht aufwärts strömt, ist durch

$$k\,\partial\vartheta / \partial x . dt$$

gegeben. In derselben Zeit wird eine Eisschicht von der Dicke $d\varepsilon$ gebildet, die dadurch frei gewordene Wärmemenge ist

$$L\varrho\, d\varepsilon,$$

wenn L die Schmelzwärme und ϱ die Dichte des Eises ist. Für $x = \varepsilon$ wird

(b) $k\,\partial\vartheta/\partial x = L\varrho\, d\varepsilon/dt$ oder $\partial\vartheta/\partial x = L/c\varkappa^2 . d\varepsilon/dt.$

ϑ kann durch

$$\text{(c)}^{1)} \quad -c\vartheta/L = \frac{1}{1.2}.\frac{d(\varepsilon-x)^2}{\varkappa^2.dt} + \frac{1}{1.2.3.4}.\frac{d^2(\varepsilon-x)^4}{\varkappa^4.dt^2} + \dots$$

dargestellt werden, und man überzeugt sich leicht, dass (c) die Gleichung (a) befriedigt. Ferner wird $\vartheta = 0$ für $x = \varepsilon$. Um zu zeigen, dass auch (b) erfüllt ist, differentiiren wir in (c) in Bezug auf x und erhalten dadurch

$$-c/L.\partial\vartheta/\partial x = -\frac{d(\varepsilon-x)}{\varkappa^2.dt} - \frac{1}{1.2.3}.\frac{d^2(\varepsilon-x)^3}{\varkappa^4.dt^2} - \dots$$

Hieraus erhalten wir für $x = \varepsilon$ die Gleichung (b).

Da an der Oberfläche $\vartheta = -\vartheta_0$ ist, ergiebt sich aus (c)

$$\text{(d)} \qquad c\vartheta_0/L = \frac{1}{1.2}.\frac{d\varepsilon^2}{\varkappa^2 dt} + \frac{1}{1.2.3.4}.\frac{d^2\varepsilon^4}{\varkappa^4 dt^2} + \dots$$

Ist die Dicke der Eisschicht als Function der Zeit t gegeben, so kann ϑ_0 leicht bestimmt werden; ist dagegen ϑ_0 gegeben, so ist es im Allgemeinen schwierig, ε zu bestimmen.

Ist ϑ_0 constant, so muss die rechte Seite der Gleichung (d) ebenfalls constant sein. Hierzu ist erforderlich, dass

$$\varepsilon^2/\varkappa^2 = 2p^2 t,$$

wo p eine Constante ist. Aus (d) erhalten wir dann die Gleichung

$$\text{(e)} \qquad c\vartheta_0/L = \frac{p^2}{1} + \frac{p^4}{1.3} + \frac{p^6}{1.3.5} + \dots,$$

welche zur Bestimmung von p dienen kann. Um die Reihe in (e) in eine endliche Form zu bringen, bilden wir aus (e)

$$d(c\vartheta_0/Lp)/dp = 1 + \frac{p^2}{1} + \frac{p^4}{1.3} + \frac{p^6}{1.3.5} + \dots$$

---

[1]) Diese Lösung ist dem Verfasser von L. Lorenz mitgetheilt worden. Siehe auch Stefan, Wied. Ann. Bd. XLII, S. 269.

und also wird

$$d(c\vartheta_0 / Lp) / dp = 1 + c\vartheta_0 / L.$$

Das Integral dieser Gleichung lautet

(f)
$$c\vartheta_0 / L = p\int_0^p e^{-(\alpha^2 - p^2)/2} d\alpha.$$

Wächst die Dicke der Eisschicht proportional mit der Zeit t, ist also

$$\varepsilon = q\varkappa t,$$

wo q eine neue Constante ist, so ergiebt sich aus (d)

$$c\vartheta_0 / L = q^2 t + \frac{q^4 t^2}{1.2} + \frac{q^6 t^3}{1.2.3} + \dots$$

oder

(g)
$$c\vartheta_0 / L = e^{q^2 t} - 1.$$

Ist ε sehr klein, so erhalten wir aus (d)

$$c\vartheta_0 / L = 1 / 2\varkappa^2 . d\varepsilon^2 / dt$$

und demnach

(h)
$$\varepsilon^2 = 2k / L\varrho . \int_0^t \vartheta_0 dt.$$

Das letzte Resultat ergiebt sich auch, wenn wir den aufwärts sich bewegenden Wärmestrom gleich $k\vartheta_0 / \varepsilon$ setzen, wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass die Temperatur im Eis gleichmässig nach unten zunimmt. Unter dieser Voraussetzung strömt in der Zeit dt die Wärmemenge $k\vartheta_0 . dt / \varepsilon$ aufwärts durch das Eis. In derselben Zeit wird eine Eisschicht von der Dicke $d\varepsilon$ gebildet, wobei die Wärmemenge $L\varrho . d\varepsilon$ frei wird. Wir haben demnach

$$k\vartheta_0 . dt / \varepsilon = L\varrho . d\varepsilon.$$

Diese Gleichung führt zu demselben Resultat, welches wir oben erhalten haben. Ist ϑ_0 constant, so ergiebt sich

(i)
$$\varepsilon = \sqrt{2\vartheta_0 kt / L\varrho}.$$

§ 129. Die Wärmebewegung in einer Platte, deren Oberfläche auf constanter Temperatur erhalten wird.

Im Allgemeinen ist es sehr schwierig, zu ermitteln, in welcher Weise die Temperatur in einem begrenzten Körper sich ändert. Wir wollen einige Fälle besprechen, in welchen es möglich ist, die Aufgabe zu lösen. Im Innern einer planparallelen Platte sei die Temperatur $\vartheta = f(x)$, wo x der Abstand des betrachteten Punktes von der einen Seitenfläche ist. Von der Zeit $t = 0$ ab befindet sich die Oberfläche in Berührung mit einer Mischung aus Eis und Wasser, oder ihre Temperatur wird in irgend einer anderen Weise auf Null erhalten. Das Gesetz, nach welchem die Wärme im Innern der Platte abnimmt, soll ermittelt werden. Bezeichnen wir die Dicke der Platte mit a, so ist

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \text{für } t = 0, \quad \vartheta = f(x); \quad \text{für } t = \infty, \quad \vartheta = 0; \\ \text{für } x = 0, \quad \vartheta = 0; \qquad \text{für } x = a, \quad \vartheta = 0. \end{cases}$$

An der Oberfläche ändert sich die Temperatur unendlich schnell; dieselbe ist unmittelbar ausserhalb der Oberfläche an der einen Seite der Platte gleich Null, innerhalb der Oberfläche aber $f(0)$. An der anderen Seitenfläche ist die Temperatur ausserhalb der Platte ebenfalls Null, innerhalb derselben aber $f(a)$. Die Function ϑ soll nicht allein diesen Bedingungen genügen, sondern auch der Differentialgleichung

$$\text{(b)} \qquad \partial \vartheta / \partial t = \varkappa^2 \partial^2 \vartheta / \partial x^2 .$$

Ein Integral dieser Differentialgleichung lautet

$$\text{(c)} \qquad \vartheta = e^{-m^2 \varkappa^2 t}(A \sin m x + B \cos m x) .$$

Nach (a) muss $B = 0$ sein, sodass

$$\text{(d)} \qquad \vartheta = A e^{-m^2 \varkappa^2 t} \sin m x .$$

Dieser Werth von ϑ erfüllt nicht allein die Gleichung (b), sondern verschwindet auch für $x = 0$. Weil ϑ auch Null sein soll für $x = a$, so muss

$$\sin m a = 0$$

sein und also

$$m a = \pm p \pi ,$$

wo p eine ganze Zahl ist. Wir haben demnach

$$\text{(e)} \qquad \vartheta = A e^{-p^2 \pi^2 \varkappa^2 t / a^2} . \sin (p x \pi / a) .$$

Berücksichtigen wir ferner, dass $\vartheta = f(x)$ für $t = 0$ sein soll, so muss

$$\text{(f)} \qquad f(x) = A \sin (p \pi x / a)$$

sein.

Im Allgemeinen kann aber die Function $f(x)$ nicht durch diesen Ausdruck dargestellt werden. Zur Lösung der Aufgabe benutzt man dann folgende Methode.

Der Ausdruck (e) liefert uns nicht allein ein Integral der Fourier'schen Gleichung, sondern auch eine Summe von Ausdrücken (e) ist ein Integral dieser Gleichung, welche dadurch sich ergiebt, dass wir p alle ganzen Werthe zwischen 1 und ∞ beilegen. Die Glieder, welche einem negativen p entsprechen, unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von den Gliedern mit positivem p und können also als in den letzteren enthaltend betrachtet werden. Wir setzen demnach

$$\text{(g)} \quad \vartheta = A_1 \sin (\pi x / a) . e^{-\pi^2 \varkappa^2 t / a^2} + A_2 \sin (2 \pi x / a) . e^{-2^2 \pi^2 \varkappa^2 t / a^2} + \ldots$$

Für $t = 0$ ist $\vartheta = f(x)$, sodass für $0 < x < a$

$$\text{(h)} \qquad f(x) = A_1 \sin (\pi x / a) + A_2 \sin (2 \pi x / a) + \ldots$$

wird.

Wir untersuchen nun, ob eine willkürliche Function $f(x)$ für den betrachteten Bereich durch eine trigonometrische Reihe von dieser Form ersetzt werden kann. Zu diesem Zwecke wählen wir an der Stelle der unendlichen Reihe (h) eine andere Reihe mit $(n-1)$-Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, welche mit $f(x)$ in $(n-1)$-Punkten zusammenfällt, nämlich für

$$x = a / n, \quad x = 2 a / n, \quad \ldots \quad x = (n-1) a / n .$$

Daraus ergeben sich folgende $(n-1)$-Gleichungen

$$f(a/n) = A_1 \sin (\pi / n) + A_2 \sin (2 \pi / n) + \ldots + A_{n-1} \sin ((n-1) \pi / n),$$

$$f(2a/n) = A_1 \sin (2 \pi / n) + A_2 \sin (2 . 2 \pi / n) + \ldots + A_{n-1} \sin (2 (n-1) \pi / n),$$

$$f((n-1) a / n) = A_1 \sin ((n-1) \pi / n) + A_2 \sin ((n-1) 2 \pi / n) + \ldots + A_{n-1} \sin ((n-1)(n-1) \pi / n).$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit $\sin(\pi/n)$, die zweite mit $\sin(2\pi/n)$ u. s. w. multiplicirt, so ergiebt sich durch Addition der rechten und linken Seiten der Gleichungen

$$\begin{aligned} & f(a/n)\sin(\pi/n) + f(2a/n).\sin(2\pi/n) + \dots \\ & + f\bigl((n-1)a/n\bigr)\sin\bigl((n-1)\pi/n\bigr) = A_1\bigl[\sin^2(\pi/n) \\ & + \sin^2(2\pi/n) + \dots + \sin^2\bigl((n-1)\pi/n\bigr)\bigr] \\ & + A_2\bigl[\sin(\pi/n).\sin(2\pi/n) + \sin(2\pi/n).\sin(2.2\pi/n) + \dots \\ & + \sin\bigl((n-1)\pi/n\bigr)\sin\bigl((n-1)2\pi/n\bigr)\bigr] + \dots \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \dots + \sin^2\bigl((n-1)\alpha\bigr) \\ & = \tfrac{1}{2}\Bigl[n - 1 - \bigl(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \dots + \cos\bigl((2n-2)\alpha\bigr)\bigr)\Bigr]. \end{aligned}$$

Weil aber

$$\begin{aligned} & \cos\beta + \cos 2\beta + \dots + \cos\bigl((n-1)\beta\bigr) \\ & = \cos(\tfrac{1}{2}n\beta).\sin\bigl(\tfrac{1}{2}(n-1)\beta\bigr)/\sin\tfrac{1}{2}\beta \end{aligned}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} & \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \dots + \sin^2\bigl((n-1)\alpha\bigr) \\ & = \tfrac{1}{2}[n - 1 - \cos n\alpha.\sin(n-1)\alpha/\sin\alpha]. \end{aligned}$$

Setzen wir für α seinen Werth π/n ein, so wird

$$\sin^2(\pi/n) + \sin^2(2\pi/n) + \dots \sin^2\bigl((n-1)\pi/n\bigr) = n/2.$$

Dem Factor von A_2 können wir aber die Form geben

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\bigl[\cos(\pi/n) - \cos(3\pi/n) + \cos(2\pi/n) - \cos(6\pi/n)\dots \\ & + \cos\bigl((n-1)\pi/n\bigr) - \cos\bigl((n-1)3\pi/n\bigr)\bigr]. \end{aligned}$$

Wenden wir die oben angegebene Summationsformel an, so zeigt sich, dass dieser Factor gleich Null wird. In derselben Weise verschwinden die Factoren von A_3, A_4 ... und wir erhalten das Resultat

$$\begin{aligned} A_1 = 2/n.\bigl[& f(a/n)\sin(\pi/n) + f(2a/n).\sin(2\pi/n) + \dots \\ & + f\bigl((n-1)a/n\bigr)\sin\bigl((n-1)\pi/n\bigr)\bigr]. \end{aligned}$$

Allgemein hat man für $0 < m < n$

$$\text{(i)}\quad \left\{ \begin{aligned} A_m = 2/n.\bigl[& f(a/n).\sin(m\pi/n) + f(2a/n).\sin(2m\pi/n) \\ & + \dots + f\bigl((n-1)a/n\bigr).\sin\bigl((n-1)m\pi/n\bigr)\bigr]. \end{aligned} \right.$$

Demnach ist es möglich, die Coefficienten A_1, A_2 ... so zu bestimmen, dass $f(x)$ und die trigonometrische Reihe für $(n-1)$-Werthe von x zwischen 0 und a zusammenfallen. Je grösser n gewählt wird, desto mehr Werthe haben die beiden Functionen gemeinsam und für $n = \infty$ ist es gestattet, die eine Function an die Stelle der anderen in dem betrachteten Intervalle zu setzen. Beide Functionen sind jedoch nicht identisch, denn ihre Differentialquotienten können ganz verschieden sein. Die eine Function verhält sich zu der anderen wie eine gerade Linie zu einer gezähnten Linie, deren Zähne unendlich klein sind.

Wir wollen nun annehmen, dass $n = \infty$ ist und schreiben die Gleichung (i)

$$A_m = 2/\pi . \pi/n . [f(a/n) . \sin(m\pi/n) + f(2a/n)\sin(2m\pi/n) + \ldots + f(ra/n)\sin(rm\pi/n) + \ldots].$$

Wir setzen nun

$$r\pi/n = \gamma, \quad \pi/n = d\gamma, \quad ra/n = a\gamma/\pi,$$

so ergiebt sich

$$\text{(k)} \qquad A_m = 2/\pi . \int_0^\pi f(a\gamma/\pi) . \sin(m\gamma)\, d\gamma .$$

Wird ferner $x = a\gamma/\pi$ gesetzt, so haben wir

$$\text{(l)} \qquad A_m = 2/a . \int_0^a f(x) \sin(m\pi x/a)\, dx .$$

Dasselbe Resultat ist in einer anderen Weise in § 37 (c) gefunden.

Wir können also für einen beliebigen Bereich, z. B. von 0 bis a an Stelle der Function $f(x)$ eine trigonometrische Reihe, nämlich für $0 < x < a$

$$\text{(m)} \qquad \left\{ \begin{aligned} f(x) = 2/a . \Big[& \sin(\pi x/a) . \int_0^a f(x) \sin(\pi x/a)\, dx \\ & + \sin(2\pi x/a) . \int_0^a f(x) \sin(2\pi x/a)\, dx + \ldots \Big] \end{aligned} \right.$$

setzen. Werden die für $A_1, A_2 \ldots$ erhaltenen Werthe in (g) eingesetzt, so ist die betrachtete Aufgabe gelöst, und wir erhalten

$$\text{(n)} \left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{2} a \vartheta &= \sin(\pi x / a)\, e^{-\pi^2 \varkappa^2 t / a^2} . \int_0^a f(x) \sin(\pi x / a)\, dx \\ &+ \sin(2\pi x / a) e^{-2^2 \pi^2 \varkappa^2 t / a^2} . \int_0^a f(x) \sin(2\pi x / a)\, dx + \ldots \end{aligned} \right.$$

Ist z. B. die Temperatur der Platte von vornherein constant und gleich ϑ_0, so haben wir

$$\int_0^a \vartheta_0 \sin(m \pi x / a)\, dx = (1 - \cos m \pi)\, a \vartheta_0 / m \pi ,$$

und also

$$\text{(o)} \quad \left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{4} \pi \vartheta &= \vartheta_0 . \sin(\pi x / a)\, e^{-(\pi \varkappa / a)^2 . t} \\ &+ \tfrac{1}{3} \vartheta_0 . \sin(3 \pi x / a) . e^{-(3 \pi \varkappa / a)^2 . t} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Für $t = 0$ erhalten wir, wenn $0 < x < a$ ist,

$$\text{(p)} \quad \tfrac{1}{4} \pi = \sin(\pi x / a) + \tfrac{1}{3} . \sin(3 \pi x / a) + \tfrac{1}{5} . \sin(5 \pi x / a) + \ldots$$

§ 130. Die Entwickelung der Functionen in Reihen von Sinus und Cosinus.

Nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen kann man stets

$$\text{(a)} \qquad f(x) = A_1 \sin(\pi x / a) + A_2 \sin(2 \pi x / a) + \ldots$$

setzen, wo nach § 129 (l)

$$\text{(b)} \qquad A_m = 2 / a . \int_0^a f(\alpha) \sin(m \pi \alpha / a)\, d\alpha$$

ist, wenn x mit α vertauscht wird. Die Reihenentwickelung gilt nur für $0 < x < a$; für die Grenzwerthe 0 und a selbst gilt sie nicht, wofern nicht $f(x)$ selbst gleich Null für diese Grenzwerthe ist. Die rechte Seite von (a) ist eine ungerade Function, welche zugleich mit x das Vorzeichen wechselt. Die Reihe (a) gilt auch für den Bereich $-a < x < 0$, wenn $f(x)$ auch eine ungerade Function ist. Setzen wir $f(x) = x$, so wird

$$A_m = 2/a . \int_0^a \alpha \sin(m\pi\alpha/a)\,d\alpha = -2a\cos(m\pi)/m\pi,$$

und ferner

(c) $\frac{1}{2}.\pi x/a = \sin(\pi x/a) - \frac{1}{2}.\sin(2\pi x/a) + \frac{1}{3}.\sin(3\pi x/a) - \ldots$

Da x eine ungerade Function ist, so gilt die Reihe auch für negative Werthe von x, wenn sie für positive Werthe besteht. Weil aber die Reihe auch gilt für $x = 0$, so gilt sie für den Bereich

$$-a < x < +a.$$

Setzt man $\pi x/a = y$, so ist auch für $-\pi < y < +\pi$

(d) $\frac{1}{2}y = \sin y - \frac{1}{2}.\sin 2y + \frac{1}{3}.\sin 3y - \ldots$

Wird ferner

(e) $f(x) = B_0 + B_1\cos(\pi x/a) + B_2\cos(2\pi x/a) + \ldots$

gesetzt, und werden beide Seiten dieser Gleichung mit $\cos(m\pi x/a)$ multiplicirt und dann integrirt von 0 bis a, so ergiebt sich, wenn m und n ganze Zahlen sind,

$$\int_0^a \cos(m\pi x/a)\cos(n\pi x/a)dx = 0 \text{ und } \int_0^a \cos^2(m\pi x/a)\,dx = \frac{1}{2}a.$$

Demnach erhalten wir für $m > 0$

(f) $B_m = 2/a.\int_0^a f(x).\cos(m\pi x/a)\,dx$ und $B_0 = 1/a.\int_0^a f(x)\,dx.$

B_0 ergiebt sich, wenn in (e) rechts und links mit dx multiplicirt und dann von 0 bis a integrirt wird. Ist $f(x)$ eine gerade Function, so gilt die Reihe für den Bereich $-a < x < a$, da die Cosinusreihe nicht mit x das Vorzeichen wechselt. Ist aber $f(x)$ eine ungerade Function, so gilt die Reihe (e) nur innerhalb der Grenzen 0 und a.

Wir erhalten also das Resultat

$$\text{(g)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}a.f(x) = \sin(\pi x/a)\int_0^a f(\alpha)\sin(\pi\alpha/a)\,d\alpha \\ &+ \sin(2\pi x/a)\int_0^a f(\alpha)\sin(2\pi\alpha/a)\,d\alpha + \ldots \end{aligned} \right.$$

und

$$\text{(h)} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} a \,.\, f(x) = \frac{1}{2} \,.\, \int\limits_0^a f(\alpha)\, d\alpha + \cos(\pi x / a) \,.\, \int\limits_0^a f(\alpha) \cos(\pi \alpha / a)\, d\alpha \\ \qquad + \cos(2\pi x / a) \int\limits_0^a f(\alpha) \cos(2\pi\alpha / a)\, d\alpha + \dots . \end{cases}$$

Eine willkürliche Function $f(x)$ kann auch in Reihen von Sinus und Cosinus entwickelt werden, sodass die Entwicklung für den Bereich $-a < x < a$ giltig bleibt. Zu diesem Zwecke setzt man

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \,.\, [f(x) + f(-x)] + \tfrac{1}{2} \,.\, [f(x) - f(-x)],$$

wobei $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ eine gerade Function ist, weil dieselbe unverändert bleibt, wenn man x mit $-x$ vertauscht. Dieselbe Function kann als Cosinusreihe dargestellt werden. Der Coefficient von $\cos(m\pi x / a)$ wird

$$\tfrac{1}{2} \,.\, \int\limits_0^a [f(\alpha) + f(-\alpha)] \cos(m\pi\alpha / a)\, d\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2} \,.\, \int\limits_0^a f(\alpha) \cos(m\pi\alpha / a)\, d\alpha + \tfrac{1}{2} \,.\, \int\limits_0^a f(-\alpha) \cos(m\pi\alpha / a)\, d\alpha.$$

Wird in dem letzten Integral α mit $-\alpha$ vertauscht, so geht dasselbe über in

$$-\tfrac{1}{2} \,.\, \int\limits_0^{-a} f(\alpha) \cos(m\pi\alpha / a)\, d\alpha$$

und der gesuchte Coefficient wird dadurch

$$\tfrac{1}{2} \int\limits_{-a}^{+a} f(\alpha) \cos(m\pi\alpha / a)\, d\alpha.$$

Wir erhalten demnach

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} a \,.\, [f(x) + f(-x)] = \frac{1}{2} \,.\, \int\limits_{-a}^{+a} f(\alpha)\, d\alpha \\ \qquad + \cos(\pi x / a) \int\limits_{-a}^{+a} f(\alpha) \cos(\pi\alpha / a)\, d\alpha \\ \qquad + \cos(2\pi x / a) \int\limits_{-a}^{+a} f(\alpha) \cos(2\pi\alpha / a)\, d\alpha + \dots . \end{cases}$$

Dagegen ist die Function $\frac{1}{2}.[f(x)-f(-x)]$ eine ungerade Function, weil sie mit x zugleich das Vorzeichen wechselt; mit Hülfe von (g) stellen wir also diese Function als Sinusreihe dar. Der Coefficient von $\sin(m\pi x/a)$ wird

$$\frac{1}{2}.\int_0^a [f(\alpha)-f(-\alpha)]\sin(m\pi\alpha/a)\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}.\int_0^a f(\alpha)\sin(m\pi\alpha/a)\,d\alpha - \frac{1}{2}.\int_0^a f(-\alpha)\sin(m\pi\alpha/a)\,d\alpha.$$

Vertauscht man in dem letzten Integrale α und $-\alpha$, so geht dasselbe über in

$$-\frac{1}{2}.\int_0^{-a} f(\alpha)\sin(m\pi\alpha/a)\,d\alpha$$

und der Coefficient wird

$$\frac{1}{2}.\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\sin(m\pi\alpha/a)\,d\alpha.$$

Wir erhalten also das Resultat

$$\text{(k)} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}a.[f(x)-f(-x)] = \sin(\pi x/a).\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\sin(\pi\alpha/a)\,d\alpha \\ \qquad + \sin(2\pi x/a)\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\sin(2\pi\alpha/a)\,d\alpha + \dots. \end{cases}$$

Durch Addition ergiebt sich aus den Gleichungen (i) und (k) endlich

$$\text{(l)} \quad \begin{cases} a.f(x) = \frac{1}{2}.\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\,d\alpha + \int_{-a}^{+a} f(\alpha)\cos\big(\pi(x-\alpha)/a\big)\,d\alpha \\ \qquad + \int_{-a}^{+a} f(\alpha)\cos\big(2\pi(x-\alpha)/a\big)\,d\alpha + \dots, \end{cases}$$

oder für $-a < x < a$

$$\text{(m)} \quad \begin{cases} f(x) = 1/a.\int_{-a}^{+a}\Big[\frac{1}{2} + \cos\big(\pi(x-\alpha)/a\big) \\ \qquad + \cos\big(2\pi(x-\alpha)/a\big) + \dots\Big] f(\alpha)\,d\alpha. \end{cases}$$

Diese Reihe rührt von Fourier her. Dieselbe kann auch in der Form

(n) $$f(x) = 1/2a.\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\,d\alpha + 1/a.\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\cos\big(m\pi(x-\alpha)/a\big)\,d\alpha$$

dargestellt werden.

Wir können nun a irgend welche Werthe beilegen. Ist a unendlich gross und ist

$$\int_{-a}^{a} f(\alpha)\,d\alpha$$

endlich, so verschwindet das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (n), und wir erhalten

$$f(x) = 1/\pi.\sum_{m=1}^{m=\infty}\pi/a.\int_{-a}^{a} f(\alpha)\cos\big(m\pi(x-\alpha)/a\big)\,d\alpha.$$

Wird nun $m\pi/a = \lambda$ und also $\pi/a = d\lambda$ gesetzt, so ergiebt sich

(o) $$f(x) = 1/\pi.\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos\big(\lambda(x-\alpha)\big)\,d\alpha,$$

wo $-\infty < x < \infty$ ist. An Stelle dieser Gleichung kann man oft zwei andere anwenden, die sich aus (g) und (h) ergeben. Das allgemeine Glied in (g) lautet nämlich

$$\sin(m\pi x/a).\int_{0}^{a} f(\alpha)\sin(m\pi\alpha/a)\,d\alpha.$$

Demnach ist

$$f(x) = 2/\pi.\pi/a.\sum_{m=1}^{m=\infty}\sin(m\pi x/a)\int_{0}^{a} f(\alpha)\sin(m\pi\alpha/a)\,d\alpha.$$

Wird nun $m\pi/a = \lambda$ und also $\pi/a = d\lambda$ gesetzt, so ergiebt sich für $0 < x < \infty$

(p) $$f(x) = 2/\pi.\int_{0}^{\infty} d\lambda.\sin(\lambda x)\int_{0}^{\infty} f(\alpha)\sin(\lambda\alpha)\,d\alpha.$$

Aus (h) erhalten wir in derselben Weise für $0 < x < \infty$

(q) $$f(x) = 2/\pi.\int_{0}^{\infty} d\lambda\cos(\lambda x).\int_{0}^{\infty} f(\alpha)\cos(\lambda\alpha)\,d\alpha.$$

§ 131. Die Anwendung des Fourier'schen Satzes auf die Ausbreitung der Wärme.

Wenn die Temperatur in einem Raume nur von der x-Coordinate abhängt, so muss die Temperatur ϑ der Fourier'schen Gleichung

(a) $$\partial \vartheta / \partial t = \varkappa^2 \partial^2 \vartheta / \partial x^2$$

genügen. Nach § 129 (c) ist

$$\vartheta = e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t}(A \sin \lambda x + B \cos \lambda x)$$

ein Integral der Gleichung (a), wenn λ, A, B Constante sind. Wir können dem Ausdrucke für ϑ auch die Form

$$\vartheta = e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \cos(\lambda(x-\alpha)) \,.\, f(\alpha)$$

geben, wo $f(\alpha)$ eine willkürliche Function von α ist, λ und α constante Grössen sind, welche alle möglichen Werthe annehmen können. Jede Summe solcher Glieder genügt der Gleichung und also genügt derselben auch

(b) $$\vartheta = 1/\pi \,.\int_0^\infty d\lambda\, e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos(\lambda(x-\alpha))\, d\alpha.$$

Aber für $t = 0$ ergiebt sich hieraus

$$\vartheta = 1/\pi \,.\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos(\lambda(x-\alpha))\, d\alpha,$$

woraus wir durch Vergleichung mit § 130 (o) erhalten

$$\vartheta = f(x).$$

In (b) ist also die Lösung der Aufgabe enthalten, die Temperatur in einem Körper zu irgend einer Zeit t zu bestimmen, wenn die Temperatur zur Zeit $t = 0$ durch $\vartheta = f(x)$ gegeben ist. Dieselbe Aufgabe ist inzwischen bereits auf einem anderen Wege in § 125 (h) und (i) gelöst worden, und wir zeigen nun, dass der hier für ϑ gefundene Ausdruck mit dem früheren identisch ist.

Da

(c) $$\vartheta = 1/\pi \,.\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, d\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \cos(\lambda(x-\alpha))\, d\lambda$$

ist, so bestimmen wir zunächst den Werth des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \cos\big(\lambda(x-\alpha)\big)\, d\lambda.$$

Entwickeln wir $\cos\big(\lambda(x-\alpha)\big)$ in eine Reihe, so wird dieses Integral dargestellt durch

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(x-\alpha)^{2n}}{[2n]} \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \lambda^{2n} \,.\, d\lambda.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \lambda^{2n}\, d\lambda = (2n-1)\,/\,2\varkappa^2 t \,.\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \lambda^{2n-2}\, d\lambda$$

und durch fortgesetzte Reduction

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \lambda^{2n}\, d\lambda = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{(2\varkappa^2 t)^n} \cdot \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t}\, d\lambda.$$

Weil aber

$$\int_0^\infty e^{-q^2} dq = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ist, so erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} \lambda^{2n}\, d\lambda = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{(2\varkappa^2 t)^n} \, \frac{\sqrt{\pi}}{2\varkappa\sqrt{t}}.$$

Das gesuchte Integral wird also

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\varkappa\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(x-\alpha)^{2n}}{[2n]} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{(2\varkappa^2 t)^n}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\varkappa\sqrt{t}} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{[n]} \frac{(x-\alpha)^{2n}}{(4\varkappa^2 t)^n},$$

oder

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\varkappa\sqrt{t}} \,.\, e^{-(x-\alpha)^2/4\varkappa^2 t}.$$

Führen wir diesen Ausdruck für das Integral in (c) ein, so ergiebt sich

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\varkappa\sqrt{t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, e^{-(x-\alpha)^2/4\varkappa^2 t}\, d\alpha. \tag{d}$$

Dieser Ausdruck für ϑ ist identisch mit dem in § 125 (h) gegebenen.

Wir wollen ferner den Fourier'schen Lehrsatz benutzen, um das Gesetz aufzufinden, nach welchem die Wärme in einen Körper eindringt. Dabei wollen wir den einfachen Fall betrachten, in welchem der Körper mit seiner ebenen Grenzfläche F einen anderen Körper berührt, der die gegebene Temperatur ϑ_0 hat, welche unveränderlich ist. Die Temperatur des kalten Körpers sei Null.

Wenn wir in derselben Weise wie früher verfahren und § 130 (p) benutzen, so erhalten wir

$$\vartheta = \vartheta_0 + 2/\pi \,.\int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x)\, e^{-\lambda^2\varkappa^2 t} \,.\int_0^\infty f(\alpha)\sin(\lambda\alpha)\, d\alpha.$$

Dieser Ausdruck für ϑ genügt allen Bedingungen, wenn nur für $t = 0$

$$0 = \vartheta_0 + 2/\pi \,.\int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x) \,.\int_0^\infty f(\alpha)\sin(\lambda\alpha)\, d\alpha$$

wird. Aber nach § 130 (p) wird diese Gleichung erfüllt, wenn

$$f(\alpha) = -\vartheta_0$$

ist. Die Lösung der vorgelegten Aufgabe ist demnach in

$$\vartheta = \vartheta_0 - 2\vartheta_0/\pi \,.\int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x)\, e^{-\lambda^2\varkappa^2 t} \,.\int_0^\infty \sin(\lambda\alpha)\, d\alpha \tag{e}$$

enthalten. Benutzen wir dieselbe Reductionsmethode, durch welche der Ausdruck (c) in den Ausdruck (d) umgewandelt ist, so ergiebt sich

$$\vartheta = \vartheta_0 - \frac{\vartheta_0}{2\varkappa\sqrt{\pi t}} \cdot \left\{ \int_0^\infty e^{-(x-\alpha)^2/4\varkappa^2 t}\, d\alpha - \int_0^\infty e^{-(x+\alpha)^2/4\varkappa^2 t}\, d\alpha \right\},$$

woraus folgt

$$\vartheta = \vartheta_0 - \frac{\vartheta_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \left\{ \int_{-x/2\varkappa\sqrt{t}}^\infty e^{-q^2}\, dq - \int_{x/2\varkappa\sqrt{t}}^\infty e^{-q^2}\, dq \right\},$$

also auch

$$\vartheta = \vartheta_0 \left\{1 - 1 / \sqrt{\pi} . \int_{-x/2\varkappa\sqrt{t}}^{+x/2\varkappa\sqrt{t}} e^{-q^2} dq\right\}.$$

Da e^{-q^2} eine gerade Function ist, so erhalten wir

$$\vartheta = \vartheta_0 \left\{1 - 2 / \sqrt{\pi} . \int_0^{x/2\varkappa\sqrt{t}} e^{-q^2} dq\right\},$$

oder in Rücksicht auf § 125 (e)

$$\text{(f)} \qquad \vartheta = 2\vartheta_0 / \sqrt{\pi} . \int_{x/2\varkappa\sqrt{t}}^{\infty} e^{-q^2} dq.$$

A und B seien zwei Punkte im Innern des Körpers, welche bezw. die Abstände x_1 und x_2 von der Fläche F haben. Wenn A nach der Zeit t_1 die Temperatur ϑ' erlangt hat, so ist

$$\vartheta' = 2\vartheta_0 / \sqrt{\pi} . \int_{x_1/2\varkappa\sqrt{t_1}}^{\infty} e^{-q^2} dq.$$

Dieselbe Temperatur erreicht B erst nach der Zeit t_2, welche durch die Gleichung

$$\vartheta' = 2\vartheta_0 / \sqrt{\pi} . \int_{x_2/2\varkappa\sqrt{t_2}}^{\infty} e^{-q^2} dq$$

bestimmt ist. Durch Vergleichung der beiden Integrale sieht man, dass

$$x_1 / \sqrt{t_1} = x_2 / \sqrt{t_2} \quad \text{oder} \quad t_2 / t_1 = x_2^2 / x_1^2$$

sein muss, d. h. *die Zeiten, nach deren Verlauf zwei Punkte dieselbe Temperatur erlangen, verhalten sich wie die Quadrate der Abstände der Punkte von der erwärmten Fläche F.*

Wir bestimmen nun die Wärmemenge, welche durch die Flächeneinheit in den kalten Körper während der Zeiteinheit hineinströmt. Zu diesem Zwecke geben wir der Gleichung (f) die Form

$$\vartheta = 2\vartheta_0 / \sqrt{\pi} . \left[f(\infty) - f\left(x / 2\varkappa\sqrt{t}\right)\right],$$

woraus sich in Rücksicht auf (f)

$$-k\,\partial\vartheta / \partial x = k\vartheta_0 / \varkappa\sqrt{\pi t} . e^{-x^2/4\varkappa^2 t}$$

ergiebt. Die gesuchte Wärmemenge U finden wir, wenn $x = 0$ gesetzt wird, die Wärmemenge ist

(g) $$U = k\vartheta_0 / \varkappa \sqrt{\pi t}.$$

Mit Hülfe der Gleichung (g) wollen wir eine wichtige Aufgabe lösen. Zwei Körper L und L' stossen in einer ebenen Fläche zusammen, der eine von ihnen hat die Temperatur T, der andere die Temperatur T'. Werden beide Körper mit einander in Berührung gebracht, so wird der eine von ihnen erwärmt, während sich der andere abkühlt. Wir können auch die Temperatur T_0 der Berührungsfläche bestimmen. Nehmen wir an, dass T_0 konstant ist, so ist die Wärmemenge, welche L in der Zeiteinheit empfängt, nach (g) ausgedrückt durch

$$U = k(T_0 - T) / \varkappa \sqrt{\pi t}.$$

In derselben Zeit erhält L' die Wärmemenge

$$U' = k'(T_0 - T') / \varkappa' \sqrt{\pi t},$$

wo k' und $\varkappa'$ dieselbe Bedeutung für L' haben wie k und $\varkappa$ für L. Da aber die Grenzfläche keine Wärme enthält, so muss $U + U' = 0$ sein, oder

$$k / \varkappa . (T_0 - T) = k' / \varkappa' . (T' - T_0),$$

woraus

(h)[1] $$T_0 = (T\sqrt{kc\varrho} + T'\sqrt{k'c'\varrho'}) / (\sqrt{kc\varrho} + \sqrt{k'c'\varrho'})$$

sich ergiebt. Daraus ersieht man, dass unsere Annahme richtig ist, nach welcher die Temperatur in der Grenzfläche zwischen zwei Körpern, welche sich in einer ebenen Fläche berühren, constant ist. In Wirklichkeit müssen die beiden sich berührenden Körper unendlich gross sein, aber die Formel (h) kann auch auf kleine Körper angewendet werden, wenn wir nur die Zeit kurz nach der Berührung betrachten. Aus (h) erkennen wir, dass die Temperatur eines erwärmten festen Körpers fast gar nicht vermindert wird, wenn wir ihn mit der Luft in Berührung bringen; namentlich gilt dieses für die Metalle und die guten Leiter überhaupt. Aus der Gleichung (h) folgt nämlich

$$(T - T_0) / (T_0 - T') = \sqrt{k'c'\varrho' / kc\varrho}.$$

[1] L. Lorenz, Lehre von der Wärme. S. 178. Kopenhagen 1877.

Ist T die Temperatur des festen Körpers, so ist ϱ stets sehr viel grösser als ϱ'. Demnach ist $T_0 - T'$ sehr viel grösser als $T - T_0$, besonders wenn k auch grösser als k' ist, während c und c' nicht sehr von einander abweichen.

§ 132. Die Abkühlung einer Kugel.

Die Temperatur im Innern einer Kugel hänge nur vom Abstande des betrachteten Punktes vom Kugelmittelpunkte ab. In diesem Falle nimmt nach § 126 (c) die Fourier'sche Gleichung die Form

$$\text{(a)} \qquad \partial(r\vartheta)/\partial t = \varkappa^2 \partial^2 (r\vartheta)/\partial r^2$$

an. Sind m, A, B willkürliche Grössen, so lautet ein Integral der Gleichung (a)

$$r\vartheta = e^{-m^2\varkappa^2 t}.\left(A\sin(mr) + B\cos(mr)\right).$$

Weil aber $\vartheta = \infty$ wird für $r = 0$, so muss $B = 0$ sein und wir erhalten als Integral der Gleichung (a)

$$\text{(b)} \qquad r\vartheta = A.e^{-m^2\varkappa^2 t}.\sin(mr).$$

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, in welchem die Kugel in einer Mischung von Schnee und Wasser sich befindet, oder in welchem ihre Oberfläche durch irgend ein anderes Mittel die Temperatur 0° hat. Bezeichnen wir den Radius der Kugel mit R, so ist für $r = R$ auch $\vartheta = 0$ und also muss

$$\sin(mR) = 0$$

sein. Ist demnach p eine beliebige ganze Zahl, so folgt

$$mR = \pm p\pi.$$

Wir können nun setzen

$$\text{(c)} \quad r\vartheta = A_1 e^{-(\pi\varkappa/R)^2 t}.\sin(\pi r/R) + A_2 e^{-(2\pi\varkappa/R)^2 t}.\sin(2\pi r/R) + \dots$$

Die Constanten A_1, A_2 ... werden mit Hülfe der Temperaturen bestimmt, welche zur Zeit $t = 0$ vorhanden sind. Zu dieser Zeit sei die Temperatur durch $f(r)$ gegeben. Wir erhalten also

$$r.f(r) = A_1 \sin(\pi r/R) + A_2 \sin(2\pi r/R) + \dots$$

Nach § 129 (l) erhalten wir für

(d) $$A_m = 2 / R . \int_0^R r f(r) \sin(m \pi r / R) d r .$$

Ist die Temperatur constant und zwar gleich ϑ_0 zur Zeit $t = 0$, so erhalten wir

$$A_m = 2 \vartheta_0 / R . \int_0^R r \sin(m \pi r / R) d r$$

und demnach

$$A_m = - 2 \vartheta_0 R / m \pi . \cos(m \pi) .$$

Somit erhalten wir das Resultat

(e) $$\begin{cases} \vartheta = 2 R \vartheta_0 / \pi r . [\sin(\pi r / R) . e^{-(\pi \varkappa / R)^2 t} \\ - \frac{1}{2} . \sin(2 \pi r / R) e^{-(2 \pi \varkappa / R)^2 t} + \frac{1}{3} . \sin(3 \pi r / R) e^{-(3 \pi \varkappa / R)^2 t} - \ldots]. \end{cases}$$

Die Mitteltemperatur ϑ' ist

(f) $$\vartheta' = 6 \vartheta_0 / \pi^2 . \{ e^{-(\pi \varkappa / R)^2 t} + \frac{1}{4} . e^{-(2 \pi \varkappa / R)^2 t} + \frac{1}{9} e^{-(3 \pi \varkappa / R)^2 t} + \ldots \}.$$

Die Gleichung können wir auf ein Thermometer anwenden, welches in eine kältere Flüssigkeit gebracht oder in derselben bewegt wird. Die Temperatur des Thermometers ist dann wesentlich durch das erste Glied der obigen Gleichung gegeben. Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist

(g) $$- d \vartheta' / d t = \pi^2 k \vartheta' / c \varrho R^2 .$$

Wir betrachten jetzt einen anderen wichtigen Fall, dass sich eine Kugel in einem leeren Raume befindet und Wärme in demselben ausstrahlt. Der Raum oder vielmehr die Begrenzung desselben habe die Temperatur 0°. Die Ausstrahlung erfolge nach dem Newton'schen Gesetze und sei also proportional der Temperatur an der Kugeloberfläche. Nach (b) erhält das Integral die Form

(h) $$r \vartheta = \Sigma A_m e^{-m^2 \varkappa^2 t} . \sin(m r).$$

Bezeichnen wir mit E das Ausstrahlungsvermögen, so strahlt ein Element $d S$ der Oberfläche in der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$d S . E \vartheta$$

aus. E soll in dem betrachteten Falle constant sein. Das-

selbe Flächenelement dS erhält aus dem Innern der Kugel in der gleichen Zeit die Wärmemenge

$$-k.dS.d\vartheta/dr.$$

Da die von dS aufgenommene Wärmemenge gleich der abgegebenen sein muss, so erhalten wir

(i) $$-k.d\vartheta/dr = E\vartheta \quad \text{oder} \quad -d\vartheta/dr = h\vartheta,$$

wo der Kürze wegen $h = E/k$ gesetzt ist. Demnach ergiebt sich für $r = R$

$$\Sigma A_m e^{-m^2\kappa^2 t}.(m\cos(mR)/R - \sin(mR)/R^2)$$
$$= -h\Sigma A_m e^{-m^2\kappa^2 t}\sin(mR)/R$$

oder

$$\Sigma A_m e^{-m^2\kappa^2 t}.[mR\cos(mR) - (1-hR)\sin(mR)] = 0.$$

Soll diese Gleichung für jeden Werth von t stattfinden, so muss

(k) $$mR.\cos(mR) = (1-hR).\sin(mR)$$

sein. Diese Gleichung muss nach m aufgelöst werden. Wir setzen $mR = x$ und haben dann

(l) $$\operatorname{tg} x = x/(1-hR).$$

Nehmen wir ferner

$$y_1 = \operatorname{tg} x,$$

so können y_1 und x als die rechtwinkligen Coordinaten einer gewissen Curve betrachtet werden (Fig. 143). Diese Curve hat unendlich viele Zweige oa, πb, $2\pi c$, ..., für welche die geraden Linien

$$x = \tfrac{1}{2}\pi, \quad x = \tfrac{3}{2}\pi \ldots$$

Asymptoten sind. Wird ferner

$$y_2 = x/(1-hR)$$

gesetzt, so stellt diese Gleichung eine gerade Linie, z. B. opq dar, welche durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems geht.

h ist sicher positiv, liegt also zwischen 0 und ∞. Wir betrachten den Fall, dass $h = 0$; dann ist

$$y_2 = x$$

und diese Gleichung stellt eben die gerade Linie opq dar,

welche die Curve $o\,a$ im Punkte o berührt, ferner $\pi\,b$ in p, $2\pi\,c$ in q schneidet. Die Abscissen $0,\ x_1,\ x_2\ldots$ sind Wurzeln der Gleichung (1). Ferner ist

$$\pi < x_1 < 3\pi/2;\quad 2\pi < x_2 < 5\pi/2;\quad\ldots\quad n\pi < x_n < (n + \tfrac{1}{2})\pi.$$

Je grösser n wird, desto mehr nähert sich x_n der oberen Grenze $(n + \frac{1}{2})\pi$. Ausser den positiven Wurzeln hat die Gleichung (1) auch negative Wurzeln, welche dem absoluten Werthe nach den positiven gleich sind. Ist nächstdem

$$0 < h < 1/R,$$

so ist

$$0 < 1 - hR < 1$$

und also

$$y_2 > x.$$

Eine solche Linie ist z. B. $o\,\alpha\,\beta$ (Fig. 143), welche die Curven

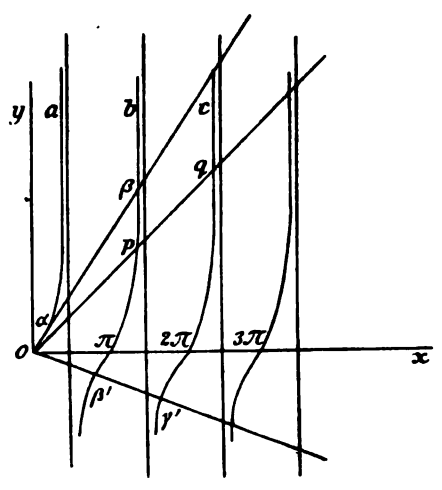


Fig. 143.

in $o,\ \alpha,\ \beta\ldots$ schneidet. Die Abscissen $0,\ x_1',\ x_2',\ x_3'\ldots$ dieser Punkte sind Wurzeln der Gleichung (1), und wir haben

$$0 < x_1' < \tfrac{1}{2}\pi;\quad \pi < x_2' < 3\pi/2;\quad 2\pi < x_3' < 5\pi/2\ldots$$
$$(n-1)\pi < x_n' < (n - \tfrac{1}{2})\pi.$$

Je grösser h wird, desto mehr nähert sich der Winkel $\alpha\,0\,\pi$ dem Winkel $\frac{1}{2}\pi$ und desto mehr nähern sich die

Wurzeln ihrer oberen Grenze. Ist $h = 1/R$, so wird $x = 0$ und die Wurzeln werden

$$0, \quad \tfrac{1}{2}\pi, \quad 3\pi/2, \quad 5\pi/2, \ldots$$

Ist nun

$$1/R < h < \infty,$$

so wird

$$y_2 = -x/(hR-1).$$

Die gerade Linie hat dann die Lage z. B. $o\beta'\gamma'$. Bezeichnen wir in diesem Falle die Wurzeln der Gleichung (l) mit $0, x_1'', x_2'' \ldots$, so haben wir

$$\tfrac{1}{2}\pi < x_1'' < \pi; \quad 3\pi/2 < x_2'' < 2\pi \ldots$$

Je mehr h wächst, desto mehr nähern sich die Wurzeln ihrer oberen Grenze. Ist aber $h = \infty$, so erhalten wir

$$x_1'' = \pi; \quad x_2'' = 2\pi; \ \ldots$$

Wir können nun die Wurzeln der Gleichung (l) als bekannt betrachten und aus denselben m bestimmen. Die den einzelnen Wurzeln entsprechenden Werthe von m seien

$$0, \quad m_1, \quad m_2, \ \ldots$$

Die negativen Wurzeln können wir fortlassen, weil die denselben entsprechenden Glieder in (h) mit denen zusammengefasst werden können, welche von den positiven Wurzeln herrühren. Wir setzen also

$$\text{(m)} \qquad r\vartheta = A_1 e^{-m_1^2\varkappa^2 t} \sin(m_1 r) + A_2 e^{-m_2^2\varkappa^2 t} \sin(m_2 r) + \ldots$$

Ist die Temperatur zur Zeit $t = 0$ durch $\vartheta = f(r)$ gegeben, so haben wir

$$\text{(n)} \qquad r.f(r) = A_1 \sin(m_1 r) + A_2 \sin(m_2 r) + \ldots$$

Sind nun m_a und m_b zwei Wurzeln der Gleichung (k), so werden die rechte und linke Seite der Gleichung (n) mit $\sin(m_a r)$ multiplicirt. Durch Integration von 0 bis R ergiebt sich

$$\text{(o)} \qquad \int_0^R r.f(r)\sin(m_a r)\,dr = \Sigma A_b \int_0^R \sin(m_b r)\sin(m_a r)\,dr.$$

Nun ist aber

$$\text{(p)}\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^R \sin(m_b r)\sin(m_a r)dr = \tfrac{1}{2}.\int_0^R \Big\{\cos[(m_b - m_a)r] - \cos[(m_b + m_a)r]\Big\}\,dr\\ &= \tfrac{1}{2}\sin[(m_b - m_a)R]/(m_b - m_a) - \tfrac{1}{2}.\sin[(m_b + m_a)R]/(m_b + m_a)\\ &= [m_a \sin(m_b R)\cos(m_a R) - m_b \cos(m_b R)\sin(m_a R)]/(m_b^2 - m_a^2).\end{aligned}\right.$$

Weil aber nach (k)

$$m_a R = (1 - hR)\operatorname{tg}(m_a R), \quad m_b R = (1 - hR)\operatorname{tg}(m_b R)$$

ist, und also

$$m_a \operatorname{tg}(m_b R) = m_b \operatorname{tg}(m_a R)$$

oder

$$m_a . \sin(m_b R) . \cos(m_a R) = m_b . \sin(m_a R) . \cos(m_b R)$$

ist, so wird

$$\int_0^R \sin(m_b r) . \sin(m_a r)\,dr = 0,$$

wofern m_a und m_b von einander verschieden sind. Sind aber m_a und m_b einander gleich, so wird (p) unbestimmt. Den Werth des Ausdruckes (p) finden wir in diesem Falle dadurch, dass wir $m_b = m_a + \varepsilon$ setzen, wo ε eine kleine Grösse ist. Einfacher gelangen wir zum Ziele, wenn wir den Werth des Integrales

$$\int_0^R \sin^2(m_a r)dr = \tfrac{1}{2}.\int_0^R [1 - \cos(2m_a r)]dr = \tfrac{1}{2}[R - \sin(2m_a R)/2m_a]$$

suchen. Daraus erhalten wir

$$A_a = 2/R.\int_0^R r.f(r)\sin(m_a r)\,dr\,/\,[1 - \sin(2m_a R)/2m_a R].$$

Die vollständige Lösung der Aufgabe ist demnach enthalten in

$$\text{(q)}\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{Rr\vartheta}{2} = \frac{\sin(m_1 r)\,e^{-m_1^2 \varkappa^2 t}}{1 - \sin(2m_1 R)/2m_1 R} . \int_0^R r.f(r)\sin(m_1 r)\,dr\\ &+ \frac{\sin(m_2 r)\,e^{-m_2^2 \varkappa^2 t}}{1 - \sin(2m_2 R)/2m_2 R} . \int_0^R r.f(r)\sin(m_2 r)\,dr + \ldots\end{aligned}\right.$$

In dem einfachen Falle, in welchem die Temperatur der Kugel

anfangs in allen Punkten gleich gross ist, haben wir $f(r) = \vartheta_0$ und finden dann

$$\vartheta_0 . \int_0^R r \sin(m r)\, dr = \vartheta_0 / m^2 . [\sin(m R) - m R \cos(m R)],$$

oder in Rücksicht auf (k) ergiebt sich

$$\vartheta_0 \int_0^R r \sin(m r)\, dr = h R \vartheta_0 \sin(m R) / m^2.$$

Wir erhalten also das Resultat

$$\text{(r)} \quad \left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{4} r \vartheta = h R \vartheta_0 . \Big(& \frac{\sin(m_1 R) \sin(m_1 r)\, e^{-m_1^2 \varkappa^2 t}}{m_1 [2 m_1 R - \sin(2 m_1 R)]} \\ & + \frac{\sin(m_2 R) \sin(m_2 r)\, e^{-m_2^2 \varkappa^2 t}}{m_2 [2 m_2 R - \sin(2 m_2 R)]} + \dots \Big). \end{aligned} \right.$$

Ist das Ausstrahlungsvermögen E und also auch h sehr klein, oder ist der Radius der Kugel klein, so ist das Produkt $(h R)$ eine kleine Grösse. In diesem Falle erhalten wir aus (k), wenn wir die höheren Potenzen fortlassen, indem der Sinus und der Cosinus in eine Reihe entwickelt werden,

$$1 - \tfrac{1}{2} . m_1^2 R^2 = (1 - h R)(1 - \tfrac{1}{6} . m_1^2 R^2),$$

woraus sich

$$m_1^2 = 3 h / R$$

ergiebt.

Die anderen Werthe von m sind so sehr viel grösser, dass die entsprechenden Glieder in (r) verschwinden gegen das erste Glied. Wir erhalten also

$$\vartheta = \vartheta_0 . e^{-3 h \varkappa^2 t / R},$$

oder, wenn der Werth für h eingesetzt wird,

$$\text{(s)} \qquad \vartheta = \vartheta_0 e^{-3 E t / \varrho c R}.$$

Diese Formel können wir auch in einfacher Weise ableiten. Die Wärmemenge, welche die Kugel in der Zeit $d t$ ausstrahlt, ist

$$4 \pi R^2 E \vartheta\, d t.$$

Dabei nimmt die Temperatur der Kugel um $-d\vartheta$ ab; die abgegebene Wärmemenge ist also

$$-4\pi/3 . R^3 c\varrho\, d\vartheta .$$

Demnach haben wir

$$4\pi R^2 E\vartheta\, dt = -4\pi/3 . R^3 c\varrho\, d\vartheta ,$$

woraus folgt

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-3Et/c\varrho R},$$

da die Temperatur der Kugel ϑ_0 zur Zeit $t = 0$ ist.

§ 133. Die Wärmebewegung in einem unendlich langen Cylinder.

Der Querschnitt S des Cylinders sei so klein, dass die Temperatur ϑ in demselben constant ist. A und B seien zwei Querschnitte, deren Abstand dx ist. Durch A strömt während der Zeit dt die Wärmemenge

$$-Sk . \partial\vartheta/\partial x . dt .$$

Durch den Querschnitt B strömt in derselben Zeit die Wärmemenge

$$-Sk(\partial\vartheta/\partial x + \partial^2\vartheta/\partial x^2 . dx)dt .$$

Der Theil des Cylinders, welcher zwischen A und B liegt, hat demnach die Wärmemenge

$$Sk . \partial^2\vartheta/\partial x^2 . dx\, dt$$

aufgenommen. Ein Theil dieser Wärme wird durch Leitung oder Strahlung an die Umgebung abgegeben. Ist P der Umfang des Cylinders, E eine Constante und hat die Umgebung des Cylinders die Temperatur 0, so ist die durch Leitung oder Strahlung abgegebene Wärme

$$PE\vartheta . dx\, dt .$$

Ein anderer Theil der zugeführten Wärme dient zur Erwärmung des Cylinders, und dieser Theil ist

$$S . dx . c\varrho . d\vartheta .$$

Demnach erhalten wir die Gleichung

$$Sk . \partial^2\vartheta/\partial x^2 = S\varrho c . \partial\vartheta/\partial t + PE\vartheta ,$$

oder

$$\text{(a)} \qquad \partial\vartheta/\partial t = \varkappa^2 . \partial^2\vartheta/\partial x^2 - h\vartheta ,$$

wenn

$$\varkappa^2 = k / c\varrho \quad \text{und} \quad h = PE / S\varrho c$$

gesetzt wird.

Wenn der Zustand in dem Cylinder oder der Stange stationär geworden ist, haben wir $\partial \vartheta / \partial t = 0$, und die Gleichung (a) erhält die Form

$$\varkappa^2 . \partial^2 \vartheta / \partial x^2 = h \vartheta .$$

Daraus ergiebt sich

(b) $$\vartheta = A e^{x\sqrt{h}/\varkappa} + B e^{-x\sqrt{h}/\varkappa} .$$

Ist die Temperatur der Stange in zwei Punkten gegeben, so erhalten wir durch (b) die Temperatur in den Zwischenpunkten. Wir wollen annehmen, dass ein Punkt der Stange die Temperatur ϑ_0 habe und dass in einem sehr grossen Abstande von dem betrachteten Punkte die Stange die Temperatur 0 habe. Dann muss $\vartheta = 0$ sein für $x = \infty$ und also

(c) $$\vartheta = \vartheta_0 . e^{-x\sqrt{h}/\varkappa}$$

sein. Ist aber der Zustand nicht stationär, so muss die Gleichung (a) benutzt werden. Setzen wir in dieser Gleichung

$$\vartheta = u . e^{-ht},$$

so ergiebt sich

(d) $$\partial u / \partial t = \varkappa^2 . \partial^2 u / \partial x^2 .$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist früher angegeben. Mit Hülfe der Gleichungen (c) und (d) können wir die Abkühlung einer Stange ermitteln, welche beliebig erwärmt ist.

Wir wollen hier nur den Fall betrachten, in welchem ein einzelner Querschnitt S der Stange die Temperatur ϑ_0 hat, während an allen übrigen Stellen der Stange die Temperatur gleich Null ist. Von S breitet sich die Wärme nach beiden Seiten hin aus und nach unendlich langer Zeit ist die Temperatur im Abstande x vom Querschnitte S durch

$$\vartheta = \vartheta_0 . e^{-x\sqrt{h}/\varkappa}$$

gegeben. Dagegen ist zur Zeit t die Temperatur an derselben Stelle durch

(e) $$\vartheta = \vartheta_0 . e^{-x\sqrt{h}/\varkappa} + u . e^{-ht}$$

gegeben. Hier muss u die folgenden Bedingungen erfüllen:

1) u muss der Gleichung

$$\partial u / \partial t = \varkappa^2 . \partial^2 u / \partial x^2$$

genügen;

2) für $t = 0$ muss

$$0 = \vartheta_0 . e^{-x\sqrt{h}/\varkappa} + u$$

sein;

3) für $x = 0$ ist $u = 0$.

Den Bedingungen 1 und 3 genügt

$$u = 2/\pi . \int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x) \int_0^\infty f(\alpha) \sin(\lambda \alpha) e^{-\lambda^2 \varkappa^2 t} d\alpha.$$

Damit u auch (2) genügt, muss

$$0 = \vartheta_0 . e^{-x\sqrt{h}/\varkappa} + 2/\pi . \int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x) \int_0^\infty f(\alpha) \sin(\lambda \alpha) d\alpha$$

sein. Hierzu ist erforderlich, dass

$$f(\alpha) = -\vartheta_0 e^{-\alpha\sqrt{h}/\varkappa}$$

ist. Die Lösung der vorgelegten Aufgabe lautet demnach

$$\vartheta = \vartheta_0 . e^{-x\sqrt{h}/\varkappa} - 2\vartheta_0/\pi . e^{-ht} \int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x) . \int_0^\infty \sin(\lambda\alpha) e^{-\lambda^2\varkappa^2 t - \alpha\sqrt{h}/\varkappa} d\alpha.$$

Ebenso wie in § 131 können wir dem Ausdrucke

$$2/\pi . \int_0^\infty \sin(\lambda x) . \sin(\lambda\alpha) e^{-\lambda^2\varkappa^2 t} d\lambda$$

die Form

$$1/\pi . \int_0^\infty \cos[\lambda(x-\alpha)] e^{-\lambda^2\varkappa^2 t} d\lambda - 1/\pi . \int_0^\infty \cos[\lambda(x+\alpha)] e^{-\lambda^2\varkappa^2 t} d\lambda$$

geben, und dieser letztere Ausdruck ist gleich

$$1/2\varkappa\sqrt{\pi t} . \left(e^{-(x-\alpha)^2/4\varkappa^2 t} - e^{-(x+\alpha)^2/4\varkappa^2 t}\right).$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Gleichung für ϑ ein, so ergiebt sich

$$\vartheta = \vartheta_0 \Big[e^{-x\sqrt{h}/\varkappa} - \frac{e^{-ht}}{2\varkappa\sqrt{\pi t}} . \int_0^\infty \left(e^{-(x-\alpha)^2/4\varkappa^2 t} - e^{-(x+\alpha)^2/4\varkappa^2 t}\right) . e^{-\alpha\sqrt{h}/\varkappa} d\alpha \Big].$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdruckes setzen wir

$$p = (\alpha - x) / 2\varkappa\sqrt{t}, \quad \alpha = x + 2\varkappa p\sqrt{t}.$$

Dann ergiebt sich

$$\frac{e^{-ht}}{2\varkappa\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^\infty e^{-(x-\alpha)^2/4\varkappa^2 t} \cdot e^{-\alpha\sqrt{h}/\varkappa}\, d\alpha$$

$$= 1 / \sqrt{\pi} \cdot \int_{-x/2\varkappa\sqrt{t}}^\infty e^{-p^2} \cdot e^{-x\sqrt{h}/\varkappa - 2p\sqrt{ht}} \cdot e^{-ht} \cdot dp$$

$$= \frac{e^{-x\sqrt{h}/\varkappa}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-x/2\varkappa\sqrt{t}}^\infty e^{-(p+\sqrt{ht})^2}\, dp = \frac{e^{-x\sqrt{h}/\varkappa}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\sqrt{ht} - x/2\varkappa\sqrt{t}}^\infty e^{-q^2}\, dq.$$

In derselben Weise erhalten wir

$$\frac{e^{-ht}}{2\varkappa\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^\infty e^{-(x+\alpha)^2/4\varkappa^2 t} \cdot e^{-\alpha\sqrt{h}/\varkappa}\, d\alpha = \frac{e^{x\sqrt{h}/\varkappa}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\sqrt{ht} + x/2\varkappa\sqrt{t}}^\infty e^{-q^2}\, dq,$$

und also

$$\text{(f)} \quad \vartheta = \vartheta_0 \left[e^{-x\sqrt{h}/\varkappa} - \frac{e^{-x\sqrt{h}/\varkappa}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\sqrt{ht} - x/2\varkappa\sqrt{t}}^\infty e^{-q^2} dq + \frac{e^{x\sqrt{h}/\varkappa}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\sqrt{ht} + x/2\varkappa\sqrt{t}}^\infty e^{-q^2} dq \right].$$

Eine genaue Betrachtung dieses Ausdruckes zeigt, dass derselbe wirklich den Verlauf der Erwärmung in einer unendlich langen Stange darstellt. Für $t = 0$ wird die untere Grenze des ersten Integrals gleich $-\infty$, der Werth des Integrals selbst ist dann gleich $\sqrt{\pi}$; die untere Grenze des zweiten Integrals wird in demselben Falle ∞, der Werth des zweiten Integrals also gleich Null. Wir erhalten demnach für $t = 0$ auch $\vartheta = 0$, und dieses sollte auch der Fall sein für alle Querschnitte der Stange, ausgenommen für den erwärmten Querschnitt. Für $x = 0$ erhalten beide Integrale denselben Werth und also ist $\vartheta = \vartheta_0$. Für $t = \infty$ verschwinden beide Integrale und wir haben also richtig für den stationären Wärmezustand

$$\vartheta = \vartheta_0 \cdot e^{-x\sqrt{h}/\varkappa}.$$

Weil $h = PE / Sc\varrho$ ist, so wird h unendlich klein, wenn der Querschnitt der Stange unendlich gross oder wenn das Ausstrahlungsvermögen E unendlich klein wird. Setzen wir $h = 0$ in (f), so gelangen wir zu einem früher behandelten Falle, indem

(g) $$\vartheta = \vartheta_0 \left(1 - 1 / \sqrt{\pi} . \int_{-x/2\varkappa\sqrt{t}}^{\infty} e^{-q^2} dq + 1 / \sqrt{\pi} . \int_{x/2\varkappa\sqrt{t}}^{\infty} e^{-q^2} dq\right).$$

Dieses Resultat ist auch in § 131 gefunden. Der Ausdruck (g) giebt nämlich die Temperatur in einem unendlich weit ausgedehnten Körper an, welcher zur Zeit $t = 0$ in allen Punkten die Temperatur $\vartheta = 0$ hat, mit Ausnahme der Punkte auf der Fläche $x = 0$, für welche $\vartheta = \vartheta_0$.

Die Lösung (f) gilt nur für positive Werthe von x; soll aber dieselbe auch für jene Theile der Stange gelten, welchen negative Werthe von x entsprechen, so muss zunächst in (f) x mit $-x$ vertauscht werden.

§ 134. Ueber die Wärmeleitung in Flüssigkeiten.

Bislang haben wir nur die Wärmebewegung in festen Körpern betrachtet. Die Resultate, welche sich dabei ergeben haben, können im Allgemeinen nicht auf die Flüssigkeiten angewendet werden, weil jeder Temperaturunterschied, welcher eine verschieden grosse Ausdehnung in den verschiedenen Theilen der Flüssigkeit hervorbringt, zu sog. Convectionsströmungen Veranlassung giebt. Im Allgemeinen werden die Temperaturunterschiede durch diese Strömungen schneller ausgeglichen als durch die Leitung allein. Die Verhältnisse sind also sehr verwickelt. Wir beschränken uns darauf, die allgemeinen Bewegungsgleichungen zu entwickeln, welche in einzelnen einfachen Fällen angewendet werden sollen.

Wir gebrauchen die in der Hydrodynamik benutzte Bezeichnung. Die Continuitätsgleichung, welche ausdrückt, dass die Menge der Materie unveränderlich ist, lautet [vergl. § 41 (d)]

(a) $$\partial\varrho / \partial t + \partial(\varrho u) / \partial x + \partial(\varrho v) / \partial y + \partial(\varrho w) / \partial z = 0.$$

Die Bewegungsmenge, welche die Volumeneinheit in der Zeiteinheit empfängt, ist gleich der Kraft, welche auf jene Volumeneinheit wirkt. Nach § 41 haben wir also

$$
\text{(b)}\quad\left\{\begin{aligned}
A &= \varrho\,(\partial u/\partial t + u\,\partial u/\partial x + v\,\partial u/\partial y + w\,\partial u/\partial z)\\
&= \partial X_x/\partial x + \partial X_y/\partial y + \partial X_z/\partial z + \varrho X,\\
B &= \varrho\,(\partial v/\partial t + u\,\partial v/\partial x + v\,\partial v/\partial y + w\,\partial v/\partial z)\\
&= \partial Y_x/\partial x + \partial Y_y/\partial y + \partial Y_z/\partial z + \varrho Y,\\
C &= \varrho\,(\partial w/\partial t + u\,\partial w/\partial x + v\,\partial w/\partial y + w\,\partial w/\partial z)\\
&= \partial Z_x/\partial x + \partial Z_y/\partial y + \partial Z_z/\partial z + \varrho Z.
\end{aligned}\right.
$$

Die Bezeichnung A, B, C ist der Anwendung wegen hinzugefügt, welche demnächst gemacht werden soll.

Der flüssige Körper, welchen wir hier betrachten wollen, sei tropfbarflüssig und incompressibel. In diesem Falle enthält derselbe nur eine Energie in Form von lebendiger Kraft oder von Wärme. Ist der Körper dagegen luftförmig, so soll derselbe ein ideales Gas sein, welches dem Gesetze von Boyle und Gay-Lussac folgt. Solche Gase können wohl zusammengedrückt werden, aber die bei der Compression geleistete Arbeit tritt in Form von Wärme auf, sodass die im Gase enthaltene Energie unabhängig vom Volumen ist, aber allein durch die lebendige Kraft und Temperatur bestimmt ist.

Ein Raumelement $d\omega = dx\,dy\,dz$ der Flüssigkeit, welches die Gestalt eines Parallelepipeds hat, enthält zur Zeit t eine Energiemenge, welche die Summe der lebendigen Kraft und der Wärmemenge ist, wenn wir die letztere mit dem mechanischen Aequivalent J der Wärmeeinheit multipliciren. Ist E die Energie der Volumeneinheit, und enthält die Masseneinheit die Wärmemenge Θ, so haben wir, wenn h die Geschwindigkeit bezeichnet,

$$E = \tfrac{1}{2}\varrho h^2 + J\varrho\,\Theta.$$

Während der Zeit dt erhält das Volumenelement $d\omega$ die Energiemenge

$$
\text{(c)}\quad\left\{\begin{aligned}
&dE/dt\,.\,dt\,d\omega,\\
&\text{indem}\\
&dE/dt = \tfrac{1}{2}\,d(\varrho h^2)/dt + J\,.\,d(\varrho\,\Theta)/dt \quad \text{ist.}
\end{aligned}\right.
$$

Der Zuwachs an Energie, welchen das Element $d\omega$ in der Zeit dt erhält, rührt von folgenden Ursachen her:

1. von der Arbeit, welche die beschleunigend wirkenden Kräfte X, Y, Z leisten,
2. von der kinetischen Energie, welche in Folge des Strömens der Flüssigkeit durch die Oberfläche des Raumelementes $d\omega$ in das letztere hineingelangt,
3. von der Arbeit, welche die Oberflächenkräfte X_x, $X_y \dots$ auf die Theile der Flüssigkeit ausüben, welche sich in der Oberfläche des Elementes $d\omega$ befinden,
4. von der Wärme, welche die Theile der Flüssigkeit enthalten, welche in das Raumelement $d\omega$ hineinströmen,
5. von der Wärme, welche durch Leitung in das Element $d\omega$ dringt.

Diese einzelnen Energiemengen wollen wir der Reihe nach mit $e_1 d\omega\, dt$, $e_2 d\omega\, dt$, $e_3 d\omega\, dt$, $e_4 d\omega\, dt$ und $e_5 d\omega\, dt$ bezeichnen. e_1 ist also die Energiemenge, welche die Volumeneinheit in der Zeiteinheit allein durch den Einfluss der beschleunigend wirkenden Kräfte erhält. Wir wollen nun die Werthe von e_1, $e_2 \dots$ aufsuchen.

Die Arbeit, welche die beschleunigend wirkenden Kräfte während der Zeit dt ausführen, bestimmen wir folgendermaassen. Das Raumelement $d\omega$ hat die Masse $\varrho\, d\omega$ und bewegt sich in der Zeit dt um die Strecke $u\, dt$ in der Richtung der x-Axe. Dabei leistet die Kraft X die Arbeit $\varrho\, d\omega \, . \, X u\, dt$. Die Arbeiten, welche die Kräfte Y und Z ausführen, werden in derselben Weise bestimmt. Die betrachtete Arbeit ist also

$$\varrho\,(uX + vY + wZ)\, d\omega\, dt.$$

Diese Arbeitsgrösse haben wir aber mit $e_1\, d\omega\, dt$ bezeichnet und erhalten demnach

$$e_1 = \varrho\,(uX + vY + wZ). \tag{d}$$

Die kinetische Energie, welche $d\omega$ durch die Theile der Flüssigkeit empfängt, welche während der Zeit dt in das Element $d\omega$ hineinströmen, bestimmen wir folgendermaassen. Die Masse, welche während der Zeit dt durch das Oberflächenelement $dy\, dz$ hineinströmt, ist $\varrho . u . dt . dy\, dz$; die kine-

tische Energie dieser Masse ist also $\frac{1}{2}.\varrho.u\,dt.dy\,dz.h^2$. Setzen wir aber

$$U = \tfrac{1}{2}\varrho u h^2,$$

so ist U die Stromcomponente der kinetischen Energie in der Richtung der x-Axe. Die entsprechenden Stromcomponenten nach der y- und nach der z-Axe seien bezw. V und W; wir haben dann

$$V = \tfrac{1}{2}.\varrho v h^2, \quad W = \tfrac{1}{2}.\varrho w h^2.$$

Dabei erlangt nach ähnlichen Betrachtungen wie in § 14 das Volumenelement $d\omega$ in der Zeit dt die Energiemenge

$$-(\partial U/\partial x + \partial V/\partial y + \partial W/\partial z)\,d\omega\,dt.$$

Diese Grösse bezeichnen wir mit $e_2\,d\omega\,dt$ und erhalten demnach

$$e_2 = -\tfrac{1}{2}[\partial(\varrho u h^2)/\partial x + \partial(\varrho v h^2)/\partial y + \partial(\varrho w h^2)/\partial z],$$

oder

$$\begin{aligned} e_2 = &-\tfrac{1}{2}h^2.[\partial(\varrho u)/\partial x + \partial(\varrho v)/\partial y + \partial(\varrho w)/\partial z] \\ &-\varrho u(u\,\partial u/\partial x + v\,\partial v/\partial x + w\,\partial w/\partial x) \\ &-\varrho v(u\,\partial u/\partial y + v\,\partial v/\partial y + w\,\partial w/\partial y) \\ &-\varrho w(u\,\partial u/\partial z + v\,\partial v/\partial z + w\,\partial w/\partial z). \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (a) und (b) erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} e_2 = \tfrac{1}{2}h^2.d\varrho/dt + \varrho(u\,\partial u/\partial t + v\,\partial v/\partial t + w\,\partial w/\partial t) \\ -(Au + Bv + Cw), \end{aligned}$$

oder einfacher

$$e_2 = \tfrac{1}{2}h^2 d\varrho/dt + \tfrac{1}{2}\varrho\,dh^2/dt - (Au + Bv + Cw),$$

$$\text{(e)} \qquad e_2 = \tfrac{1}{2}.d(\varrho h^2)/dt - (Au + Bv + Cw).$$

Die Energiemenge, welche die Oberflächenkräfte X_x, X_y, ... dem Elemente $d\omega$ ertheilen, bestimmen wir in folgender Weise. Auf das Oberflächenelement $dy\,dz$, welches $d\omega$ auf der Seite begrenzt, die nach der Richtung der negativen x-Axe liegt, wirkt die Kraft $-X_x\,dy\,dz$ in der Richtung der x-Axe. Die Flüssigkeitstheilchen, welche während der Zeit dt durch das Element $dy\,dz$ strömen, legen den Weg $u\,dt$ in der Richtung der x-Axe zurück. Dabei leistet die Kraft $-X_x$ die Arbeit $-X_x\,dy\,dz.u\,dt$. Aber die Flüssigkeitstheilchen,

welche sich im Oberflächenelemente $dy\,dz$ befinden, haben auch tangentiale Bewegungen. In der Richtung der y-Axe legen sie unter dem Einflusse der Kraft $-Y_x\,dy\,dz$ den Weg $v\,dt$ zurück, wobei die Arbeit $-Y_x\,dy\,dz\,.\,v\,dt$ geleistet wird. Ferner bewegen sich auch dieselben Theilchen in der Richtung der z-Axe, wobei die Arbeit $-Z_x\,dy\,dz\,.\,w\,dt$ geleistet wird. Die gesammte Arbeit, welche die auf das Element $dy\,dz$ wirkenden Kräfte in der Zeit dt ausführen, ist also

$$-(X_x u + Y_x v + Z_x w)\,dy\,dz\,dt.$$

Diesen Energiestrom in der Richtung der x-Axe wollen wir mit $U'\,dy\,dz\,dt$ bezeichnen; die entsprechenden Ströme in der Richtung der y- und in der Richtung der z-Axe seien bezw. $V'\,dx\,dz\,dt$ und $W'\,dx\,dy\,dt$. Dann haben wir

$$U' = -(X_x u + Y_x v + Z_x w), \quad V' = -(X_y u + Y_y v + Z_y w),$$
$$W' = -(X_z u + Y_z v + Z_z w).$$

Die Energiemenge, welche $d\omega$ dabei erhält, wird ebenso wie im vorigen Falle bestimmt und ist gleich

$$e_3\,d\omega\,dt = -(\partial U' / \partial x + \partial V' / \partial y + \partial W' / \partial z)\,d\omega\,dt.$$

Demnach erhalten wir

$$e_3 = \partial(X_x u + Y_x v + Z_x w) / \partial x + \partial(X_y u + Y_y v + Z_y w) / \partial y$$
$$+ \partial(X_z u + Y_z v + Z_z w) / \partial z.$$

Benutzen wir aber die Gleichungen (b), so ergiebt sich

$$\text{(f)} \quad \left\{ \begin{aligned} e_3 &= X_x \partial u / \partial x + Y_y \partial v / \partial y + Z_z \partial w / \partial z \\ &+ Z_y(\partial w / \partial y + \partial v / \partial z) + X_z(\partial u / \partial z + \partial w / \partial x) \\ &+ Y_x(\partial v / \partial x + \partial u / \partial y) + (A - \varrho X)\,u + (B - \varrho Y)\,v \\ &+ (C - \varrho Z)\,w. \end{aligned} \right.$$

Die Wärmemenge, welche die einzelnen Theile der Flüssigkeit enthalten, wird mit diesen durch die Strömung fortgeführt. Durch das Flächenelement $dy\,dz$ dringt in der Zeit dt in das Element $d\omega$ die Masse $\varrho\,u\,dt\,.\,dy\,dz$ ein und bringt mit sich die Wärmemenge $\varrho\,u\,dy\,dz\,dt\,\Theta$ oder die Energie $J\varrho\,u\,dy\,dz\,dt\,\Theta$. In derselben Weise bestimmen wir die Wärmemengen, welche in das Element $d\omega$ durch die anderen Grenzflächen gelangen.

Benutzen wir sodann die oben angegebene Methode und setzen

$$U'' = J\varrho u \Theta, \quad V'' = J\varrho v \Theta, \quad W'' = J\varrho w \Theta,$$

so ergiebt sich die Wärmemenge $e_4 \, d\omega \, dt$, welche das Parallelepiped $d\omega$ in der Zeit dt durch die Wärmeconvection aufnimmt, aus

$$e_4 = -(\partial U''/\partial x + \partial V''/\partial y + \partial W''/\partial z)$$

oder

$$e_4 = -J[\partial(\varrho u \Theta)/\partial x + \partial(\varrho v \Theta)/\partial y + \partial(\varrho w \Theta)/\partial z].$$

Hieraus ergiebt sich in Rücksicht auf die Gleichung (a)

$$\text{(g)} \quad e_4 = J.\partial(\varrho\Theta)/\partial t - J\varrho(\partial\Theta/\partial t + u\partial\Theta/\partial x + v\partial\Theta/\partial y + w\partial\Theta/\partial z).$$

Endlich erhält das Element $d\omega$ auch Wärme durch die Leitung. Die entsprechenden Strömungscomponenten sind nach § 122

$$-Jk.\partial\vartheta/\partial x, \quad -Jk.\partial\vartheta/\partial y, \quad -Jk.\partial\vartheta/\partial z.$$

Setzen wir die Energiemenge, welche $d\omega$ in der Zeit dt erlangt, gleich $e_5 \, d\omega \, dt$ und nehmen wir das Leitungsvermögen als constant an, so ist

$$\text{(h)} \qquad e_5 = J.k(\partial^2\vartheta/\partial x^2 + \partial^2\vartheta/\partial y^2 + \partial^2\vartheta/\partial z^2).$$

Der Zuwachs an Energie, welchen $d\omega$ in der Zeit dt erhält, ist nach (c) durch

$$[\tfrac{1}{2}.d(\varrho h^2)/dt + Jd(\varrho\Theta)/dt] \, d\omega \, dt$$

gegeben. Zu gleicher Zeit strömt in das Element $d\omega$ die Energiemenge $(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \, d\omega \, dt$ hinein und wir haben also

$$\text{(i)} \quad \tfrac{1}{2}.d(\varrho h^2)/dt + Jd(\varrho\Theta)/dt = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5.$$

Setzen wir in diese Gleichung die für $e_1, e_2, e_3 \ldots$ gefundenen Werthe ein, so ergiebt sich

$$\text{(k)} \quad \begin{cases} J\varrho(\partial\Theta/\partial t + u\partial\Theta/\partial x + v\partial\Theta/\partial y + w\partial\Theta/\partial z) - Jk.\nabla^2\vartheta \\ = X_x\partial u/\partial x + Y_y\partial v/\partial y + Z_z\partial w/\partial z + Z_y(\partial w/\partial y + \partial v/\partial z) \\ \quad + X_z(\partial u/\partial z + \partial w/\partial x) + Y_x(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y). \end{cases}$$

Ist eine innere Reibung in der Flüssigkeit vorhanden, so haben wir nach § 47 (h)

$$X_x = -p + 2\mu \,.\, \partial u / \partial x - \tfrac{2}{3}\mu (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z)$$

und

$$Z_y = \mu (\partial w / \partial y + \partial v / \partial z) \text{ u. s. w.}$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen können wir der Gleichung (k) die Form geben

$$\text{(l)} \quad \left\{ \begin{aligned} & J\varrho(\partial\Theta/\partial t + u\partial\Theta/\partial x + v\partial\Theta/\partial y + w\partial\Theta/\partial z) - Jk\nabla^2\vartheta \\ & = -p(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z) + 2\mu[(\partial u/\partial x)^2 \\ & + (\partial v/\partial y)^2 + (\partial w/\partial z)^2 - \tfrac{1}{3}(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z)^2] \\ & + \mu[(\partial w/\partial y + \partial v/\partial z)^2 + (\partial u/\partial z + \partial w/\partial x)^2 \\ & + (\partial v/\partial x + \partial u/\partial y)^2]. \end{aligned} \right.$$

Zur Bestimmung der Bewegung und der Temperatur der Flüssigkeit haben wir die fünf Gleichungen, welche unter (a), (b) und (l) gegeben sind. Diese fünf Gleichungen reichen zur Bestimmung der sieben Unbekannten u, v, w, ϱ, p, Θ und ϑ nicht aus. Zwei weitere Gleichungen ergeben sich in folgender Weise. Die gesammte Wärmemenge Θ, welche die Masseneinheit enthält, muss von ϑ abhängen und wir wollen annehmen, dass

$$\text{(m)} \qquad \Theta = c\vartheta$$

ist, wo c constant und die specifische Wärme ist. Wenn die betrachtete Flüssigkeit luftförmig ist, so bedeutet c die specifische Wärme bei constantem Volumen.

Die zweite Gleichung muss die Abhängigkeit der Dichte ϱ vom Drucke und von der Temperatur angeben. Für Flüssigkeiten kann man annäherungsweise

$$\text{(n)} \qquad \varrho = \varrho_0 / (1 + \alpha\vartheta)$$

setzen, wo ϱ_0 die Dichte bei $\vartheta = 0$ und wo α eine Constante ist. Für luftförmige Körper aber haben wir, wenn V das Volumen der Masseneinheit bei dem Drucke p und der Temperatur ϑ, V_0 das Volumen derselben Masse bei dem Drucke p_0 und der Temperatur 0^0 ist,

$$pV = p_0 V_0 (1 + \alpha\vartheta).$$

Da $V\varrho = 1$ und ebenso $V_0\varrho_0 = 1$ ist, so haben wir

$$\text{(o)} \qquad p / \varrho = p_0 / \varrho_0 \cdot (1 + \alpha\vartheta).$$

Die Gleichung (o) in Verbindung mit den Gleichungen (a), (b), (l) und (m) dient zur Bestimmung der unbekannten Grössen. Die entwickelten Gleichungen, welche die Temperatur und die Bewegung in einer Flüssigkeit bestimmen, sind sehr schwer zu integriren, sodass bislang noch keine Aufgabe für irgend einen Fall vollständig gelöst ist.

§ 135. Der Einfluss der Wärmeleitung auf die Stärke und Geschwindigkeit des Schalles in luftförmigen Körpern.

Nach § 134 hat man zur Bestimmung der Bewegung in einem luftförmigen Körper, in welchem die Temperatur veränderlich ist, die folgenden Gleichungen:

1. Die Continuitätsgleichung § 134 (a), welche in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\partial\varrho / \partial t + \varrho(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z)$$
$$+ u\,\partial\varrho / \partial x + v\,\partial\varrho / \partial y + w\,\partial\varrho / \partial z = 0,$$

2. die Bewegungsgleichungen § 134 (b). In diese Gleichungen setzen wir für die Kräfte X_x, X_y, ... die Werthe ein, welche in § 47 (b) und (h) gefunden sind, und erhalten [vergl. § 48 (a)]

$$\varrho(\partial u / \partial t + u\,\partial u / \partial x + v\,\partial u / \partial y + w\,\partial u / \partial z)$$
$$= \varrho X - \partial p/\partial x + \mu \nabla^2 u + \tfrac{1}{3}\mu\partial(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z)/\partial x$$

und die analogen Gleichungen für y und z,

3. die Bedingung für die Erhaltung der Energie [vergl. § 134 (l)],

4. der Zusammenhang zwischen dem Wärmeinhalte und der Temperatur [vergl. § 134 (m)],

5. das Gesetz von Boyle und Gay-Lussac [vergl. § 134 (o)].

Die Geschwindigkeit und die Temperaturänderung seien sehr kleine Grössen; dasselbe ist der Fall mit den Differentialquotienten wie $\partial\varrho/\partial x$, $\partial\Theta/\partial x$ u. s. w. und wir wollen daher die Producte dieser Grössen unberücksichtigt lassen, d. h. die Glieder von der Form

$$u\,\partial\varrho/\partial x,\quad u\,\partial u/\partial x,\quad u\,\partial\Theta/\partial x \quad \text{u. s. w.}$$

fortlassen. Dadurch nehmen die Gleichungen 1—5 eine sehr viel einfachere Gestalt an. Wir erhalten nämlich

(a) $$\partial(\log\varrho)/\partial t + \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0.$$

Setzen wir ferner $\mu/\varrho = \mu'$, so nimmt die Gleichung (2) in Rücksicht auf (a) die Form an

(b) $$\partial u/\partial t + 1/\varrho . \partial p/\partial x = \mu' \nabla^2 u - \tfrac{1}{3}\mu' . \partial^2(\log\varrho)/\partial x\,\partial t.$$

Dieselben Gleichungen gelten für u und v mit Vertauschung von x bezw. durch y und z.

Eliminiren wir in der Gleichung § 134 (l) Θ durch die Beziehung $\Theta = c\vartheta$ und führen wir für $1/J$ das Wärmeäquivalent A der Arbeitseinheit ein, so ergiebt sich

(c) $$c\varrho . \partial\vartheta/\partial t - k\nabla^2\vartheta = Ap\,\partial(\log\varrho)/\partial t.$$

Ferner lautet die Gleichung § 134 (o)

(d) $$p/\varrho = p_0/\varrho_0 . (1 + \alpha\vartheta),$$

μ', k und c werden als constante Grössen betrachtet. An Stelle von ϱ wird ϱ_0 gesetzt, wenn ϱ oder $1/\varrho$ als Coefficient auftritt; ebenso wird in (c) p durch p_0 ersetzt. Bei diesen Substitutionen vernachlässigen wir nur unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung. Wird

$$\varrho = \varrho_0(1 + \sigma)$$

gesetzt, so erhalten wir

(e) $$\log\varrho = \log\varrho_0 + \sigma,$$

weil σ eine kleine Grösse ist. Demnach erhält die Gleichung (d) die Form

$$p = p_0(1 + \sigma)(1 + \alpha\vartheta),$$

oder, weil auch ϑ eine kleine Grösse ist,

(f) $$p = p_0(1 + \sigma + \alpha\vartheta).$$

Die Gleichung (c) lautet nun

$$\partial\vartheta/\partial t - k/c\varrho_0 . \nabla^2\vartheta = Ap_0/c\varrho_0 . \partial\sigma/\partial t.$$

Setzen wir aber

$$\varkappa^2 = k/c\varrho_0 \quad \text{und} \quad \Theta = c\varrho_0\vartheta/Ap_0,$$

so ergiebt sich aus der letzten Gleichung

(g) $$\partial\Theta/\partial t - \varkappa^2\nabla^2\Theta = \partial\sigma/\partial t.$$

Die Gleichung (b) können wir in Rücksicht auf (e) und (f) umformen in

$$\partial u / \partial t + p_0/\varrho_0 . \partial \sigma / \partial x + p_0 \alpha / \varrho_0 . \partial \vartheta / \partial x$$
$$= \mu' . \nabla^2 u - \tfrac{1}{3} \mu' . \partial^2 \sigma / \partial t \partial x.$$

Führen wir für ϑ die vorhin definirte Grösse Θ ein, so folgt

$$\text{(h)} \quad \begin{cases} \partial u/\partial t + p_0/\varrho_0 . \partial \sigma / \partial x + p_0/\varrho_0 . A p_0 \alpha / \varrho_0 c . \partial \Theta / \partial x \\ \qquad = \mu' . \nabla^2 u - \tfrac{1}{3} \mu' . \partial^2 \sigma / \partial t \partial x. \end{cases}$$

Wird ein Gramm Luft von der Temperatur ϑ auf $\vartheta + d\vartheta$ bei constantem Drucke erwärmt, so ist dazu die Wärmemenge $C.d\vartheta$ erforderlich, wenn C die specifische Wärme bei constantem Drucke ist. Ein Theil dieser Wärmemenge, nämlich $c.d\vartheta$, ist zur Erwärmung verbraucht, der andere Theil dient zur Ueberwindung des Widerstandes bei der Ausdehnung, bei welcher die Arbeit $p.dV$ geleistet wird. Wir haben also

$$C.d\vartheta = c.d\vartheta + Ap.dV.$$

Aus der Zustandsgleichung

$$pV = p_0 V_0 (1 + \alpha \vartheta)$$

ergiebt sich, weil p hier constant ist,

$$p.dV = p_0 V_0 \alpha . d\vartheta,$$

und also

$$\text{(i)} \qquad C = c + A p_0 \alpha / \varrho_0,$$

weil $V_0 \varrho_0 = 1$ ist.

Setzen wir endlich

$$a^2 = p_0 C / \varrho_0 c \quad \text{und} \quad b^2 = p_0 / \varrho_0,$$

so nehmen die Gleichungen (a), (b) und (c) die folgenden Formen an:

$$\text{(k)} \quad \begin{cases} \partial \sigma / \partial t + \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0, \\ \partial u / \partial t + b^2 . \partial \sigma / \partial x + (a^2 - b^2) \partial \Theta / \partial x = \mu' . \nabla^2 u - \tfrac{1}{3} \mu' . \partial^2 \sigma / \partial t \partial x, \\ \partial v / \partial t + b^2 . \partial \sigma / \partial y + (a^2 - b^2) \partial \Theta / \partial y = \mu' . \nabla^2 v - \tfrac{1}{3} \mu' . \partial^2 \sigma / \partial t \partial y. \\ \partial w / \partial t + b^2 . \partial \sigma / \partial z + (a^2 - b^2) \partial \Theta / \partial z = \mu' . \nabla^2 w - \tfrac{1}{3} \mu' . \partial^2 \sigma / \partial t \partial z, \\ \partial \Theta / \partial t - \varkappa^2 \nabla^2 \Theta = \partial \sigma / \partial t. \end{cases}$$

Diese Gleichungen rühren von Kirchhoff[1]) her. Wegen der Anwendung dieser Gleichungen auf schwierigere Fälle der Fortpflanzung des Schalles sei auf Kirchhoff's Arbeit verwiesen. Wir wollen hier nur den Einfluss der Wärmeleitung und der Reibung auf die Bewegung ebener Schallwellen untersuchen. Zunächst soll aber die physikalische Bedeutung der Constanten a und b ermittelt werden.

Wenn weder Wärmeleitung noch Reibung in der Luft stattfindet, so ist $\varkappa = 0$ und $\mu' = 0$; wenn ferner die Schwingungen in der Richtung der x-Axe erfolgen, so ist auch $v = w = 0$. Unter diesen Umständen lauten die Gleichungen (k)

$$\partial \sigma / \partial t + \partial u / \partial x = 0,$$
$$\partial u / \partial t + b^2 . \partial \sigma / \partial x + (a^2 - b^2) . \partial \Theta / \partial x = 0,$$
$$\partial \Theta / \partial t = \partial \sigma / \partial t.$$

Wird die zweite dieser drei Gleichungen in Bezug auf t differentiirt, so erhalten wir

$$\partial^2 u / \partial t^2 + b^2 . \partial^2 \sigma / \partial x \partial t + (a^2 - b^2) . \partial^2 \Theta / \partial x \partial t = 0.$$

Hieraus ergiebt sich aber mit Hülfe der ersten und letzten der drei Gleichungen

$$\partial^2 u / \partial t^2 = a^2 . \partial^2 u / \partial x^2.$$

Ein Integral dieser Gleichung ist

$$u = \cos [2\pi / T . (t - x / a)]$$

und dieser Ausdruck stellt eine Wellenbewegung dar, welche mit der Geschwindigkeit

$$a = \sqrt{p_0 C / \varrho_0 c} = b \sqrt{C / c} \tag{l}$$

fortschreitet. Dieser Werth für die Geschwindigkeit des Schalles ist von Laplace gefunden. Derselbe weicht von dem in § 35 berechneten Werthe ab, welcher ursprünglich von Newton gefunden ist und in der von uns benutzten Bezeichnung

$$b = \sqrt{p_0 / \varrho_0}$$

lautet. Der Unterschied zwischen beiden Formeln rührt daher, dass wir bei der ersteren auf die Erwärmung der Luft bei der

[1]) Kirchhoff, Pogg. Ann. Bd. 134. 1868.

Compression und auf die Abkühlung derselben bei der Expansion Rücksicht genommen haben. Da man durch directe Versuche das Verhältniss C/c ermittelt hat, so kann die wahre Geschwindigkeit des Schalles in der Luft berechnet werden. Für atmosphärische Luft ist bei 0° C. $C/c = 1{,}405$; demnach wird $a = 33815$ cm. Dieser Werth stimmt sehr gut mit der Erfahrung überein. Aus unseren Betrachtungen aber ergiebt sich, dass b der Werth für die Geschwindigkeit des Schalles ist, welchen Newton berechnet hat, während a die wirkliche Geschwindigkeit des Schalles ist.

Eine ebene Welle pflanze sich in der Richtung der x-Axe fort; $\varkappa$ und μ' sollen von Null verschieden sein. Die Schwingungen sind parallel der x-Axe, sodass $v = 0$ und $w = 0$. Da u, Θ und σ jetzt Functionen von x und t allein sind, so lauten die Gleichungen (k):

$$(\mathrm{m}) \quad \begin{cases} \partial\sigma / \partial t + \partial u / \partial x = 0, \\ \partial u / \partial t + b^2 . \partial\sigma / \partial x + (a^2 - b^2) \partial\Theta / \partial x \\ \quad = \mu' . \partial^2 u / \partial x^2 - \frac{1}{3}\mu' . \partial^2\sigma / \partial t \partial x, \\ \partial\Theta / \partial t - \varkappa^2 . \partial^2\Theta / \partial x^2 = \partial\sigma / \partial t. \end{cases}$$

Die unbekannten u, Θ und σ sind gewisse periodische Functionen von t. Wir wollen mit h eine reelle Grösse bezeichnen und mit u', Θ' und σ' drei Grössen, welche Functionen von x allein sind. Alsdann liegt es nahe

$$(\mathrm{n}) \qquad u = u' . e^{hit}, \quad \Theta = \Theta' . e^{hit}, \quad \sigma = \sigma' . e^{hit}$$

zu setzen, wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Mit Hülfe dieser Gleichungen erhalten wir aus (m)

$$h i \sigma' + du' / dx = 0,$$
$$hiu' + b^2 . d\sigma' / dx + (a^2 - b^2) \, d\Theta' / dx = \mu' . d^2 u' / dx^2 - \tfrac{1}{3}\mu' h i . d\sigma' / dx,$$
$$h i \Theta' - \varkappa^2 . d^2\Theta' / dx^2 = h i \sigma'.$$

Aus diesen Gleichungen kann σ' eliminirt werden und wir erhalten dann

$$(\mathrm{o}) \quad \begin{cases} -h^2 u' + hi(a^2 - b^2) . d\Theta' / dx = (b^2 + \frac{4}{3}\mu' hi) . d^2 u' / dx^2, \\ du' / dx = \varkappa^2 d^2\Theta' / dx^2 - hi\,\Theta'. \end{cases}$$

Wird die erstere der Gleichungen (o) nach x differentiirt, so

kann u' eliminirt werden und es ergiebt sich dann folgende Differentialgleichung

$$\text{(p)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\varkappa^2 (b^2 + \tfrac{4}{3}\mu' h i) \,.\, d^4\Theta' / dx^4 \\ &+ (h^2\varkappa^2 + \tfrac{4}{3}\mu' h^2 - h a^2 i) \,.\, d^2\Theta' / dx^2 - h^3 i\, \Theta' = 0. \end{aligned} \right.$$

Da diese Gleichung linear ist, so setzen wir

$$\text{(q)} \qquad \Theta' = e^{mx}$$

und erhalten dann

$$\text{(r)} \qquad \varkappa^2 m^4 (b^2 + \tfrac{4}{3}\mu' h i) + m^2 (h^2 \varkappa^2 + \tfrac{4}{3}\mu' h^2 - h a^2 i) - h^3 i = 0.$$

Wir wollen den Exponenten m nur für den Fall bestimmen, in welchem sowohl das Wärmeleitungsvermögen als auch die innere Reibung sehr gering sind. Ist $\varkappa = 0$ und $\mu' = 0$, so erhalten wir aus (r)

$$m = -\, h i / a.$$

Setzen wir also allgemein

$$m = (-h i + \delta) / a,$$

wo δ eine kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen unbeachtet bleiben können, so ergiebt sich aus (r), wenn die Glieder $\varkappa^2\mu'$, $\varkappa^2\delta$ u. s. w. fortgelassen werden,

$$\text{(s)} \qquad \delta = -\left[\tfrac{4}{3}\mu' h^2 + (1 - b^2/a^2)\varkappa^2 h^2\right] / 2a^2.$$

Aus (n) und (q) folgt aber, dass der eine Werth für Θ

$$\Theta = e^{\delta x / a} \,.\, e^{h i (t - x/a)}$$

ist, den anderen erhalten wir durch Vertauschung von i mit $-i$, indem auch

$$\Theta = e^{\delta x / a} \,.\, e^{-h i (t - x/a)}$$

ist. Die halbe Summe der beiden Werthe von Θ genügt ebenfalls den Bedingungen und ist zu gleicher Zeit reell, indem

$$\text{(t)} \qquad \Theta = e^{-[{}^4/_3 \mu' h^2 + (1 - b^2/a^2)\varkappa^2 h^2] \,.\, x / 2a^3} \,.\, \cos\left[h\,(t - x/a)\right].$$

Aus dem Exponenten von e erkennt man, dass die Temperaturänderungen in der Welle abnehmen, je weiter dieselbe fortschreitet; zu gleicher Zeit nimmt auch u ab. Der Schall wird also um so schwächer, je weiter die Welle vorwärts schreitet.

Wenn T die Schwingungsdauer und n die Schwingungszahl ist, so haben wir

$$h = 2\pi / T = 2n\pi.$$

Aus der Gleichung (t) ergiebt sich aber, dass die höheren Töne schneller erlöschen als die tieferen.

Die mathematische Behandlung der Wärmeleitung rührt hauptsächlich von Fourier her, welcher nicht nur die partielle Differentialgleichung entwickelt hat, welche bei der Betrachtung der Wärmeleitung zu Grunde gelegt wird, sondern auch Methoden zur Lösung einer grösseren Zahl von Aufgaben angegeben hat. Sein Hauptwerk ist: Théorie analytique de la Chaleur, Paris 1822. Von den neueren Werken, welche die Wärmeleitung behandeln, heben wir hervor: Riemann, Partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorf, Braunschweig 1876.

Sachregister.

Druckfehler.

Seite 35 Zeile 5 v. ob. lies: $m\ddot{s} = P$ oder $\ddot{s} = -gs/l$.
„ 80 „ 14 u. 16 v. ob. lies: $J.\ddot{\Theta} = -a \sin \Theta . g . \Sigma m$,
und $\ddot{\Theta} = -a\Theta g \Sigma m / J$.
„ 209 „ 5 v. ob.: die Gleichung $\varrho = \partial f / \partial x + \partial g / \partial y + \partial h / \partial z$ ist mit (d) zu bezeichnen.
„ 353 „ 5 v. unt. lies: Glazebroock.
„ 368 Fig. 135 für a lies v, für b lies p.

